Archiv der Mathematik und Physik

Digitized by Google

Archiv der Mathematik und Physik

Digitized by Google

510.5
A673

Digitized by Google

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,
Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Neunter Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1890.

Digitized by Google

162507

STANFORD LIBRARY

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichnis

des neunten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Methode und Principien.		
XX.	Anwendungen von Dühring's Begriffe der Wertigkeit. Von R. Wessely	IV	393
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
XI.	Die Entwicklung der Exponentiellen in eine unendliche Factorenfolge. Von Franz Rogel . . .	II	206
XI.	Zahlentheoretische Eigentümlichkeiten gewisser Reihen. Von Franz Rogel	II	210
XV.	Darstellung der harmonischen Reihen durch Factorenfolgen. Von Franz Rogel	III	297
XVI.	Die vierte Rechenstufe. Von Emil Schulze .	III	320
XVII.	Ein Discontinuitätsfactor. Von Franz Rogel .	III	334
	Integralrechnung.		
VI.	Auswertung einiger bestimmten Integrale durch Anwendung des freien Integrationsweges. Von Ulrich Bigler	I	60
XIV.	Ueber eine Anwendung der Taylor'schen Reihe und einige bestimmte Integrale. Von Reinhard Mildner	III	285

Digitized by Google

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Geometrie der Ebene.

№	Titel	Heft	Seite
II.	Ueber das allgemeine circuläre Polarsystem. Von Theodor Meyer	I	18
VII.	Ueber Ermittelung von Krümmungshalbmessern von Kegelschnitten auf synthetischem Wege. Von Rudolf Skutsch	I	95
VII.	Ueber die einem Kegelschnitt umgeschriebenen Kreisvierecke. Von Emanuel Czuber	I	101
VIII.	Ueber Kegelschnitte, die zu dem verallgemeinerten Brocard'schen Dreiecke in Beziehung stehen. Von Andreas Müller	II	113
X.	Tangentenconstructionen für Fusspunktcurven. Von Eduard Janisch	II	196
XI.	Elementare Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Parabel. Von Wilhelm Rulf	II	212
XI.	Verwandlung einer Kreisfläche in ein annähernd gleich grosses Quadrat. Von Ernst Lakenmacher	II	214
XI.	Ueber den Schnitt einer Hyperbel mit einer Geraden. Von Franz Ruth	II	216
XII.	Ueber die Doppelpunkte bei der projectivischen ebenen Correspondenz. Von Torsten Brodén	III	225
XXI.	Ueber einige specielle Curven höherer Ordnung. Von Josef Wesely	IV	420
XXIII.	Eine Minimaleigenschaft der archimedischen Spirale. Von Eduard Janisch	IV	445

Geometrie des Raumes.

№	Titel	Heft	Seite
III.	Untersuchungen zur Theorie der Charaktere der Krümmungslinien auf Röhrenflächen. Von A. Ahrendt	I	31
IV.	Zur Goursat'schen Reduction des Problems der Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel. Von R. Hoppe	I	43
V.	Ueber die von Humbert untersuchten Kugelflächenstücke. Von R. Hoppe	I	53

Digitized by Google

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
VII.	Ueber Congruenz und Symmetrie der Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Von R. Hoppe .	I	108
VII.	Zur Inhaltsberechnung der Flächen und Körper. Von Ligowski	I	111
XI.	Bemerkungen betreffend eine Classe von Curven auf dem einschaligen Rotations-Hyperboloide. Von Eduard Janisch	II	219
XI.	Classification der Flächen zweiter Ordnung. Von J. Vályi	II	223
XIII.	Ueber die Spitzenörter aller orthogonalen, gleichseitigen oder dazu dualen Kegel, welche an eine Fläche 2. Ordnung tangential gehen. Von A. Koch	III	250
XVII.	Erweiterung der Sätze über das Tetraeder, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen. Von R. Hoppe	III	327
XIX.	Ueber Transversalenschnittpunkte, Transversalenwinkel und Transversalenteilstrecken im ebenen Dreieck und Tetraeder. Von Heinrich Seipp	IV	375
XXII.	Höhenschnitt-Tetraeder mit rationalen Kanten. Von R. Hoppe	IV	434

Trigonometrie.

XI.	Trigonometrische Formeln zur annähernden Bestimmung der Sinuswerte. Von Ernst Lakenmacher	II	215

Mechanik.

IX.	Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Von P. Molenbroek	II	157

Technik.

XVII.	Ueber einige Formen von Densimetern, bei welchen gleichen Dichtenintervallen gleiche Teilstrichdistanzen entsprechen. Von Eduard Janisch	III	332

Digitized by Google

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Optik.

I. Ueber die Theorie des Winkelspiegels. Von H. Maurer . . . . I 1

XVIII. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien. Von Friedrich Hermann Wehner . . . . IV 337

Litterarische Berichte.

XXXIII. Br. Borchardt (Wahrsch.) Clasen (résol. éq.) Igel (assoc. F.) Teixeira (calc. int.) Lübsen (Inf. Rechn.) Abel u. Galois (alg. Lös.) Dickmann (Det.) Brüssel (Bull. XIV — XVII) Napoli (Rend. II.) Mansion u. Neuberg (Math. IX.) Nieuw Archief (XVI) Brüssel (Ann. 1889).

XXXIV. Lasswitz (Gesch. At. I.) Curtze (Jord. Nem.) Bamb. math. Ges. (Gesch. d. Ges.) d'Ocagne (Borchardt) Vigarié (hist. g. trgl.) Rulf (proj. G.) Bobek (proj. G.) Frischauf (anal. G.) Fiedler (anal. G.) Bützberger (plan. Probl.) Dietsch (darst. G.) Breuer (Kegschn. — Normalf.) Hamb. math. Ges. (Mitt. II.) Soc. M. de Fr. (Bull. XVII.) Linc. (Rend. V.)

XXXV. Fechner (Psychophys.) Miller-Hauenfels (mech. Wärm.) Schellwien (opt. Här.) Bühler (2 Mat. 3 Ges.) Brockmann (Meth. Aufg.) Lieblein (Laska) (Aufg.) Sickenberger (Ueb.) Wrobel (Ueb. — Res.) Fuhrmann (Anw. Diff.) Buchholtz (Erdzeit). Franz (Libr. Mond.) Bebber (Meteor.) Möbius (Astr.) Bischoff (Geoid). Doliarius (Datumw.) Urania (H. u. E I.) Littrow (astr. Kal. IX.) Toulouse (Ann. III.)

XXXVI. Brunn (Cv. ohne Wdp.) Thienemann (Min. Fl.) Fuhrmann (synth. Bew.) Schick (Isog.) Doehlemann (Fläche). Pözl (darst. G.) Fischer (Kegschn.) Frick (ph. Techn.) Zetzsche (Telegr.) Rohrbeck (Nippoldt) (Vadem.) Krebs u. Grawinkel (Jahrb. El.) Baillaud (Ann. Obs. I. II.) Watson u. Burbury (Th. El. II.) Hobbs (Kietzer) (Ber. el. Mess.) H. Weber (El. Dyn.) W. Voigt (Reib.) Recknagel (Exp. Ph.) Japan (Journ. II. 4. 5. III. 1. 2. 3) Newcomb (Journ. XII.) Napoli (Rend. III.) Versl. en Meded. (VI. VII.) Mohr (Geheimn.)

Berichtigungen

im 8. Teile.

Seite	Zeile				
150	3 v. u.	statt	Bestimmungen	setze	Restbestimmungen
174	3 „ „	„	sagar	„	sogar
185	5 „ „	„	θ	„	0
199	14 v. o.	„	sypischen	„	typischen
211	3 „ „	„	n	„	a
	11 „ „	Das Wort „man“ streiche			
	15 „ „	statt	x^{2y+1}	setze	x^{2q+1}
	8 v. u.	„	ist	„	ist die
212	7 v. o.	„	Zahlen	„	Primzahlen
213	13 v. u.	„	so so	„	so
216	16 v. o.	„	undendlich	„	unendlich
217	7 „ „	„	die	„	Die
218	10 „ „	„	δ_2	„	δ_1
	2 v. u.	„	*di*	„	*dt*
220	2 „ „	3mal statt	q	„	9

im 9. Teile.

Seite	Zeile				
18	10 v. o.	statt	denn	setze	dann
	11 „ „	„	aus	„	aus O
	9 v. u.	„	O	„	0
19	9 v, o.	„	noch	„	noch nicht
21	11 „ „	„	den	„	der
	21 „ „	„	der	„	der Curve
	2 v. u.	„	Cure	„	Curve
22	2 v. o.	„	müsste	„	musste
23	22 „ „	„	abstehen	„	absehen

Digitized by Google

Seite	Zeile					
25	9	v. o.	statt	Hühen	setze	Höhen
	13	v. u.	„	das das	„	das
26	9	„ „	„	von	„	die von
27	17	„ „	„	*B* und *F*	„	*E* und *F*
196	10	„ „	„	C_2	„	C_1
197	6	v. o.	„	in	„	ist in
199	18	v. u.	„	gegeben	„	gegebenen

Digitized by Google

I.

Ueber die Theorie des Winkelspiegels.

Von

H. Maurer.

Eine allgemeine Theorie des Winkelspiegels pflegt man im physikalischen Unterrichte nicht zu geben, obwol eine Ausführung derselben wegen des elementaren Charakters dieses Themas und der schönen Resultate, die sich dabei ergeben, wol am Platze wäre. Man begnügt sich meist damit, einen Satz aus dieser Theorie anzuführen, nämlich den folgenden: Ist der Winkel zwischen zwei Planspiegeln der $n$te Teil des Kreisumfangs, wo n eine ganze Zahl ist, so ist die Anzahl der Bilder $= n - 1$.

Die Erkenntniss nun, dass dieser einzige Satz, der wol überall vorgetragen wird und sich in vielen Lehrbüchern der Physik findet (z. B. Wüllner, Bd. II. S. 61), falsch ist, veranlasste mich, eine allgemeine Theorie des Winkelspiegels aufzustellen. Nach Vollendung der Arbeit erfuhr ich, dass bereits mehrere Arbeiten über diesen Gegenstand vorliegen [1]). Da indessen in meiner Arbeit ein anderer Gang als in den früheren eingehalten ist, und auf diesem Wege eine

1) H. Klein, Poggend. Ann. CLII. S. 506—512.
E. Ritsert, Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVIII. S. 339—346.
E. Hess, Marburger Sitzungsberichte Jan. 1879. S. 7 u. ff.
Schubert, Mitteilungen der math. Ges. in Hamburg 1882 Nr. 2. (war mir nicht zugänglich).
L. Mack, Grunert's Archiv. N. F. Bd. II. 1885. S. 1 ff.
K. Mack, Grunert's Archiv. N. F. Bd, II. 1885. S. 220—222.

Digitized by Google

einfachere Gruppirung der Resultate erreicht wird, da ferner das Problem nicht nur auf mathematische Punkte als gespiegelte Gegenstände beschränkt wird und endlich der zweite Teil der Arbeit ein neues Problem der Theorie behandelt, nämlich die Frage nach der Anzahl der von einem gegebenen Orte aus sichtbaren Bilder [1]), welche zu sehr einfachen und allgemeinen Sätzen geführt hat, so glaube ich mich doch zur Veröffentlichung meiner Arbeit berechtigt.

Jedenfalls kann es ja auch von Nutzen sein, wenn von neuem darauf hingewiesen wird, dass hier allgemein in den Schulen ein falscher Satz gelehrt wird, und dass, obwol das Richtige erkannt ist, in den Lehrbühern ein Irrtum noch immer weiter geführt wird. Der Umstand, dass in den früheren Arbeiten das genannte neue Problem nicht ausgeführt wurde, kann zu dem Irrtume führen, man sähe von jedem Orte zwischen beiden Spiegeln sämtliche geometrisch construirbaren Bilder. Wir werden finden, dass dies nur in dem Specialfall eintritt, wo der Winkel zwischen den Spiegeln ein geradzahliger Teil des Kreisumfangs ist.

Besondere Erwähnung verdient die neuerdings erschienene Arbeit von M. Koppe [2]). In dieser sehr kurz gehaltenen Arbeit wird auf die Anzahl der geometrisch construirbaren Bilder gar *nicht* eingegangen, sondern direct das Problem gelöst, wie viele Bilder eines an einem bestimmten Orte befindlichen Gegenstandes ein an einem bestimmten Orte befindliches Auge sieht, falls der Winkel zwischen den Spiegeln gegeben ist. Diese Aufgabe löst der Verfasser sehr einfach und klar. Dagegen wird durch diese Art der Fragestellung die Bedeutung der geometrisch construirbaren Bilder nicht entsprechend gewürdigt. Ich möchte diese deshalb schon hier klar stellen. Befindet sich ein leuchtender Punkt zwischen zwei geneigten Planspiegeln, so sind sämtliche auftretende Lichtstrahlen Strahlen einer endlichen Anzahl von Strahlenbündeln, d. h. jeder scheint vom Centrum eines solchen Strahlenbündels herzukommen.

Und diese Centren sind der leuchtende Punkt selbst und *seine* geometrisch construirbaren Bilder. Die Anzahl und Lage dieser Punkte hängt von der Grösse des Spiegelwinkels und dem Orte *des* Gegenstandes in ihm ab. Nehme ich nun in einem Ort des Raumes ein beobachtendes Auge an, so werde ich im allgemeinen nicht von jedem Orte aus alle diese Bilder sehen; ja es kann vorkommen, dass

---

1) Auch angedeutet bei H. Klei*n* a. a. O.

2) Koppe, Theorie des Winkelspiegels, Ztschr. f. d. phys. und chem. Unterricht. Jahrg. II. Heft III. Febr. 1889. S. 1 - 4.

Digitized by Google

es gar keinen Punkt im Raume giebt, von dem aus ich alle Bilder erblicke. Um alle zu sehen, muss ich dann eben meinen Standort verändern. Und wie viele von allen entstehenden Bildern ich von einem bestimmten Orte aus sehe, ist jedenfalls eine secundäre Frage; zunächst fragt es sich, wie viele Bilder es überhaupt giebt.

In der vorliegenden Arbeit wird daher im ersten Teile die Anzahl der tatsächlich entstehenden, im zweiten diejenige der von einem bestimmten Orte aus sichtbaren Bilder bestimmt.

I.

Ein Winkelspiegel besteht aus zwei gegen einander geneigten Planspiegeln. Zwischen beiden Spiegeln befinde sich ein Gegenstand, den wir zunächst punktförmig annehmen wollen, in G (siehe Figur) $\overline{OS_1}$ und $\overline{OS_2}$ sind die Schnittlinien der beiden Spiegelebenen mit der Ebene, die normal zur Kante der beiden Spiegel durch G geht. In dieser Ebene liegen alle Bilder, da nach dem Reflexionsgesetze Bild und gespiegelter Punkt auf einem Lote auf die Spiegelebene sich befinden. Aus dem Umstand, dass der gespiegelte Punkt und sein Bild auf diesem Lote gleiche Entfernung von der Spiegelebene besitzen, ergiebt sich, dass alle Bilder auf dem Kreise liegen, der mit dem Radius $\overline{OG}$ um O beschrieben wird.

Wir gehen zur Construction der Bilder über. Der Winkel zwischen den Spiegeln, Wkl. S_1OS_2 werde mit α bezeichnet. Der Radiusvector $\overline{OG}$ bilde mit dem Spiegel $\overline{OS_1}$ den Winkel γ, also mit dem andern den Winkel $(\alpha-\gamma)$.

Man erhält das Bild (1), d. h. den Punkt, von dem die Lichtstrahlen zu kommen scheinen, die nur an OS_1 reflectirt sind, indem man auf dem Kreise von S_1 aus nach rechts den Bogen γ abträgt, analog das Bild (2) durch Abtragen des Bogens $(\alpha-\gamma)$ von S_2 aus nach links.

Von dem Bilde (12) scheinen die Strahlen herzukommen, welche zuerst an OS_1, dann an OS_2 reflectirt wurden; es ist also das Spiegelbild von (1) im zweiten Spiegel.

Man erhält demnach (12) durch Abtragen des Bogens $(\alpha+\gamma)$ von S_2 aus nach links. In der entsprechenden Weise sind die übrigen Bilder zu construiren. Man hat zu diesem Zweck folgende Bögen abzutragen:

von S_1 nach rechts: $\gamma\,(2\alpha-\gamma)\,(2\alpha+\gamma)\,(4\alpha-\gamma)\,(4\alpha+\gamma)\,(6\alpha-\gamma)$
$(6\alpha+\gamma)$ etc.

von S_2 nach links: $(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)(3\alpha-\gamma)(3\alpha+\gamma)(5\alpha-\gamma)(5\alpha+\gamma)$ etc.

Dieses Abtragen von Bögen darf nach rechts von S_1 aus nur solange fortgesetzt werden, als der Punkt S_1' noch nicht überschritten ist, da die Lichtstrahlen, die von allen so gefundenen Bildern herzukommen scheinen, zuletzt am Spiegel OS_1 reflectirt wurden, sodass alle dieser Bilder hinter dem Spiegel OS_1 liegen müssen. Ebenso dürfen wir beim Abtragen der Bögen von S_2 nach links den Punkt S_2' nicht überschreiten, da alle hier construirten Bilder hinter den Spiegel OS_2 fallen müssen.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Bilder, welche im Winkelraum $S_1'OS_2'$ liegen; sie können in keinem der beiden Spiegel mehr gespiegelt werden, da sie sich hinter beiden befinden. Ferner ist klar, dass die Bilder nicht von jedem Orte im Winkelraum S_1OS_2 aus erblickt werden können; denn die Strahlen, die von einem solchen Bild herzukommen scheinen, müssen, wie es bei jedem anderen Bilde auch der Fall ist, ihre letzte Reflexion an einer bestimmten der beiden Spiegelflächen gefunden haben. Es sei diese z. B. der Spiegel $\overline{OS_1}$; dann ist das betreffende Bild nur von solchen Orten des Sectors S_1OS_2 zu sehen, von denen aus gezogen die Verbindungsgerade mit dem Bilde auch wirklich den Spiegel $\overline{OS_1}$ und nicht seine gedachte Verlängerung und den wirklichen Spiegel $\overline{OS_2}$ trifft. Infolge dessen kann die Anzahl der von einem bestimmten Orte aus sichtbaren Bilder kleiner als die der tatsächlich entstehenden sein; ja es kann vorkommen, dass man von keinem einzigen Punkte des Raumes aus alle entstehenden Bilder zugleich sehen kann. Empirisch können wir dann die wahre Anzahl der Bilder nur dann aus dem Umstande erkennen, dass beim Bewegen des Auges ein Bild verschwindet, und später an einer anderen Stelle ein anderes erscheint, das bis dahin unsichtbar war. Wie die die Anzahl der sichtbaren Bilder vom Orte des Auges abhängt, werden wir später bestimmen; zunächst wollen wir die Abhängigkeit der Anzahl geometrisch construirbarer Bilder von den Winkeln α und γ angeben.

Die Bogendistanzen der Bilder:

von S_1 aus nach rechts: $\gamma(2\alpha-\gamma)(2\alpha+\gamma)(4\alpha-\gamma)(4\alpha+\gamma)$ etc.
von S_2 aus nach links: $(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)(3\alpha-\gamma)(3\alpha+\gamma)(5\alpha-\gamma)$ etc.

beweisen, dass, wenn man von S_1 nach rechts und von S_2 nach links successive die Bögen α, 2α, 3α, 4α etc. abträgt, in die aufeinanderfolgenden Intervalle von 0 bis α, α bis 2α, 2α bis 3α u. s. w. auf beiden Seiten jedes mal ein und nur ein Bild fällt. Können wir also

Digitized by Google

auf dem Halbkreis $S_1 S_1'$ rechts herumgehend, und dann natürlich auch auf $S_2 S_2'$ links herum gehend, den Bogen α $p$mal abtragen, sodass der restirende Bogen φ der Ungleichung:

$$0 \leqq \varphi < \alpha$$

genügt, so können wir bis dahin $2p$ Bilder construiren. Die Grössen p und φ hangen also nur von α, aber nicht von γ ab, und zwar nach der Gleichung

$$180^0 = p . \alpha + \varphi$$

mit den Zusätzen:

$$p \text{ ist ganze Zahl und } 0 \leqq \varphi < \alpha$$

Ist nun p eine gerade Zahl, so können wir von S_1 aus rechts herum gehend noch ein weiteres Bild zeichnen, falls $\varphi > \gamma$ ist, da alle ungeradzahligen Bilder dieser Serie von S_1 einen Bogenabstand von der Form: $2m\alpha + \gamma$ haben. Links herumgehend von S_2 aus können wir ein ferneres Bild finden, wenn $\varphi > \alpha - \gamma$ ist, da die ungeradzahligen Bilder dieser Serie von S_2 Bogenabstände von der Form: $2m\alpha + (\alpha - \gamma)$ haben. Ist p ungerade, so erhalten wir umgekehrt auf dem Wege nach rechts noch ein Bild, wenn $\varphi > \alpha - \gamma$ ist, links noch eines, wenn $\varphi > \gamma$ ist. Man sieht hieraus, dass es für die Anzahl der Bilder gleichgültig ist, ob p gerade oder ungerade ist, und ob γ oder $(\alpha - \gamma)$ der grössere Winkel ist; denn es kommt nur darauf an, ob φ grösser oder kleiner als jeder dieser beiden Winkel ist, oder drittens zwischen beiden liegt. Für die Lage der Bilder sind diese Fragen von Wert, weshalb wir später noch darauf zurückkommen müssen.

So lange wir es unbestimmt lassen können, welche von beiden Grössen γ oder $(\alpha - \gamma)$ die kleinere ist, werden wir uns erlauben, die kleinere, um von ihr in Kürze reden zu können, mit λ zu bezeichnen.

Wir müssen 3 Fälle unterscheiden:

1) $0 < \varphi < \gamma$ und $0 < \varphi < \alpha - \gamma$, kurz $0 < \varphi < \lambda$

wir können dann nach keiner Seite hin ein weiteres Bild construiren, sodass die Bilderzahl, die wir mit n bezeichnen wollen, $= 2p$ bleibt

$$n = 2p$$

Die Bogenabstände der letzten Bilder beider Serien von den ihnen entsprechenden Spiegeln (der rechten Serie entspricht der Spiegel OS_1, der linken OS_2) sind:

Digitized by Google

$$\varphi+\gamma \quad \text{und} \quad \varphi+(\alpha-\gamma)$$

Da beide kleiner als α sind, so liegen diese Bilder beide im Raum $S_1'OS_3'$ und fallen zusammen, wenn

$$(\varphi+\gamma)+(\varphi+\alpha-\gamma)=\alpha \quad \text{oder} \quad \varphi=0$$

ist. φ hängt nicht von γ ab; für $\varphi=0$ hat also ein Zusammenfallen der Bilder statt für jeden Wert von γ. Handelt es sich also auch um die Spiegelung eines ausgedehnten Gegenstandes, für dessen Punkte ja γ variirt, so nimmt die Anzahl der Bilder um eins ab' wenn $\varphi=0$ sich ergiebt. Die vorletzten Bilder beider Serien fallen nicht in den Raum $S_1'OS_2'$. Wir haben also für

$$\varphi=0 \quad n=2p-1 \qquad \left.\begin{matrix}0<\varphi<\gamma\\ 0<\varphi<\alpha-\gamma\end{matrix}\right\} n=2p$$

2) $$\lambda<\varphi<\alpha-\lambda$$

φ liegt zwischen den Werten γ und $(\alpha-\gamma)$.

Nun kann noch ein Bild in der Serie gezeichnet werden, in welcher das neu zu construirende Bild von dem zuletzt construirten den Abstand 2λ hat (für $\gamma<\alpha-\gamma$ oder $\gamma=\lambda$ ist es bei geradzahligem p die rechte, bei ungeradzahligem p die linke Serie; für $(\alpha-\gamma)<\gamma$ oder $\alpha-\gamma=\lambda$ ist es bei geradzahligem p die linke, bei ungeradzahligem p die rechte Serie). In der andern Serie kann kein Bild mehr construirt werden. Das letzte Bild der Serie, welche $(p+1)$ Bilder umfasst, und das vorletzte derselben haben vom zugehörigen Spiegel die respectiven Bogenabstände $(\varphi-\lambda)$ und $(\varphi+\lambda)$, Beide sind kleiner als α; beide Bilder liegen im Raum $S_1'QS_2'$. Zusammenfallen können sie nicht, da es wenig Sinn hat, ihren Abstand 2γ resp. $2(\alpha-\gamma)$ verschwinden zu lassen; dies hiesse den Gegenstand in die spiegelnde Fläche legen. Das letzte Bild der andern Serie hat vom zugehörigen Spiegel den Bogenabstand $(\varphi+\alpha-\lambda)$. Dieser ist $>\alpha$. Er wird $=\alpha$ in dem Grenzfalle $\varphi=\lambda$. Da dann zugleich der Bogenabstand $(\varphi-\lambda)$ des letzten Bilds der erstgenannten Serie vom zugehörigen verschwindet, so fallen hier an der einen Grenze des Gebietes zwei Bilder zusammen.

Dieses Zusammenfallen ist aber grundverschieden von demjenigen, welches wir im Falle $\varphi=0$ constatirten Dort trat ein Zusammenfallen für jeden beliebigen Wert von γ ein. Jetzt aber tritt es nur für Punkte ein, deren γ resp. $(\alpha-\gamma)=\varphi$ ist, wo φ von γ völlig unabhängig ist. Nehmen wir also einen ausgedehnten Gegenstand an, der Punkte enthält, deren $\lambda<\varphi$, und solche, deren $\lambda>\varphi$ ist, so erhalten wir von den erstgenannten Punkten $2p+1$, von den an-

Digitized by Google

dern $2p$ Bilder, vom ganzen Gegenstand also $2p + \frac{1}{2}$ Bilder, wo $\frac{1}{2}$ in der volkstümlichen Auffassung zu nehmen ist, in der es den einen von zwei Teilen bedeutet. Für einen mathematischen Punkt, dessen $\lambda = \varphi$ ist, haben wir also $2p$ oder $2p+1$ Bilder anzunehmen, jenachdem wir die Lage $\lambda = \varphi$ von der Seite der grösseren λ oder von der Seite der kleineren λ erreichten. Die allgemeine Formel, welche wir später aufstellen werden, liefert uns für den Fall $\varphi = \lambda$ den Mittelwert $n = 2p + \frac{1}{2}$. Wir wissen nunmehr, wie dies zu verstehen ist. Unser Resultat ist:

$$\lambda < \varphi < \alpha - \lambda : n = 2p + 1 \quad \varphi = \lambda : n = 2p + \tfrac{1}{2}$$

3) $$\alpha - \gamma < \varphi < \alpha \quad \text{und} \quad \gamma < \varphi < \alpha, \quad \text{kurz} \quad \alpha - \lambda < \varphi$$

In beiden Serien lässt sich noch ein Bild construiren, sodass]

$$n = 2p + 2$$

wird. Die Bogenabstände dieser Bilder von ihren zugehörigen Spiegeln sind: $\varphi - \gamma$ und $\varphi - (\alpha - \gamma)$; beide kleiner als α. Diese beiden Bilder fallen also in den Raum $S_1'OS_2'$. Zusammenfallen können sie nicht; dazu müsste

$$\varphi - \gamma + \varphi - (\alpha - \gamma) = \alpha \quad \text{oder} \quad \varphi = \alpha$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht. Die beiden vorletzten Bilder der Serien besitzen von ihren zugehörigen Spiegeln die Bogenabstände $\varphi + \gamma$ und $\varphi + (\alpha - \gamma)$, beide grösser als α. Im Grenzfalle $\varphi = \lambda$ aber, wird der eine $= \alpha$; zugleich wird der Bogenabstand $\varphi - (\alpha - \lambda) = 0$. Es fallen also wieder an einer Grenze des Gebietes $S_1'OS_2'$ zwei Bilder in der früher geschilderten Weise punktweise zusammen. Von einem ausgedehnten Gegenstand erhalten wir dann analog, wie im Falle 2 es gezeigt wurde, $2p + 1 + \frac{1}{2}$ Bilder. Es kann sich nun auch ereignen, dass $\varphi = \alpha - \gamma$ wird, während zugleich $\alpha - \gamma = \gamma$ ist. In diesem Falle tritt das geschilderte punktweise Zusammenfallen an beiden Grenzen des Sectors $S_1'OS_2'$ auf, wir erhalten noch ein halbes Bild weniger als im vorigen Specialfalle, sodass $n = 2p + \frac{2}{2}$ zu setzen ist. Die beiden ungleichen Hälften, welche hier auftreten, geben zwar zusammen ein Bild des ganzen Gegenstandes, liegen aber an getrennten Stellen des Raumes.

Wir stellen nun unsere Resultate in einer Tabelle zusammen, indem wir zu jedem Falle ein praktisches Beispiel fügen.

Die Grössen p und φ sind aus der Gleichung

$$180^0 = p \cdot \alpha + \varphi$$

Digitized by Google

wo p ganze Zahl und $0 \leqq \varphi < \alpha$ ist, zu bestimmen. Ferner ist vorausgesetzt: λ die kleinere der beiden Grössen γ und $(\alpha-\gamma)$.

Werte für φ	Werte für n	Beispiele
$\varphi=0$	$n=2p-1$	$\alpha=60^0$, γ beliebig, $p=3$, $n=5$, $\varphi=0^0$
$0<\varphi<\lambda$	$n=2p$	$\alpha=85^0$, $\gamma=25^0$, $p=2$, $n=4$, $\varphi=10^0$
$\varphi=\lambda$	$n=2p+\frac{1}{2}$	$\alpha=55^0$, $\gamma=15^0$, $p=3$, $n=6+\frac{1}{2}$, $\varphi=15^0$
$\lambda<\varphi<\alpha-\lambda$	$n=2p+1$	$\alpha=40^0$, $\gamma=5^0$, $p=4$, $n=9$, $\varphi=20^0$
$\varphi=\alpha-\lambda$	$n=2p+1+\frac{1}{2}$	$\alpha=100^0$, $\gamma=20^0$, $p=1$, $n=3+\frac{1}{2}$, $\varphi=80^0$
$\varphi=\alpha/2=\gamma$	$n=2p+\frac{3}{2}$	$\alpha=72^0$, $\gamma=36^0$, $p=2$, $n=4+\frac{3}{2}$, $\varphi=36^0$
$\alpha-\lambda<\varphi<\alpha$	$n=2p+2$	$\alpha=100^0$, $\gamma=40^0$, $p=1$, $n=4$, $\varphi=80^0$

Eine einheitliche Formel, welche alle diese Fälle umfasst, ist die folgende:

$$n = 2p + \tfrac{1}{2}\{2-[\gamma-\varphi]-[\alpha-\gamma-\varphi]\} + [\varphi]-1$$

wo p und φ aus der Gleichung

$$180^0 = p\,.\,\alpha + \varphi \quad \left(p \text{ ganze Zahl und } 0 \leqq \varphi < \alpha\right)$$

zu berechnen sind, und wo das Symbol $[x]$ das Vorzeichen der in der Klammer stehenden Grösse bedeutet, also

$$[x] = +1 \quad \text{falls} \quad x > 0; \quad [x] = -1 \quad \text{falls} \quad x < 0$$

Ist $x=0$, so soll auch $[x]=0$ angenommen werden.

Der letzte Teil der Formel $[\varphi]-1$ ist also stets $=0$, ausser in dem Specialfall $\varphi=0$, wo er $=-1$ wird. Durch diesen Zusatz genügt die Formel auch für den Fall, wo durch das Zusamenfallen zweier Bilder die Bilderanzahl um eine Einheit abnimmt.

Nach einer von K. Mack [1]) und früher von Schubert [2]) angegebenen Regel bestimmt man die Bilderanzahl, indem man diejenigen beiden ganzen Zahlen k und k' addirt, welche um weniger als eine Einheit grösser sind als die resp. Quotienten: $\frac{180^0-\lambda}{\alpha}$ und $\frac{180^0-(\alpha-\lambda)}{\alpha}$. Dass diese Regel in den drei Hauptfällen dieselben

1) a. a. O. S. 220. 2) a. a. O. S. 1.

Resultate wie meine Formel ergiebt, erkennt man leicht; denn, is $180^0 = p.\alpha + \varphi$ und bedeuten ε_1 und ε_2 positive Brüche, so ist:

Für $\varphi < \lambda$: $\begin{matrix} 180^0 - \lambda = (p-1)\alpha + \varepsilon_1\alpha \\ 180^0 - (\alpha - \lambda) = (p-1)\alpha + \varepsilon_2\alpha \end{matrix}$

also: $k = p \quad k_1 = p \quad n = 2p$

III. Für $\lambda < \varphi < \alpha - \lambda$: $\begin{matrix} 180^0 - \lambda = p.\alpha + \varepsilon_1\alpha \\ 180^0 - (\alpha - \lambda) = (p-1)\alpha + \varepsilon_2\alpha \end{matrix}$

also: $k = p + 1 \quad k_1 = p \quad n = 2p + 1$

III. Für $\alpha - \lambda < \varphi < \alpha$: $\begin{matrix} 180^0 - \lambda = p.\alpha + \varepsilon_1\alpha \\ 180^0 - (\alpha - \lambda) = p.\alpha + \varepsilon_2\alpha \end{matrix}$

also: $k = p + 1 \quad k_1 = p + 1 \quad n = 2p + 2$

was mit unserer Formel übereinstimmt. In den Uebergangsfällen $\varphi = \lambda$ und $\varphi = \alpha - \lambda$ liefert die Mack'sche Regel die halben Bilder, die meine Formel giebt, nicht, was ja, wie wir gezeigt haben, auch statthaft ist, wenn der gespiegelte Gegenstand ein mathematischer Punkt ist. Unsere Formel, in der es nur auf das Vorzeichen der Grössen $(\gamma - \varphi)$ und $(\alpha - \gamma - \varphi)$ ankommt, bestimmt uns nun direct drei Intervalle für γ, sodass innerhalb eines jeden die Bilderanzahl constant ist. Somit können wir auch für einen ausgedehnten Gegenstand die Anzahl der Bilder leicht bestimmen, wenn wir nur wissen, in welchem, resp. in welchen der Intervalle für γ er sich befindet. Ohne die Uebergangsfälle zu berücksichtigen, betrachten wir die drei Hauptfälle:

Bestimmung über φ	d. h.	Intervall für γ	Bilderzahl
		I.	
$\varphi < \gamma \quad \varphi < \alpha - \gamma$	d. h.	$\varphi < \gamma < \alpha - \varphi$	$n = 2p$
		II.	
$\gamma < \varphi < \alpha - \gamma$ resp. $\alpha - \gamma < \varphi < \gamma$	d. h.	$\begin{matrix}\gamma < \varphi \\ \gamma < \alpha - \varphi\end{matrix}$ resp. $\begin{matrix}\gamma > \varphi \\ \gamma > \alpha - \varphi\end{matrix}$	$n = 2p + 1$
		III.	
$\varphi > \gamma \quad \varphi > \alpha - \gamma$	d. h.	$\alpha - \varphi < \gamma < \varphi$	$n = 2p + 2$

Diese Tabelle, in Worte umgesetzt, ist der Fundamentalsatz, der uns die Theorie des Winkelspiegels klar vor Augen legt: Ist α der Winkel zwischen zwei Planspiegeln, so bestimme man aus der Gleichung

$$180^0 = p.\alpha + \varphi$$

wo p ganze Zahl und $0 \leq \alpha < \varphi$ ist, die Zahl p und den Winkel

φ; diesen trage man auf beiden Schenkeln des Winkels α nach innen zu ab. Dann wird dadurch α in drei Sectoren zerlegt. Liegt nun ein ausgedehnter Gegenstand in einem der beiden Randsectoren, so entstehen von ihm $2p+1$ Bilder, liegt er im mittleren Sector, so entstehen $2p+2$ resp. $2p$ Bilder, jenachdem $\varphi > \frac{\alpha}{2}$ oder $\varphi < \frac{\alpha}{2}$ ist, d h. jenachdem die abgetragenen Winkel φ übereinandergreifen oder nicht. Hierbei drängt sich uns die Betrachtung zweier interessanten Grenzfälle auf:

Der erste ist derjenige, bei welchem der mittlere Sector so gross ist, dass die beiden Randsectoren verschwinden; dies ist der Fall: $\varphi = 0$. Dann kann man also den Gegenstand im ganzen Winkelraum α an jeden beliebigen Ort legen, immer erhält man $2p$ Bilder. Indessen haben wir schon früher S. 6 gezeigt, dass im Fall $\varphi = 0$ zwei Bilder vollständig zur Deckung kommen, man erhält also $2p-1$ Bilder. Zufolge der Gleichung:

$$180^0 = p.\alpha + \varphi$$

bedeutet der Fall $\varphi = 0$ soviel als:

$$360^0 = 2p\alpha$$

Ist also α ein geradzahliger Teil des Kreisumfangs, so ist die Anzahl der entstehenden Bilder um 1 kleiner als die Teilzahl unabhängig von der Lage des gespiegelten Gegenstandes.

Der andere Specialfall ist der, bei welchem die Randsectoren derartig gewachsen sind, dass der mittlere Sector verschwindet. Dies ist der Fall $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Dann mag der Gegenstand im Winkelraum α an jeder beliebigen Stelle liegen, stets erzeugt er $2p+1$ Bilder; $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ bedeutet zufolge der Gleichung

$$180^0 = p.\alpha + \varphi$$

soviel als:

$$360^0 = (2p+1)\alpha$$

Ist also α ein ungeradzahliger Teil vom Kreisumfang, so ist die Anzahl der entstehenden Bilder gleich der Teilzahl unabhängig von der Lage des Gegenstandes.

Abgesehen von diesen beiden Grenzfällen sind im Winkelraum α für die Lage des Gegenstandes hinsichtlich der Anzahl geometrisch construirbarer Bilder stets drei Sectoren zu unterscheiden.

Digitized by Google

II.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Anzahl von Bildern, welche von einem bestimmten Orte des Sectors S_1OS_2 aus gesehen werden können. Alle Bilder, welche nicht in den Raum $S_1'OS_2'$ fallen, werden von jedem Punkte im Winkelraum S_1OS_2 erblickt; denn die gerade Verbindungsstrecke jedes solchen Bildes mit dem im Raume S_1OS_2 beliebig angenommenen Augpunkte schneidet stets den zum betreffenden Bilde gehörigen Spiegel, d. h. den Spiegel, an welchem die Strahlen, die vom betreffenden Bilde herzukommen scheinen, zuletzt reflectirt werden.

Besondere Berücksichtigung beanspruchen also nur die im Sector $S_1'OS_2'$ gelegenen Bilder. Diese sind, wie in den früher unterschiedenen Fällen:

1) $0<\varphi<\gamma$	2) $\lambda<\varphi<\alpha-\lambda$	3) $\alpha-\gamma<\varphi<\alpha$
$0<\varphi<\alpha-\gamma$	λ das kleinere von γ und $\overline{\alpha-\gamma}$	$\gamma<\varphi<\alpha$

einzeln gezeigt wurde, nie mehr als zwei Bilder.

Coincidiren diese beiden, also im Fall $\varphi=0$, so sind auch sie im ganzen Winkelraum S_1OS_2 sichtbar, da ja dann vom Coincidenzpunkte sowohl solche Strahlen her zu kommen scheinen, die zuletzt an OS_1 reflectirt wurden, als auch solche, die zuletzt an OS_2 reflectirt sind. Dieser Fall $\varphi=0$, wo α ein geradzahliger Teil des Kreisumfangs ist, ist der einzige, in dem das Auge von jedem Orte aus stets die gleiche Anzahl von Bildern erblickt.

Coincidiren die Bilder im Raume $S_1'OS_2'$ nicht, so teilt sich für die Lage des Augpunktes der Winkelraum S_1OS_2 nach der Anzahl der sichtbaren Bilder in drei Sectoren, und zwar ganz in der gleichen Weise, wie der Raum $S_2'OS_1'$ durch die beiden in ihm liegenden Bilder in drei Teile zerlegt wird. Die drei Sectoren von S_1OS_2 sind in der Figur mit *I*, *II*, *III* bezeichnet. Messbar sind diese Sectoren durch den Winkel Θ, den die durch den Augpunkt und die Spiegelkante gelegte Ebene mit dem Spiegel OS_1 bildet. Die Grösse der Sectoren variirt mit α und γ, und um zu bestimmen, wieviel Bilder das Auge sieht, wenn es sich in einem Sector befindet, müssen wir wissen ob p gerade oder ungerade ist, und ob γ oder $(\alpha-\gamma)$ die kleinere Grösse ist. Wir unterscheiden deshalb folgende Fälle:

I. $0<\varphi<\gamma$	II. $\lambda<\varphi<\alpha-\lambda$	III. $\alpha-\gamma<\varphi<\alpha$
$0<\varphi<\alpha.\gamma$		$\gamma<\varphi<\alpha$
Ia. p gerade	IIa. p gerade	IIIa. p gerade
	1) $\lambda=\gamma$ 2) $\lambda=\alpha-\gamma$	

Digitized by Google

Ib. p ungerade IIb. p ungerade IIIb. p ungerade
1) $\lambda = \gamma$ 2) $\lambda = \alpha - \gamma$

Ia. $0 < \varphi < \gamma$; p gerade; $n = 2p$
$0 < \varphi < \alpha - \gamma$

In den Raum $S_1'OS_2'$ fallen die letzten Bilder beider Serien, das letzte der rechten Serie hat von S_1' den Bogenabstand $\varphi + \gamma$, ist also im Sector $0 < \Theta < \varphi + \gamma$ sichtbar. Das letzte Bild der linken Serie hat von S_2 den Bogenabstand $\varphi + \alpha - \gamma$. Es ist also im Sector $\alpha > \Theta > \alpha - (\varphi + \alpha - \gamma)$ zu sehen. Diese beiden Randsectoren greifen übereinander, da $\varphi + \gamma > \gamma - \varphi$ ist. In dem mittleren Sector II, welcher beiden gemeinschaftlich ist, sind also alle Bilder sichtbar. Wir haben also das Resultat:

Im Sector		s = Anzahl der sichtbaren Bilder
$0 < \Theta < \gamma - \varphi$	:	$n - 1 = 2p - 1$
$\gamma - \varphi < \Theta < \varphi + \gamma$	:	$n = 2p$
$\varphi + \gamma < \Theta < \alpha$	:	$n - 1 = 2p - 1$

Beispiel hiezu: $\alpha = 85^0$ $\gamma = 25^0$ $p = 2$ $n = 4$ $\varphi = 10^0$

Die Anzahl der sichtbaren Bilder werde mit s bezeichnet:

$0 < \Theta < 15^0$ $s = 3$ $15^0 < \Theta < 35^0$ $s = 4$ $35^0 < \Theta < 85^0$ $s = 3$

Ib. $0 < \varphi < \gamma$ p ungerade $n = 2p$
$0 < \varphi < \alpha - \gamma$

In $S_1'OS_2'$ liegen die letzten Bilder beider Serien. Das letzte der rechten Serie hat von S_1' den Bogenabstand $\varphi + (\alpha - \gamma)$, ist also im Sector $0 < \Theta < \varphi + \alpha - \gamma$ sichtbar. Das letzte der rechten Serie hat von S_2' den Bogenabstand $\varphi + \gamma$, ist also im Sector $\alpha < \Theta < \alpha - (\varphi + \gamma)$ zu sehen. Die beiden Randsectoren greifen wieder übereinander, da $\varphi + \alpha - \gamma > \alpha - (\varphi + \gamma)$. Im mittleren Sector sind wieder alle Bilder sichtbar, also:

Auge im Sector	s
$0 < \Theta < \alpha - (\varphi + \gamma)$	$n - 1 = 2p - 1$
$\alpha - (\varphi + \gamma) < \Theta < \varphi + \alpha - \gamma$	$n = 2p$
$\varphi + \alpha - \gamma < \Theta < \alpha$	$n - 1 = 2p - 1$

Beispiel hiezu: $\alpha = 55^0$ $\gamma = 25^0$ $p = 3$ $n = 6$ $\varphi = 15^0$

$0 < \Theta < 15^0$ $s = 5$; $15^0 < \Theta < 45^0$ $s = 6$
$45^0 < \Theta < 55^0$ $s = 5$

Digitized by Google

IIa. $\lambda < \varphi < \alpha - \lambda$ p gerade $n = 2p + 1$

In den Raum $S_1'OS_2'$ fallen die beiden letzten Bilder der Serie, in welcher $(p+1)$ Bilder construirbar sind. Dies ist bei geradzahligem p für $\gamma = \lambda$ die rechte, für $\alpha - \gamma = \lambda$ die linke.

Im Fall $\gamma = \lambda$ hat das letzte Bild der rechten Serie von S_1' den Bogenabstand $(\varphi - \gamma)$, ist also im Sector $0 < \Theta < \varphi - \gamma$ zu sehen. Das vorletzte hat von S_1' den Bogenabstand $(\varphi + \gamma)$, ist also vom Raum $0 < \Theta < \varphi + \gamma$ aus sichtbar. Im restirenden Sector $\varphi + \gamma < \Theta < \alpha$ sieht man keines von beiden Bildern, im gemeinschaftlichen Sector $0 < \Theta < \varphi - \gamma$ beide. Also ist das Resultat:

Im Sector	s
$0 < \Theta < \varphi - \gamma$	$n = 2p + 1$
$\varphi - \gamma < \Theta < \varphi + \gamma$	$n - 1 = 2p$
$\varphi + \gamma < \Theta < \alpha$	$n - 2 = 2p - 1$

Beispiel hiezu: $\alpha = 40^0$ $\gamma = 5^0$ $p = 4$ $n = 9$ $\varphi = 20^0$

$$0^0 < \Theta < 15^0 \quad s = 9; \qquad 15^0 < \Theta < 25^0 \quad s = 8$$
$$25^0 < \Theta < 40^0 \quad s = 7$$

Im Fall $\alpha - \gamma = \lambda$ hat das letzte Bild der linken Serie von S_2' den Bogenabstand $\varphi - (\alpha - \gamma)$, ist also im Sector $\alpha - [\varphi - (\alpha - \gamma)] < \Theta < \alpha$ sichtbar. Das vorletzte hat von S_2' den Bogenabstand $\varphi + (\alpha - \gamma)$, ist also im Sector $\alpha - (\varphi + \alpha - \gamma) < \Theta < \alpha$ sichtbar. Im restirenden Sector $0 < \Theta < \gamma - \varphi$ ist keins von beiden sichtbar, im gemeinschaftlichen Sector sind beide sichtbar; wir haben also das Resultat:

Im Sector	s
$0 < \Theta < \gamma - \varphi$	$n - 2 = 2p - 1$
$\gamma - \varphi < \Theta < 2\alpha - (\varphi + \gamma)$	$n - 1 = 2p$
$2\alpha - (\varphi + \gamma) < \Theta < \alpha$	$n = 2p + 1$

Beispiel: $\alpha = 40^0$ $\gamma = 35^0$ $p = 4$ $n = 9$ $\varphi = 20^0$

$$0^0 < \Theta < 15^0 \quad s = 7; \qquad 15^0 < \Theta < 25^0 \quad s = 8$$
$$25^0 < \Theta < 40^0 \quad s = 9$$

IIb. $\lambda < \varphi < \alpha - \lambda$ p ungerade $n = 2p + 1$

In $S_1'OS_2'$ liegen die beiden letzten Bilder der Serie, zu welcher $p+1$ Bilder gehören; bei ungeradzahligem p ist dies für den Fall $\gamma = \lambda$ die linke, für den Fall $\alpha - \gamma = \lambda$ die rechte.

Digitized by Google

Im Fall $\gamma = \lambda$ hat das letzte Bild der linken Serie von S_2' den Bogenabstand $\varphi - \gamma$, ist also vom Sector $\alpha - (\varphi - \gamma) < \Theta < \alpha$ aus zu sehen. Das vorletzte Bild hat von S_2' den Bogenabstand $(\varphi + \gamma)$, ist also im Raum $\alpha - (\varphi + \gamma) < \Theta < \alpha$ sichtbar. Im restirenden Sector $0 < \Theta < \alpha - (\varphi + \gamma)$ ist keins von beiden Bildern, im gemeinschaftlichen Sector $\alpha - (\varphi - \gamma) < \Theta < \alpha$ sind beide zu sehen. Somit ist:

Im Sector	s
$0 < \Theta < \alpha - (\varphi + \gamma)$	$n - 2 = 2p - 1$
$\alpha - (\varphi + \gamma) < \Theta < \alpha - (\varphi - \gamma)$	$n - 1 = 2p$
$\alpha - (\varphi - \gamma) < \Theta < \alpha$	$n = 2p + 1$

Beispiel: $\alpha = 100^0$ $\gamma = 10^0$ $p = 1$ $n = 8$ $\varphi = 80^0$

$$0 < \Theta < 10^0 \quad s = 1; \qquad 10^0 < \Theta < 30^0 \quad s = 2$$
$$30^0 < \Theta < 100^0 \quad s = 3$$

Im Fall $\alpha - \gamma = \lambda$ hat das letzte Bild der rechten Serie von S_1' den Bogenabstand $\varphi - (\alpha - \gamma)$, ist also im Sector $0 < \Theta < \varphi - (\alpha - \gamma)$ sichtbar. Das vorletzte Bild hat von S_1' den Bogenabstand $\varphi + \alpha - \gamma$, ist also im Raume $0 < \Theta < \varphi + \alpha - \gamma$ zu sehen. Im restirenden Sector $\varphi + \alpha - \gamma < \Theta < \alpha$ sieht man keins von beiden, im gemeinschaftlichen Sector $0 < \Theta < \varphi - (\alpha - \gamma)$ beide Bilder. Wir erhalten also:

Im Sector	s
$0 < \Theta < \varphi - (\alpha - \gamma)$	$n = 2p + 1$
$\varphi - (\alpha - \gamma) < \Theta < \varphi + (\alpha - \gamma)$	$n - 1 = 2p$
$\varphi + (\alpha - \gamma) < \Theta < \alpha$	$n - 2 = 2p - 1$

Beispiel: $\alpha = 100^0$ $\gamma = 90^0$ $p = 1$ $n = 3$ $\varphi = 80^0$

$$0 < \Theta < 10^0 \quad s = 3; \qquad 10^0 < \Theta < 30^0 \quad s = 2$$
$$30^0 < \Theta < 100^0 \quad s = 1$$

In allen Fällen II. sieht das im mittleren Sector befindliche Auge $n - 1 = 2p$ Bilder, im einen Randsector $n - 2 = 2p - 1$, im andern $n = 2p + 1$ Bilder.

IIIa. $\alpha - \gamma < \varphi < \alpha$ p gerade $n = 2p + 2$

$$\gamma < \varphi < \alpha$$

In $S_1'OS_2'$ fallen die letzten Bilder beider Serien. Das letzte der rechten hat von S_1' den Bogenabstand $(\varphi - \gamma)$, ist also vom

Digitized by Google

Sector $0 < \Theta < \varphi - \gamma$ aus sichtbar. Das letzte Bild der linken Serie hat von S_2' den Bogenabstand $\varphi - (\alpha - \gamma)$, ist also vom Raume $\alpha - [\varphi - (\alpha - \gamma)] < \Theta < \alpha$ aus zu sehen. Beide Sectoren liegen völlig getrennt von einander, da $\varphi - \gamma < 2\alpha - \varphi - \gamma$ ist. Im mittleren Sector sieht man also keins von beiden Bildern, so dass:

Im Sector	s
$0 < \Theta < \varphi - \gamma$	$n - 1 = 2p + 1$
$\varphi - \gamma < \Theta < 2\alpha - \varphi - \gamma$	$n - 2 = 2p$
$2\alpha - \varphi - \gamma < \Theta < \alpha$	$n - 1 = 2p + 1$

Beispiel: $\alpha = 65^0$ $\gamma = 30^0$ $p = 2$ $n = 6$ $\varphi = 50^0$

$$0^0 < \Theta < 20^0 \quad s = 5; \qquad 20^0 < \Theta < 50^0 \quad s = 4$$
$$50^0 < \Theta < 65^0 \quad s = 5$$

IIIb. $\alpha - \gamma < \varphi < \alpha$ p ungerade $n = 2p + 2$

In $S_1'OS_2'$ liegen die letzten Bilder beider Serien. Das letzte der rechten hat von S_1' den Bogenabstand $\varphi - (\alpha - \gamma)$, ist also vom Sector $0 < \Theta < \varphi - (\alpha - \gamma)$ aus sichtbar. Das letzte Bild der linken Serie hat von S_2' den Bogenabstand $\varphi - \gamma$, ist also vom Raume $\alpha > \Theta > \alpha - (\varphi - \gamma)$ aus zu sehen. Beide Randsectoren liegen völlig getrennt, da $\varphi - (\alpha - \gamma) < \alpha - (\varphi - \gamma)$. Im mittleren Sector sieht man also keins von beiden Bildern, so dass:

Im Sector	s
$0 < \Theta < \varphi - (\alpha - \gamma)$	$n - 1 = 2p + 1$
$\varphi - (\alpha - \gamma) < \Theta < \alpha - (\varphi - \gamma)$	$n - 2 = 2p$
$\alpha - (\varphi - \gamma) < \Theta < \alpha$	$n - 1 = 2p + 1$

Beispiel hiezu: $\alpha = 100^0$ $\gamma = 40^0$ $p = 1$ $n = 4$ $\varphi = 80^0$

$$0 < \Theta < 20^0 \quad s = 3; \qquad 20^0 < \Theta < 60^0 \quad s = 2$$
$$60^0 < \Theta < 100^0 \quad s = 3$$

Wir stellen zum Schlusse auch die Resultate dieses zweiten Teils der Arbeit in einer Tabelle zusammen; dabei stehen in der ersten Colonne Angaben über φ, das aus der Gleichung

$$180^0 = \alpha . p + \varphi$$

bestimmt wird, wo p ganze Zahl und $0 \leqq \varphi < \alpha$ ist.

Die zweite Colonne giebt die Anzahl aller entstehenden Bilder. In den drei letzten Colonnen stehen die Anzahlen der Bilder, welche

Digitized by Google

das Auge sieht, wenn es sich bezugsweise in den Sectoren I, II oder III befindet.

Werte für φ	n	s in I	s in II	s in III
$0 < \varphi < \gamma$ $0 < \varphi < \alpha - \gamma$	$2p$	$2p - 1$	$2p$	$2p - 1$
$\gamma < \varphi < \alpha - \gamma$ (p gerade) oder $\alpha - \gamma < \varphi < \gamma$ (p ungerade)	$2p + 1$	$2p + 1$	$2p$	$2p - 1$
$\gamma < \varphi < \alpha - \gamma$ (p ungerade) oder $\alpha - \gamma < \varphi < \gamma$ (p gerade)	$2p + 1$	$2p - 1$	$2p$	$2p + 1$
$\alpha - \gamma < \varphi < \alpha$ $\gamma < \varphi < \alpha$	$2p + 2$	$2p + 1$	$2p$	$2p + 1$

Diese Tabelle lässt uns zwei merkwürdige Sätze erkennen, welchen wir, um deutlicher zu sein, einen schon früher gefundenen vorausschicken wollen:

Satz I.: Von einem Gegenstand, der sich zwischen zwei geneigten Planspiegeln befindet, erhält man zwei Bilder, die in den Raum fallen, welcher hinter jedem von beiden Spiegeln liegt. Diese fallen nur dann zusammen, wenn der Winkel zwischen den Spiegeln ein geradzahliger Teil des Kreisumfanges ist.

Satz II.: Teilt man den Winkelraum zwischen zwei Planspiegeln in derselben Weise in drei Sectoren, wie der hinter jedem von beiden Spiegeln liegende Raum durch die beiden in ihn fallenden Bilder eines Gegenstandes in drei Sectoren zerlegt wird, so erblickt das Auge vom mittleren Sector aus stets eine gerade Anzahl von Bildern des Gegenstandes, von den beiden Randsectoren aus sieht es eine ungerade Zahl von Bildern; die Lage des Gegenstandes und die Grösse des Winkels zwischen den Spiegeln ist dabei gleichgültig, sie bestimmt nur die Grösse der Sectoren.

Satz III.: Die Anzahl der Bilder, die ein im mittleren Sector befindliches Auge sieht, hängt nur von dem Winkel α ab, den beide Spiegel miteinander bilden. Genügt p der Gleichung:

$$180^0 = \alpha . p + \varphi$$

wo p ganze Zahl und $0 \leqq \varphi < \alpha$ ist, so erblickt man vom mitt-

leren Sector aus $2p$ Bilder, wo auch immer der Gegenstand zwischen beiden Spiegeln liegen mag.

Dieser mittlere Sector verschwindet nur in dem Specialfalle, wo α ein geradzahliger Teil von 360^0 ist; alsdann sieht von jedem zwischen den Spiegeln gelegene Orte aus das Auge $2p-1$ Bilder.

Zum Schlusse möge noch eine interessante specielle Combination der Resultate des ersten und zweiten Teiles angefügt werden:

Erhält man von einem Gegenstand, der sich zwischen zwei Planspiegeln befindet, die den Winkel α miteinander bilden, stets die gleiche Anzahl geometrisch construirbarer Bilder, man mag den Gegenstand im Winkelraum α verschieben, wie man will, so ist diese Bilderanzahl stets eine ungerade und $\alpha = \frac{360^0}{\nu}$, wo ν eine ganze Zahl ist. Bewegt man nun auch das Auge, und erblickt auch von jedem Orte im Sector α sämtliche Bilder, so ist ν eine gerade Zahl, und es sind $\nu-1$ Bilder. Sieht man dagegen nicht von jedem Orte aus die sämtlichen Bilder, so ist ν eine ungerade Zahl, und es sind ν Bilder.

Digitized by Google

II.

Ueber das allgemeine circuläre Polarsystem.

Von

Theodor Meyer.

In der Ebene sei M ein fester Punkt und jedem Punkte P werde diejenige Gerade p zugeordnet, welche senkrecht steht zu der Geraden $\overline{PM}$ und diese in einem Punkte Q so schneidet, dass das Product $PM \,.\, MQ$ einen constanten Wert a^2 hat. Errichtet man dann unter der Voraussetzung, dass das Product positiv ist, M also zwischen P und Q liegt, in dem Punkte M die Normale $MO = a$ zur Ebene, denn ist wegen $MO^2 = PM \,.\, MQ$ der Strahl $\overline{OP}$ normal zu der Ebene $\overline{Op}$. Der Strahlenbündel, welcher aus das ebene System projicirt, ist also ein orthogonaler, und da ein solcher polare Eigenschaften hat, so gilt dies auch von seinem Schnitte, dem ebenen System. Ist hingegen das Product $PM \,.\, MQ$ negativ, teilt also M die Strecke PQ äusserlich, dann sind P und p Pol und Polare in Bezug auf einen Kreis, der M zum Mittelpunkt und a zum Radius hat. Wenn jenes constante Product, die Potenz des Systems, den Wert O hat, dann geht die zu $\overline{PM}$ normale Gerade p durch M selbst, die involutorische Beziehung zwischen P und p bleibt aber nach wie vor bestehen.

Welchen Wert also auch das constante Product besitzen mag, stets erhalten wir durch die angegebene Zuordnung von Punkten und Geraden ein ebenes Polarsystem. Dasselbe ist von besonderer Art und kann wegen der Tatsache, dass seine Ordnungscurve ein reeller oder imaginärer Kreis ist, ein circuläres genannt werden. Dieses Polarsystem ist allgemein bekannt, wird jedoch meistens nur unter

Digitized by Google

Voraussetzung einer reellen Ordnungscurve betrachtet. Von besonderer Wichtigkeit ist es für dte Curven II. O., insofern es die Möglichkeit liefert, zu den Sätzen über den Kreis andere, auf die Brennpunkte jener Curven bezügliche Sätze abzuleiten, und zwar lassen sich nicht nur Sätze über Lagenverhältnisse von Punkten und Geraden übertragen sondern auch solche, in denen Winkelgrössen und Producte von Strecken auftreten, was bei Zuhülfenahme eines allgemeinen Polarsystems nicht möglich ist. Diese Uebertragungen sind noch in dem Masse durchgeführt, als es die Einfachheit der Methode wünschenswert erscheinen lässt. Abgesehen von einzelnen Hinweisungen auf die Anwendbarkeit des Polarsystems hat nur Salmon in seiner analytischen Geometrie der Kegelschnitte, im 23sten Capitel, zu einer grösseren Anzahl von Kreissätzen die reciproken bezüglich der Brennpunkte von Curven II. O. gebildet, aber durchgehends unter der Annahme, dass die Ordnungscurve des Systems ein reeller Kreis ist. Setzt man aber ein allgemeines circuläres Polarsystem voraus, in welchem, wie wir gesehen haben, die Potenz des Sysems nicht nur negative, sondern auch positive Werte annehmen kann, dann lassen sich, namentlich über die Dreiecke, noch verschiedene allgemeingültige und zum Teil weniger bekannte Sätze aufstellen, die bei Zuhülfenahme eines circulären Polarsystems mit reeller Ordnungscurve nur für stumpfwinkelige Dreiecke sich aussprechen liessen. Dies werden wir in mehreren Fällen zur Genüge im Folgenden erkennen, wo nach einer kurzen Darlegung der Eigenschaften des allgemeinen circulären Polarsystems mit Hülfe desselben eine Reihe von geometrischen, besonders auf das Dreieck bezüglichen Sätzen abgeleitet werden soll.

Nach der eingangs dieser Arbeit angegebenen Erzeugungsmethode lässt sich die Haupteigenschaft des allgemeinen circulären Polarsystems wie folgt aussprechen:

„Die Normalen aus den Punkten des circulären Polarsystems „auf die entsprechenden Geraden gehen alle durch denselben Punkt „M und werden von ihm so geteilt, dass das Product der entstan- „denen Abschnitte einen constanten Wert hat. M ist der Träger „eines circulären Strahlensystems und zugleich der Pol der unend- „lich fernen Geraden, also der Mittelpunkt des Systems.“

Letztere Behauptung ergibt sich am einfachsten mit Benutzung des orthogonalen Strahlenbündels, wenn die Potenz des Systems positiv und mittelst des Kreises M, wenn die Potenz negativ ist. Auch wenn die Potenz null ist, hat die unendlich ferne Gerade, wie dann aber auch jede Gerade der Ebene, den Punkt M zum Pol.

Digitized by Google

Ist ABC irgend ein Poldreieck des Systems, dann liegt jede Höhe desselben auf einer Geraden, die durch einen Punkt des Systems normal zu seiner Polaren, also durch M geht. Mithin gilt der Satz:

„Alle Poldreiecke des circulären Polarsystems haben den Mittel-„punkt desselben zum gemeinsamen Höhenpunkt.“

Die Potenz des Systems ist gleich dem Producte der Höhenabschnitte eines Poldreiecks. Ist dieselbe positiv, so hat das System nur spitzwinklige Poldreiecke, ist sie negativ, so sind alle Poldreiecke stumpfwinklig, und hat die Potenz den Wert null, dann gibt es nur rechtwinklige Poldreiecke in dem Polarsystem.

Bewegt sich P auf einer Curve II. O. λ, dann durchläuft seine Polare p einen Strahlenbüschel II O. Wird dabei M von der Curve λ eingeschlossen, dann lassen sich von diesem Punkte keine reellen Tangenten an λ ziehen, folglich hat die von dem reciproken Strahlenbüschel II. O. eingehüllte Curve μ keine unendlich fernen Punkte, d. h sie ist eine Ellipse. Geht aber λ durch M, dann hat diese Curve in M eine Tangente und folglich μ einen unendlich fernen Punkt, d. h. letztere Curve ist eine Parabel. Liegt schliesslich M ausserhalb λ, dann hat diese Curve zwei in M sich schneidende Tangenten, folglich besitzt die reciproke Curve μ zwei unendlich ferne Punkte, sie ist eine Hyperbel. Ferner erkennt man leicht, dass jedem Kreise λ eine Curve μ entspricht, die den Punkt M zu einem Brennpunkt hat, und dass umgekehrt jede Curve μ mit M als Brennpunkt zur entsprechenden Curve einen Kreis λ hat. Ist M der Mittelpunkt von λ, dann ist er es auch von μ, beide Curven sind dann ähnlich und ähnlich gelegen.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob die Curven λ und μ zusammenfallen können, d. h. ob bei der Bewegung von P auf λ die Polare p auf derselben Curve als Tangente gleitet. Eine einfache geometrische Betrachtung lässt erkennen, dass dieser Fall bei negativem Werte der Potenz, also bei reeller Ordnungscurve, nur dann eintreten kann, wenn λ diese Curve selbst ist. Jedem Punkte von λ entspricht alsdann seine eigene Tangente. — Ist abee die Potenz des Systems positiv, die Ordnungscurve also imaginär, dann vereinigen sich alle diejenigen Curven λ mit ihren reciproken μ, welche aus O, dem Mittelpunkt des mit dem Polarsystem perspectivisch liegenden orthogonalen Strahlenbündels, durch rechtwinklige Rotationskegel projicirt werden, die einzigen Kegelflächen II. O., welche sich mit ihren reciproken ganz decken. Da nun durch O unendlich viele solcher Kegelflächen gehen, so gibt es auch in der Ebene des Polarsystems unendlich viele Curven II. O., die ganz mit ihren re-

Digitized by Google

ciproken zusammenfallen. Man erkennt leicht, dass die Hauptachsen aller dieser Curven durch M laufen, und dass die Verbindungsgeraden der Curvenpunkte P von λ mit den Berührungspunkten P' auf den entsprechenden Geraden p sich in demjenigen Punkte R der Hauptachse von λ schneiden, durch welchen die Achse des die Curve aus O projicirenden rechtwinkligen Rotationskegels geht. Dieses Punktepaar M, R, zu welchem es noch ein anderes bezüglich des Mittelpunktes der Curve symmetrisch gelegenes M', R' gibt, hat also für λ folgende Bedeutung: Verbindet man irgend einen Punkt P von λ mit M und R durch 2 Gerade, so steht die Tangente in dem zweiten Curvenpunkt P' von $\overline{PR}$ normal zu den Geraden $\overline{PM}$. Diese Beziehung der Punkte M und R zu λ liefert uns also eine einfache Construction der Tangenten in den Punkten der Curve, und man erkennt leicht, dass diese die Verallgemeinerung der bekannten Kreistangenten-Construction ist, wenn man noch beachtet, dass für den Kreis jene beiden Punktepaare in dem Mittelpunkt zusamenfallen. In T. V., S. 211 des Jahrgangs 1887 dieser Zeitschrift hat Verfasser mit Benutzung des rechtwinkligen Rotationskegels bereits den Nachweis geführt, dass eine Curve II. O. im allgemeinen 2 jener ausgezeichneten Punktepaare (die dort S, R und S', R' genannt sind) besitzt, dass jedes derselben durch die beiden Brennpunkte der harmonisch getrennt ist, und dass die geometrische Bestimmung dieser Punkte sich einfach ausführen lässt. Besonders leicht ist die Ermittelung derselben, abgesehen vom Kreis, für die Parabel und die gleichseitige Hyperbel. Bei ersterer Curve fällt nämlich M in den Scheitelpunkt und R in denjenigen Punkt auf der Hauptachse, welcher die doppelte Brennweite besitzt; bei der gleichseitigen Hyperbel hingegen liegt M im Mittelpunkt der Curve und R fällt auf den unendlich fernen Punkt der Hauptachse. Aus den an der angegebenen Stelle mitgeteilten Coordinaten der Punkte lässt sich für die Ellipse und die Hyperbel noch entnehmen, dass die halbe kleine Achse einer dieser Curven die mittlere Proportionale zwischen der halben grossen Achse und der Strecke MO ist. Nehmen wir also in dem Polarsystem auf einer durch M gehenden Geraden eine Strecke AB so an, dass sie aus O durch einen rechten Winkel projicirt wird, dann gibt es eine bestimmte Curve λ, die AB zur Hauptachse hat, und deren reciproke mit λ zur Deckung kommt. Alle Parabeln des Systems, welche mit ihren reciproken zusammenfallen, haben M zum gemeinsamen Scheitelpunkt und ihre Brennweite ist gleich $\frac{MO}{2}$, also constant; mithin sind alle diese Parabeln congruent. — Der Beweis des Satzes über die Existenz der beiden Punktepaare M, R und M', R' einer jeden Cure II. O. ist, wie bereits gesagt, mit Hülfe des rechtwinkligen Rotationskegels erfolgt; wir erkennen aber jetzt

Digitized by Google

auch, wie die Betrachtung des circulären Polarsystems mit imaginärer Ordnungscurve auf ihn führen müsste.

Wir setzen nun in der Ebene eine beliebige Curve II. O. λ voraus und denken uns derselben ein Dreieck ABC eingeschrieben. Dann ist dieses ein Poldreieck desjenigen circulären Polarsystems, welches den Höhenpunkt H des Dreiecks zum Mittelpunkt und das Product der Höhenabschnitte zur Potenz hat. Ist nun P irgend ein anderer Punkt von λ, und schneidet seine entsprechende Gerade die Curve in den Punkten S und T, dann geht die Polare von S durch P, und ihr Schnittpunkt mit $\overline{ST}$ möge T' genannt werden. Weil nun stets durch die 6 Eckpunkte zweier Poldreiecke eine Curve II. O. geht, und in unserm Falle von den Poldreiecken' ABC und PST' 5 Punkte nämlich A, B, C, P und S auf λ liegen, so ist auch T' ein Punkt dieser Curve, also identisch mit T. Wir sehen also, dass in jedem Punkte von λ ein Eckpunkt von einem bestimmten, der Curve eingeschriebenen (reellen oder auch imaginären) Dreieck liegt, welches mit dem Dreieck ABC den Höhenpunkt H und das Product der Höhenabschnitte gemein hat. Da alle diese Dreiecke Poldreiecke des circulären Polarsystems sind, und ihre Eckpunkte auf λ liegen, so bilden ihre Seiten einen Strahlenbüschel II. O. Zugleich erkennen wir, dass diese Dreiecke entweder alle spitzwinkelig, oder alle stumpfwinkelig,* oder endlich alle rechtwinkelig sind. In letzterem Falle ist der Höhenpunkt ein gemeinsamer Eckpunkt der Dreiecke, und der Strahlenbüschel II. O. zerfällt in 2 Strahlenbüschel I. O., von denen die Katheten den einen und die Hypotenusen den andern bilden. — Es fragt sich nun noch, ob der Curve λ auch Dreiecke eingeschrieben werden können, welche zwar denselben Höhenpunkt wie das Dreieck ABC, aber ein anderes Product der Höhenabschnitte haben. Dies ist offenbar dann immer möglich, wenn λ eine gleichseitige Hyperbel ist. Denn in diesem Falle ist der Höhenpunkt H des eingeschriebenen Dreiecks PST ein Punkt der Curve, und er ist folglich auch Höhenpunkt aller derjenigen der Hyperbel eingeschriebenen Dreiecke, welche mit ersterem einen Eckpunkt gemein haben, und in welchen die diesem gegenüberliegenden Seiten normal zu der Verbindungsgeraden des Eckpunktes mit dem Punkte H, also parallel mit einer Seite des Dreiecks PST sind. Setzen wir nun aber λ als verschieden von einer gleichseitigen Hyperbel voraus und nehmen wir an, es gäbe ausser dem der Curve eingeschriebenen Dreieck PST noch ein anderes, ebenfalls λ eingeschriebenes Dreieck $PS'T'$, welches mit ersterem ausser dem Eckpunkt P auch den Höhenpunkt H gemeinsam habe, dann gienge, wie man sich leicht überzeugt, die durch P, S, T, H und S' gelegte gleichseitige Hyperbel

Digitized by Google

auch durch T', hätte also mit λ 5 und folglich alle Punkte gemein. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung, und folglich müssen wir die Annahme fallen lassen, dass durch den Punkt P von λ ausser PST noch ein anderes eingeschriebenes Dreieck $PS'T'$ gelegt werden kann, welches denselben Höhenpunkt wie das erstere hat.

Wir können daher nunmehr den foigenden Satz als bewiesen aussprechen:

„Die Seiten aller einer Curve II. O. eingeschriebenen Dreiecke „mit gemeinsamem Höhenpunkte bilden im allgemeinen einen Strah-„lenbüschel II. O. Diese Dreiecke haben alle dasselbe Product der „Höhenabschnitte und sind daher Poldreiecke eines circulären Polar-„systems. — Nur wenn die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, „erhält man unendlich viele Strahlenbüschel II. O., von denen ein „bestimmter von den Seiten aller der Hyperbel eingeschriebenen „Dreiecke gebildet wird, die in dem Producte ihrer Höhenabschnitte „übereinstimmen. Alle diese Strahlenbüschel II. O. haben die un-„endlich ferne Gerade und zwei in dem gemeinsamen Höhenpunkte „normal sich schneidende Geraden gemeinsam, sind also alle Para-„beln.“

Diesem Satze steht ein anderer gegenüber, von dessen Beweise wir in Anbetracht der vorhergehenden Ausführungen abstehen dürfen:

„Die Eckpunkte aller einer Curve II. O. umgeschriebenen Drei-„ecke mit gemeinsamem Höhenpunkte liegen im allgemeinen auf einer „Curve II. O Die Dreiecke haben alle dasselbe Product der Höhen-„abschnitte und sind daher Poldreiecke eines circulären Polarsystems. „— Nur wenn die Curve eine Parabel ist, erhält man unendlich „viele jener Curven II. O., von denen eine bestimmte von den Eck-„punkten aller der Parabel umgeschriebenen Dreiecke gebildet wird, „die in dem Producte ihrer Höhenabschnitte übereinstimmen. Alle „diese Curven haben den Höhenpunkt und zwei unendlich fern in „normaler Richtung zu einander gelegenen Punkte gemeinsam, sind „also alle gleichseitige Hyperbeln.“

Bevor wir nun zu den Anwendungen des circulären Polarsystems auf das Dreieck übergehen, wollen wir zunächst noch zeigen, wie sich der folgende, bekannte Satz äusserst einfach mit Hülfe des Systems ergibt:

„Errichtet man zu einer um einen festen Punkt M der Ebene „sich drehenden Geraden in ihren Schnittpunkten mit einem Kreise „die Normalen, so bilden dieselben einen Strahlenbüschel II. O., „welcher den Punkt M zu einem Brennpunkt hat. Die Einhüllungs-

Digitized by Google

„curve ist eine Ellipse der Hyperbel, je nachdem M innerhalb oder „ausserhalb des Kreises liegt, und der Strahlenbüschel II. O. zerfällt „in 2 Strahlenbüschel I. O., wenn M ein Punkt der Peripherie des „Kreises ist."

Macht man nämlich M zum Mittelpunkte eines allgemeinen circulären Polarsystems und das constante Product der Abschnitte seiner Sehnen oder Secanten zur Potenz desselben, so erkennt man unter Beachtung früherer Ausführungen sofort die Richtigkeit des Satzes.

In der Absicht, nunmehr eine Reihe von Dreieckssätzen mittelst des allgemeinen circulären Polarsystems abzuleiten, bestimmen wir uns zunächst ein solches, indem wir den Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks die ihnen gegenüberliegenden Seiten und dadurch dem Höhenpunkt H desselben die unendlich ferne Gerade g_∞ als entsprechende Elemente zuweisen. Dann ist die Potenz des Systems gleich dem Producte der Höhenabschnitte des Dreiecks, also positiv, negativ oder null, je nachdem dieses spitz-, stumpf- oder rechtwinkelig ist.

Durchschneiden wir nun die Seiten des Dreiecks mit einer Geraden g in den Punkten A_1, B_1, C_1, dann schneiden sich die diesen Punkten entsprechenden und durch die gegenüberliegenden Eckpunkte A, B, C gehenden Geraden a_1, b_1, c_1 in einem Punkte G, welcher auf der Normalen von H zu g liegt. Da ferner diese drei Geraden normal zu den Verbindungsgeraden von H mit den Punkten A_1, B_1, C_1 sind, so gilt folgender, übrigens auch leicht elementar abzuleitender Satz:

„Verbindet man die Punkte, in welchen die Seiten eines Drei„ecks von einer Geraden getroffen werden, mit dem Höhenpunkt „desselben, dann gehen die drei Normalen aus den gegenüberliegen„den Eckpunkten zu diesen Verbindungsgeraden durch einen Punkt, „welcher mit dem Höhenpunkt auf einer Normalen zu jener Geraden „liegt."

Diesem Satze steht ein anderer gegenüber, zu dessen Ableitung es keiner weiteren Erläuterung bedarf:

„Fällt man aus dem Höhenpunkt eines Dreiecks die Senkrechten „auf drei in einem Punkte sich schneidende Ecktransversalen, dann „liegen die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Gegenseiten „der Transversalen auf einer Geraden, welche normal zu den Ver„bindungsgeraden jenes Punktes mit dem Höhenpunkt ist."

Digitized by Google

Dem Mittelpunkte α der Seite a entspricht diejenige Gerade a' durch A, welche normal zu der Verbindungsgerade $\overline{\alpha H}$ ist. Da nun α von der unendlich fernen Geraden g_∞ durch die Eckpunkte B und C harmonisch getrennt ist, so ist auch die Gerade a' von dem Höhenpunkt H harmonisch getrennt durch die Seiten b und c. Wir haben also folgenden Satz:

„Die durch zwei Seiten eines Dreiecks von dem Höhenpunkt „desselben harmonisch getrennte Gerade ist normal zu der Geraden, „welche den Höhenpunkt mit der Mitte der dritten Seite verbindet."

Dem Punkte A', in welchem die Seite a von der Geraden a' getroffen wird, und welcher folglich von der Höhe zu a durch die Eckpunkte B und C harmonisch getrennt ist, entspricht die Mittellinie $\overline{A\alpha}$; folglich können wir sagen:

„Die Normale aus dem Höhenpunkt eines Dreiecks zu einer „Mittellinie desselben trifft die gegenüberliegende Seite in einem „Punkte, welcher von der Höhe der Seite durch die Eckpunkte der- „selben harmonisch getrennt ist."

Bestimmen wir nun zu jeder Mittellinie des Dreiecks den entsprechenden Punkt, so erhalten wir, weil die drei Mittellinien durch einen Punkt S gehen, drei Punkte einer Geraden s_1, und wir erkennen jetzt, dass diese die sogenannte Harmonikale des Höhenpunktes ist. Zugleich sehen wir:

„Die Harmonikale des Höhenpunktes eines Dreiecks steht senk- „recht zu der Euler'schen Geraden desselben."

Heisst Q der Punkt, in welchem s von $\overline{HS}$ getroffen wird, dann ist das das Product $SH.HQ$ gleich dem Producte der Höhenabschnitte des Dreiecks. Mithin können wir weiter folgern:

„Die drei Kreise, welche durch den Schwerpunkt eines Dreiecks „gehen und die Höhen desselben als Sehnen fassen, schneiden sich „zum zweiten Male in demjenigen Punkte der Euler'schen Geraden, „durch welchen die Harmonikale des Höhenpunktes geht."

Da dem Mittelpunkte α von a die durch H von b und c harmonisch getrennte Gerade a' entspricht, so hat die Mittelsenkrechte von a als entsprechendes Element denjenigen Punkt von a', durch welchen die Parallele durch H zu a geht. Weil nun die drei Mittelsenkrechten durch einen Punkt, den Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises gehen, so ergibt sich folgender Satz:

„Bestimmt man auf den 3 Geraden, welche durch den Höhen-

Digitized by Google

„punkt eines Dreiecks parallel zu den Seiten desselben gezogen sind, „die vierten dem Höhenpunkte harmonisch zugeordneten Punkte, so „liegen dieselben auf einer Geraden, die normal zu der Euler'schen „Geraden des Dreiecks steht. Dieselbe ist die Polare des Höhen„punktes bezüglich derjenigen Curve II. O., welche die Seiten des „Dreiecks berührt und den Höhenpunkt desselben zu einem Brenn„punkt hat."

Der Satz von dem Mittelpunkt des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises lässt sich wie folgt übertragen:

„Fällt man auf die Winkelhalbirungslinien eines Dreiecks die „Senkrechten aus dem Höhenpunkte desselben, so liegen deren Schnitt„punkte mit den gegenüberliegenden Seiten der Halbirungslinien auf „einer Geraden, welche normal zu der Verbindungslinie des Höhen„punktes mit dem Mittelpunkt des Inkreises ist. Diese Gerade ist „die Polare des Höhenpunktes bezüglich einer von den 4 Curven „II. O., welche durch die Eckpunkte des Dreiecks gehen und den „Höhenpunkt zu einem Brennpunkt haben."

Eine interessante Uebertragung gewährt auch der Satz vom Feuerbach'schen Kreise. Den Fusspunkten der Höhen ensprechen in dem Polarsystem die Parallelen durch die Eckpunkte zu den gegenüberliegenden Seiten, und die Mittelpunkte der Seiten haben, wie bereits früher angegeben, als entsprechende Gerade diejenigen Ecktransversalen, welche von dem Höhenpunkt des Dreiecks harmonisch getrennt sind durch die Seiten desselben. Ferner entsprechen den Mittelpunkten der oberen Höhenabschnitte diejenigen Geraden, welche mit den Dreiecksseiten parallel sind und von ihnen dieselbe Entfernung haben als diese von dem Höhenpunkt des Dreiecks. Weil nun die erwähnten 9 Punkte auf einem Kreise liegen, welcher von den vier dem Dreieck an- bzhw. eingeschriebenen Kreisen berührt wird, so führt uns das Polarsystem zu folgendem Satze:

„Zieht man durch die Eckpunkte eines Dreiecks die Parallelen „zu den Gegenseiten und von dem Höhenpunkt durch die Seiten „harmonisch getrennten Geraden, und bestimmt man ferner die zu „dem Höhenpunkte bezüglich der Seiten symmetrisch gelegenen Ge„raden, so umhüllen diese 9 Geraden eine Curve II. O., welche den „Höhenpunkt des Dreiecks zu einem Brennpunkt hat und von den „vier Curven II. O. berührt wird, welche durch die Eckpunkte des „Dreiecks gehen und ebenfalls den Höhenpunkt zu einem Brennpunkt „haben."

Bei den vorhergehenden Betrachtungen, die sich nach verschie-

Digitized by Google

denen Richtungen hin noch ausdehnen liessen, war der Mittelpunkt des Polarsystems zugleich der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, und dieses selbst ein Poldreieck des Systems. Wir wollen nun das Dreieck ganz beliebig in der Ebene des Systems annehmen, so dass der Mittelpunkt M desselben keine ausgezeichneta Lage zu ihm hat. Dann entsprechen den Eckpunkten ABC des Dreiecks die Seiten $a'b'c'$ eines anderen zu ersterem perspectivisch gelegenen Dreiecks und den Seiten abc des ersteren die Eckpunkte $A'B'C'$ des zweiten. Die unendlich fernen Punkte auf a, b, c haben als entsprechende Elemente die Geraden, welche M mit A', B', C' verbinden, und den Höhen des Dreiecks ABC entsprechen diejenigen Punkte auf den Seiten a', b', c', durch welche die Normalen des Punktes M zu seinen Verbindungsgeraden mit den gegenüberliegenden Eckpunkten $A'B'C'$ gehen. Weil nun die Höhen des Dreiecks ABC in einem Punkte H sich treffen, so liegen jene 3 Schnittpunkte in einer Geraden h, womit wir folgenden Satz bewiesen haben:

„Die Normalen eines Punktes der Ebene zu seinen Verbin-
„dungsgeraden mit den Eckpunkten eines Dreiecks schneiden die
„gegenüberliegenden Seiten desselben in drei Punkten einer Gera-
„den.“

Mit Hülfe dieses so einfach gewonnenen Satzes lässt sich nun auch sofort der Gauss-Bodenmiller'sche Satz über die Kreise ableiten, die die Diagonalen eines vollständigen Vierseits zu Durchmessern haben. Schneiden sich nämlich in dem einfachen Viereck $ABCD$, dessen beiden Paare von Gegenseiten durch die Punkte E und F gehen mögen, die über den Diagonalen AC und BD construirten Kreise in den Punkten S und S', dann sind $\overline{SA}$ und $\overline{SD}$ die Verbindungsgeraden des Punktes S mit den Eckpunkten A und D des Dreiecks ADE, und ihre Normalen durch S schneiden die gegenüberliegenden Seiten $\overline{DE}$ und $\overline{AE}$ in den Punkten C und B. Folglich wird nach dem vorhergehenden Satze der Punkt F, in welchem die Gerade $\overline{BC}$ die dritte Dreiecksseite $\overline{AD}$ schneidet, mit S durch eine Gerade verbunden, die normal ist zu der Geraden $\overline{SE}$, oder mit anderen Worten, der Kreis, welcher über der dritten Diagonale EF des vollständigen Vierseits als Durchmesser construirt wird, geht auch durch S und S'.

Aus dem letzten Satze ersehen wir, dass bei einem gegebenen Dreieck zu jedem Punkte M eine bestimmte Gerade h gehört, und es lässt sich leicht vermuten, dass bei besonderer Lage des Punktes M zu den Eckpunkten des Dreiecks auch die Gerade h eine ausgezeichnete Lage zu demselben einnimmt. Wir wollen diese Frage

Digitized by Google

untersuchen für den Fall, dass M mit den Eckpunkten ABC eines Dreiecks auf einem Kreise O liegt. Die Geraden, welche durch M normal zu $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ gehen, mögen mit v unb v' und ihre Schnittpunkte mit den Seiten a und b mit P und P' bezeichnet werden, so dass die Gerade h identisch ist mit $\overline{PP'}$. Denkt man sich dann die Eckpunkte A und B fest, den Punkt C jedoch auf dem Kreise beweglich, dann beschreiben die Geraden $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ zwei projectivische Strahlenbüschel I. O. und mithin ihre Schnittpunkte P' und P auf den Geraden v' und v zwei projectivische Punktreihen I. O. Diese haben den Punkt M entsprechend gemein, folglich gehen alle Geraden h durch einen festen Punkt. Da aber sowol der durch den zweiten Kreispunkt von v gehende Durchmesser des Punktes A, als auch der durch den zweiten Kreispunkt von v' gehende Durchmesser von B zu den Geraden h gehört, so erkennen wir, dass der feste Punkt, um den sich bei der Bewegung von C auf der Peripherie des Kreises die Gerade h dreht, der Mittelpunkt O dieser Curve ist.

Wir haben also folgendes Resultat:

„Zieht man durch einen Punkt. welcher mit den Eckpunkten „eines Dreiecks auf einem Kreise liegt, die Normalen zu seinen „Verbindungsgeraden mit diesen Eckpunkten, so treffen dieselben die „gegenüberliegenden Dreiecksseiten in drei Punkten einer Geraden, „welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht."

Die Umkehrung dieses Satzes führt zu folgender Specialisirung des Gauss-Bodenmiller'schen Satzes:

„Zieht man eine Gerade durch den Mittelpunkt des Umkreises „eines Dreiecks, dann liegt auf demselben Kreise der eine von den „beiden Schnittpunkten der drei Kreise, welche die Diagonalen des „entstandenen Vierseits zu Durchmessern haben."

Die reciproke Figur des Kreises O in dem circulären Polarsystem, welches den Punkt M auf der Peripherie zum Mittelpunkt hat, ist eine Parabel mit M als Brennpunkt. Weil nun bezüglich jedes dem Kreise eingeschriebenen Dreiecks die Gerade h durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und diese in dem reciproken Tangentendreieck der Parabel den Höhenpunkt als entsprechendes Element hat, so sind wir sofort zu dem bekannten Satze geführt:

„Der Höhenschnittpunkt aller eigentlichen Tangentendreiecken „einer Parabel liegen auf der Directrix."

Wenn der Punkt M nicht auf der Peripherie des dem Drei-

Digitized by Google

eck ABC umgeschriebenen Kreises liegt, dann haben die projectivischen Punktreihen $v(P)$ und $v'(P')$ den Punkt M nicht entsprechend gemein. Die Geraden h, welche die Punkte P und P' verbinden, beschreiben also jetzt einen Strahlenbüschel II. O., von welchem 2 Strahlen, nämlich v und v' durch M gehen. Durch reciproke Uebertragung dieser Bdziehungen erhalten wir nun folgenden Satz:

„Die Höhenpunkte aller Tangentendreiecke einer Curve II. O., „welche zwei feste Tangenten mit einer beweglichen bilden, liegen „im allgemeinen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten normal zu „den festen Tangenten sind."

Dieser Satz kann übrigens auch direct mittelst projectivischer Beziehungen abgeleitet werden.

Kehren wir nun wieder zu dem ursprünglichen Dreieck ABC zurück, um von ihm noch einige andere Sätze auf seine Polarfigur, das Dreieck $A'B'C'$, zu übertragen.

Wie bereits angegeben, entsprechen den unendlich fernen Punkten auf den Seiten des Dreiecks ABC die Geraden, welche den Punkt M mit den Eckpunkten des zweiten verbinden. Folglich haben die Mittelpunkte der Seiten des ersten Dreiecks in dem andern diejenigen Ecktransversalen als entsprechende Elemente, welche von dem Punkte M durch die Seiten harmonisch getrennt sind. Die Schnittpunkte dieser Ecktransversalen mit den gegenüberliegenden Seiten entsprechen den Mittellinien des Dreiecks ABC und folglich führt uns der Satz von den Mittellinien in seiner reciproken Uebertragung zu dem folgenden bekannten Satze:

„Legt man durch die Ecken eines Dreiecks die Geraden, welche „durch die Seiten desselben von einem Punkte der Ebene harmo„nisch getrennt sind, so liegen deren Schnittpunkte mit den gegen„überliegenden Dreiecksseiten auf einer Geraden."

Diese Gerade ist die Harmonikale des Punktes M in Bezug auf das Dreieck $A'B'C'$ und sie werde, weil sie dem Schwerpunkt S des Dreiecks ABC entspricht, mit s bezeichnet. Lassen wir nun M mit S zusamenfallen, so bewegt sich s in's Unendliche und folglich erkennen wir, dass dann auch M Schwerpunkt des zweiten Dreiecks $A'B'C'$ ist. Für das circuläre Polarsystem gilt also folgender Satz:

„Ist der Mittelpunkt eines circulären Polarsystems der Schwer„punkt eines Dreiecks in der Ebene desselben, so hat auch das Polar„dreieck denselben Punkt zum Schwerpunkt."

Weiter erkennen wir jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Digitized by Google

„Legt man zu jeder Mittellinie eines Dreiecks eine Normale „so, dass das Product der beiden Strecken constant ist, in welchen „die Entfernung eines Eckpunktes von der entsprechenden Normalen „durch den Schwerpunkt geteilt wird, so liegt das von den Normalen „gebildete Dreieck zu dem ersteren perspectivisch und hat mit ihm „den Schwerpunkt gemein.“

Als Anwendung dieses Satzes ergibt sich weiter:

„Zieht man zu den Mittellinien eines Dreiecks in ihren zweiten „Schnittpunkten mit der Peripherie des Umkreises die Normalen, so „erhält man ein Dreieck, welches mit ersterem perspectivisch liegt „und den Schwerpunkt gemeinsam hat.“

Die Sätze über die andern merkwürdigen Punkte lassen sich bei Voraussetzung einer beliebigen Lage von M zu dem Dreieck ebenso einfach wie die vorhergehenden übertragen.

Wir begnügen uns mit dieser Andeutung der leichten Ausführbarkeit und wollen nur noch folgendes bemerken. Fällt der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises mit M zusammen, so ist dieser Punkt auch der Mittelpunkt des dem Polardreieck $A'B'C'$ eingeschriebenen Kreises. Mit Hülfe des circulären Polarsystems erkennt man daher sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Ist einem Dreieck ein Kreis umgeschrieben und zieht man „durch die Gegenpunkte des Dreiecks die Tangenten, so erhält man „ein Dreieck, welches mit ersterem perspectivische Lage hat.“

Digitized by Google

III.

Untersuchungen zur Theorie der Charaktere der Krümmungslinien auf Röhrenflächen.

Von

A. Ahrendt
in Rostock.

Die Charakteristikentheorie der Parallelcurven ebener Curven ist zuerst von Cayley gegeben und findet sich in Salmon's „Höheren Curven." Die den ebenen Parallelcurven analogen Gebilde des Raumes sind die Parallelflächen; ihre Charaktere sind in ausführlicher Weise von Roberts [1]) untersucht. Die Untersuchung der Krümmungslinien auf Parallelflächen hat nun das Resultat ergeben, dass sie den Krümmungslinien auf den Originalflächen entsprechen [2]); es haben also beide Krümmungslinien dieselbe abwickelbare Normalenfläche. Oder: Eine Krümmungslinie der Parallelfläche entsteht als Ort der Endpunkte gleich langen Strecken ϱ, die auf den Erzeugenden der abwickelbaren Normalenfläche längs der Originalkrümmungslinie abgetragen werden. Die Natur der abwickelbaren Normalenfläche hängt lediglich von der Natur der Originalfläche ab. Die nachfolgenden Untersuchungen sehen nun von einer bestimmten Originalfläche ab; zu Grunde gelegt wird eine algebraische Raumcurve, und untersucht wird dann diejenige Curve, die entsteht als geometrischer Ort der Endpunkte gleich langer Strecken. die auf den Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche abgetragen werden, vorausgesetzt, dass diese Erzeugende die algebraische Raumcurve stets senkrecht schneiden.

1) Roberts, Proceedings of the London Math. Society. Vol. IV. 1872.

2) Craig, Crelle's Journal, Band 93, 94.

Digitized by Google

Wie gezeigt werden wird, sind solche Curven Krümmungslinien auf Röhrenflächen. Sie sind Verallgemeinerungen der ebenen Parallelcurven und können deshalb auch als Parallelcurven der Raumcurve bezeichnet werden.

Die folgenden Untersuchungen behandeln das Problem nach drei Seiten. Sie geben erstens eine allgemeine Theorie der Charaktere einer räumlichen Parallelcurve; sie behandeln zweitens das Problem für den Fall, dass die Originalcurve eine Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades ist, und sie zeigen drittens, wie die Cayley'sche Theorie der ebenen Parallelcurven sich durch Specialisirung ergiebt.

I. Allgemeine Theorie der räumlichen Parallelcurven.

Es sei die Curve $m$ter Ordnung C^m vorgelegt, dann versteht man unter der Parallelcurve derselben eine Curve, die als geometrischer Ort der Endpunkte constanter Strecken ϱ entsteht, die auf den Erzeugenden einer Torse A abgetragen werden, falls diese Erzeugende die C^m stets senkrecht schneiden. Es soll ϱ der Parameter oder Modul der Parallelcurve C^{m_1} heissen.

Einem jeden Punkte auf C^m entsprechen nach dieser Definition zwei Punkte auf C^{m_1}, und daher hat C^{m_1} doppelt so viele Zweige als C^m.

Von vorn herein lassen sich zwei Classen von Parallelcurven unterscheiden. Bei der ersten ist die Torse A eine Normalebene von C^m, und C^{m_1} daher ein Kreis vom Radius ϱ. Die Untersuchung dieser Curven soll vorläufig ausser Acht gelassen werden.

Der zweiten Classe gehören alle Parallelcurven an, bei denen als Torse A keine Normalebene zu Grunde gelegt ist. Mit ihnen hat sich die folgende Untersuchung zu beschäftigen. Bleibt der Modul ϱ constant, so gehört zu C^m ein einfach unendliches System von Parallelcurven. Denn zu einer willkürlichen Normale von C^m giebt es nur eine einzige sie schneidende Nachbarnormale, da die Normalebene im benachbarten Punkte nur einen Punkt mit ihr gemein hat. Von dieser Normale aus lässt sich also eine Torse A obiger Art nur auf eindeutige Weise bestimmen, und deshalb giebt es zu C^m so viele Torsen A, als es Normalen in einem willkürlichen Punkt giebt, d. h. ein einfach unendliches System. Eben so viele Parallelcurven giebt es demgemäss vom Modul ϱ. Da nun ϱ auch alle Werte von 0 bis ∞ annehmen kann, so folgt, dass zu C^m ein zweifach unendliches System von Parallelcurven gehört.

Digitized by Google

Eine Röhrenfläche (mod ϱ) lässt sich definiren als geometrischer Ort der Endpunkte von Strecken ϱ, die auf den Normalen von C^m abgetragen werden. Jedem Punkte von C^m entspricht ein Kreis auf der Röhrenfläche, und die Tangentialebene an die Röhrenfläche in einem Punkte dieses Kreises ist parallel der Tangente an C^m im entsprechenden Punkte; überdies ist die Verbindungslinie des Punktes auf C^m mit dem Berührungspunkte der Tangentialebene, d. i. eine Normale zu C^m, auch normal zur Tangentialebene. Denn sind $\xi\eta\zeta$ die laufenden Coordinaten von C^m, xyz die der Röhrenfläche, so ist:

$$x = \xi + \varrho\alpha$$
$$y = \eta + \varrho\beta$$
$$z = \zeta + \varrho\gamma$$

und es gelten die Bedingungen:

$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0$$
$$\alpha\,d\xi + \beta\,d\eta + \gamma\,\delta\zeta = 0$$

Hieraus folgt

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = (\alpha\,d\xi + \beta\,d\eta + \gamma\,d\zeta) + \varrho(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0$$

und dies war zu beweisen.

Nach Definition liegt eine Parallelcurve (mod ϱ) auf einer Röhrenfläche (mod ϱ) und nach Beweis ist die Fläche der Normalen der Röhrenfläche längs der Parallelcurve die Torse A; mithin ist die Parallelcurve (mod ϱ) eine Krümmungslinie der Röhrenfläche (mod ϱ). Und wie ersichtlich, stellen die beiden Classen von Parallelcurven die beiden Schaaren von Krümmungslinien dar; die eine Schaar besteht aus Kreisen vom Radius ϱ.

Beschränkt man sich auf die zweite Schaar, so folgt, dass in entsprechenden Punkten P und P_1 von C^m und C^{m_1} die Tangenten parallel sind. Denn die Tangente in P_1 entsteht als Schnitt der Tangentialebene τ der Torse A in P; die Tangente in P liegt ebenfalls in τ, ist aber parallel der Tangentialebene der Röhrenfläche; mithin sind die Tangenten in P und P_1 parallel. Die Schmiegungsebenen in P und P_1, als durch zwei benachbarte Tangenten gehend, sind hiernach auch parallel.

Bezeichnen nun n und ν die Classe und den Rang von C^m, so gehen n Schmiegungsebenen von C^m durch einen willkürlichen Punkt, und ν Tangenten durch eine willkürliche Gerade; n Schmiegungsebenen sind einer willkürlichen Geraden, ν Tangenten einer willkürlichen Ebene parallel. Daraus folgen für die Parallelcurven die Charaktere $n_1 = 2n$ und $\nu_1 = 2\nu$. Hat ferner C^m θ stationäre Er-

Digitized by Google

zeugende, so folgt, da jeder zwei solche auf der Parallelcurve entsprechen, $\theta_1 = 2\theta$.

Zur Bestimmung der Ordnung m_1 der Parallelcurve bestimmt man dieselbe für den Modul null. Die Parallelcurve besteht für diesen Fall zunächst aus der doppelt zu zählenden Originalcurve, da die beiden Zweige dann mit der Originalcurve zusammenfallen. Hinzu tritt noch ein Gebilde, dass die hinreichenden und notwendigen Bedingungen erfüllt, zur Curve zu gehören, nämlich: Erstens muss es zugleich auf der Röhrenfläche (mod 0) und auf der Torse A liegen; zweitens muss die Torse A die Röhrenfläche längs dieses Gebildes orthogonal schneiden; drittens müssen die Punkte des Gebildes von entsprechenden Punkten auf C^m den Abstand 0 haben. Der Begriff der Orthogonalität soll in der Folge so gefasst werden: Eine Ebene und eine Gerade heissen orthogonal zu einander, falls die unendlich fernen Elemente dieser Gebilde sich wie Pol und Polare in Bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis verhalten. Betrachtet man nun einen Punkt P auf C^m, dessen Tangente durch den imaginären Kugelkreis geht, so kann man die durch ihn gehende Erzeugende e der abwickelbaren Fläche A als Schnitt der Normalebene ν in P mit der entsprechenden Tangentialebene τ von A auffassen; ν sowol als τ gehen durch die Tangente, und im allgemeinen coincidirt τ nicht mit ν. Dann coincidirt aber die Normale e mit der Tangente in P, und trägt man auf der Tangente die Strecke $\rho = 0$ ab, d. h. sehr klein, so sieht man, dass die Tangente, die ja selbst eine Linie keiner Länge ist, als Teil der Parallelcurve auftritt. Sie erfüllt alle obigen Bedingungen, da die Röhrenfläche (mod 0) identisch ist mit der Torse, die C^m und dem Kugelkreis zugleich umschrieben ist. Man kommt somit zu dem Resultat, dass m_1 gleich $2m$ ist vermehrt um die Zahl der Tangenten, die sich von dem unendlich fernen Kugelkreis an C^m legen lassen; diese Zahl beträgt 2ν, da die Ordnung der Tangentenfläche von C^m gleich ν ist; mithin hat man

$$m_1 = 2(m + \nu)$$

An diese Grundformel knüpfen sich zwei Verallgemeinerungen an, deren erste sich auf die Natur von C^m, deren zweite auf die von A sich bezieht. Wie in der Geometrie der Ebene folgt nämlich, dass falls C^m ε mal durch den Kugelkreis geht und σ mal die unendlich ferne Ebene berührt, dann die Zahl der in Rede stehenden Tangenten sich um $2(\varepsilon + \sigma)$ vermindert, dass also ist

$$m_1 = 2(m + \nu) - 2(\varepsilon + \sigma)$$

Wenn zweitens nicht der oben genannte allgemeine Fall eintritt, dass ν von τ verschieden ist, so wird e nicht mit der Tangente in

Digitized by Google

P coincidiren, und folglich wird sich die Ordnungszahl um eins verringern. Fällt allgemein in λ Punkten P, durch die eine imaginäre Kreistangente geht, die Normalebene ν mit der Tangentialebene τ zusammen, so wird sich die Ordnung um λ verringern, sodass die Relation

$$m_1 = 2(m+\nu) - 2(\varepsilon+\sigma) - \lambda$$

stattfindet. Im gewöhnlichem Falle wird λ den Wert null haben, wie man später an Beispielen sehen wird; aber auf einer Röhrenfläche kann es ausgezeichnete Krümmungslinien geben, bei denen λ einen anderen Zahlenwert als 0 hat.

Man kann dem soeben gefundenen Resultat eine geometrische Deutung geben, falls man die Zahl der durch einen willkürlichen Punkt des Raumes gehenden Normalebenen von C^m bestimmt. Nimmt man diesen Punkt im Unendlichen an, so bestimmt sich diese Zahl zunächst gleich $(m+\nu)$, da die Normalebene in den m unendlich fernen Punkten von C^m die unendlich ferne Ebene ist, und ν Tangenten einer Ebene parallel sind. In Abzug kommt die Zahl $(\varepsilon+\sigma)$; denn jedesmal, falls C^m durch den Kugelkreis geht, fällt nach dem früher gegebenen Begriffe der Orthogonalität die Normalebene nicht mehr mit der unendlich fernen Ebene zusammen; und jedesmal, falls C^m die unendlich ferne Ebene berührt, verringert sich die Zahl der einer beliebigen Ebene parallelen Tangenten, demnach auch die Zahl der Normalebenen um die Einheit. Man kommt somit zu dem Resultat, dass in allen Fällen $\lambda = 0$ die Ordnung der Parallelcurve gleich ist dem Doppelten der Anzahl der Normalebenen, die man durch einen willkürlichen Punkt des Raumes an die Originalcurve legen kann.

Berechnet man nun für den Fall $\lambda = 0$ die Zahl der stationären Punkte, so folgt

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 3m_1 - 3\nu_1 + n_1 + \theta_1 \\ &= 2\{3m + n + \theta - 3\varepsilon - 3\sigma\}\end{aligned}$$

Nach Salmon, Raum II, Art. 136. ist die Ordnung der abwickelbaren Polarfläche von C^m gleich $(3m+n)$; diese Zahl bestimmt sich durch Betrachtung des Schnitts der Polarfläche mit der unendlich fernen Ebene; hat aber C^m θ stationäre Erzeugende, so treten in den unendlich fernen Schnitt θ einfache Gerade ein; geht C^m durch den Kugelkreis, so kommt eine dreifache Gerade in Wegfall; berührt C^m die unendlich ferne Ebene, so entsteht eine stationäre Ebene; und legt man durch den Berührungspunkt einen Schnitt mit Hülfe der Schmiegungsebene, so erkennt man nach „Höhere Curven, Art. 112“, dass eine Verminderung der Ordnungszahl um drei Einheiten

Digitized by Google

eintritt. Man hat also: Die Zahl der Cuspidalpunkte einer Parallelcurve ist gleich dem Doppelten der Ordnungszahl der abwickelbaren Polarfläche der Originalcurve.

II. Untersuchung der Krümmungslinien auf Röhrenflächen der Krümmungslinien eines Ellipsoids und Paraboloids.

Die Krümmungslinien einer centrischen Fläche zweiten Grades haben keine speciellen Lagen zur unendlich fernen Ebene und zum Kugelkreise; es ist

$$\varepsilon = \sigma = 0$$

Ferner ist nach Salmon, Raum II, Art. 110.

$$m = 4 \quad n = 12 \quad \nu = 8 \quad \theta = 0$$

Die Charakteristik λ hat im allgemeinen den Wert 0. Denn bestimmt man die Zahl der durch einen willkürlichen Punkt des Raumes gehenden Normalebenen, was durch eine einfache analytische Rechnung geschieht, so findet man die Zahl 12. Demnach hat man im allgemeinen:

$$2 \,.\, 12 = 2(4+8) - 2(0+0) - \lambda$$
$$\lambda = 0$$

Die Ordnung der Krümmungslinie der Röhrenfläche ist somit im Allgemeinen gleich 24.

Es giebt nun auf der Röhrenfläche zwei ausgezeichnete Krümmungslinien, deren Ordnung nur gleich 16 ist; sie liegen, die eine auf der abwickelbaren Normalenfläche des Ellipsoids, die andere auf der Normalenfläche der Confocalen, falls beide Normalenflächen längs der Originalkrümmungslinie beschrieben sind; sie liegen also, die eine auf der Parallelfläche des Ellipsoids, die andere auf der der Confocalen, sind Krümmungslinien auf diesen Parallelflächen und sind die Berührungscurven der Parallelflächen mit der Röhrenfläche.

Der Nachweis, dass die Ordnungszahl der so definirten ausgezeichneten Krümmungslinien sich auf 16 erniedrigt, ist durch directe Gradabzählung von mir geführt [1]); es erübrigt nur noch, nachzuweisen, dass hier die vorhin aufgestellte allgemeine Theorie Gültigkeit hat. Die Originalcurve C^m sei definirt durch

1) Untersuchungen über die Parallelflächen der Flächen zweiten Grades. Dissert. Rostock 1888.

Digitized by Google

$$\Sigma \frac{x_0^2}{a} = 1 \quad \Sigma \frac{x_0^2}{a+u} = 1$$

so sind die Gleichungen der Flächennormale, der Tangente an C^m und der Normalen zur Confocalen (Normalen zweiter Art) bezüglich:

$$\frac{x-x_0}{x_0} a = \frac{y-y_0}{y_0} b = \frac{z-z_0}{z_0} c$$

$$\frac{x-x_0}{y_0 z_0 a(a+u)(b-c)} = \frac{y-y_0}{z_0 x_0 b(b+u)(c-a)} = \frac{z-z_0}{x_0 y_0 c(c+u)(a-b)}$$

$$\frac{x-x_0}{x_0}(a+u) = \frac{y-y_0}{y_0}(b+u) = \frac{z-z_0}{z_0}(c+u)$$

Bestimmt man diejenigen Punkte, für die die Normalen erster Art, die Tangenten und die Normalen zweiter Art durch den Kugelkreis gehen, wofür ja die Bedingung gilt, dass die Summe der Quadrate der Richtungscosinus gleich null ist, so findet man bezüglich:

$$N_I:\quad z_0^2(c-b)(c-a) - c^2(c+u) = 0$$

$$T_g:\quad \{z_0^2(c-b)(c-a) - c^2(c+u)\}\{z_0^2(c-b)(c-a) - c(c+u)^2\} = 0$$

$$N_{II}:\quad z_0^2(c-b)(c-a) - c(c+u)^2 = 0$$

Es giebt somit 16 Punkte auf C^m, deren Tangenten durch den Kugelkreis gehen; in 8 Punkten von diesen geht auch die Normale erster Art, in den 8 übrigen die Normale zweiter Art durch den Kugelkreis.

Berechnet man nun die Coordinaten der 8 Punkte, wo die Normalen erster Art durch den Kugelkreis gehen, und bestimmt für diese Punkte P_1 das Verhältniss der Richtungscosinus, so folgt:

$$N_I:\quad \sqrt{\frac{a+u}{(a-c)(a-b)}} : \sqrt{\frac{b+u}{(b-c)(b-a)}} : \sqrt{\frac{c+u}{(c-a)(c-b)}}$$

$$T_g:\quad \sqrt{\frac{a+u}{(a-c)(a-b)}} : \sqrt{\frac{b+u}{(b-c)(b-a)}} : \sqrt{\frac{c+u}{(c-a)(c-b)}}$$

$$N_{II}:\quad \frac{a}{\sqrt{(a+u)(a-c)(a-b)}} : \frac{b}{\sqrt{(b+u)(b-c)(b-a)}} : \frac{c}{\sqrt{(c+u)(c-a)(c-b)}}$$

d. h. in den 8 Punkten P_1 coincidiren die Normalen erster Art mit den Tangenten. Ebenso folgt, dass in den 8 Punkten P_2, wo die

Digitized by Google

Normalen zweiter Art durch den Kugelkreis gehen, diese mit den Tangenten coincidiren, während dasselbe hier nicht von den Normalen erster Art gilt.

Man betrachte nun die Parallelcurve, die auf der von Normalen erster Art gebildeten Normalenfläche liegt, dann steht N_{II} stets senkrecht zu einer Tangentialebene τ dieser Normalenfläche A; in den Punkten P_1 sowol als in P_2 liegen die Normalen erster und zweiter Art in den betreffenden Normalebenen τ; in P_1 coincidirt nun N_I mit T_g; N_{II} tut das nicht; d. h. also, es coincidiren τ und ν nicht. In den Punkten P_2 dagegen coincidirt N_{II} mit T_g; N_I tut das nicht; folglich coincidiren in diesen Punkten τ und ν. Die Punkte P_2 sind mithin Ausnahmepunkte im früheren Sinne; und da es 8 solche giebt, so ist $\lambda = 8$. Eine gleiche Betrachtung gilt für diejenige Parallelcurve, bei der als Torse A die Fläche der Normalen zweiter Art zu Grunde gelegt ist.

Wie zu erwarten, gilt eine analoge Betrachtung für die Krümmungslinie eines Paraboloids. Nach Salmon, Raum II, Art 111. ist für diesen Fall

$$m = 4 \qquad n = 6 \qquad \nu = 6 \qquad \theta = 0$$

und da die Curve den Kugelkreis nicht trifft, dagegen die unendlich ferne Ebene in zwei Punkten berührt, so folgt

$$\varepsilon = 0 \qquad \sigma = 2$$

Durch einen willkürlichen Punkt des Raumes lassen sich nun 8 Normalebenen an die Curve legen, und daher ist

$$2 \,.\, 8 = 2(4+6) - 2(2+0) - \lambda$$

$$\lambda = 0$$

Es giebt nun zwei ausgezeichnete Parallelcurven der Krümmungslinie, die die Charakteristik $\lambda = 4$ besitzen. Bei ihnen ist entweder die abwickelbare Normalfläche des Paraboloids oder die der Confocalen zu Grunde gelegt; sie sind zugleich Krümmungslinien auf der Röhrenfläche und einer der Parallelflächen entweder des Paroboloids oder der Confocalen; die beiden Parallelflächen berühren die Röhrenfläche längs dieser beiden Krümmungslinien.

Der Existenzbeweis für die ausgezeichneten Parallelcurven ist dem vorigen analog und soll deshalb nur so weit durchgeführt werden, bis man sieht, dass man auf $\lambda = 4$, im Gegensatz zum vorigen $\lambda = 8$ kommt. Die Krümmungslinie sei

Digitized by Google

$$\frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} = 2z_0$$

$$\frac{x_0^2}{a+u} + \frac{y_0^2}{b+u} = 2z_0 + u$$

so sind die Gleichungen der Normale erster Art, der Tangente und der Normale zweiter Art:

$$\frac{x-x_0}{a} x_0 = \frac{y-y_0}{b} y_0 = -(z-z_0)$$

$$-\frac{x-x_0}{y_0} b(b+u) = \frac{y-y_0}{x_0} a(a+u) = \frac{z-z_0}{x_0 y_0} \frac{ab(a+u)(b+u)}{b-a}$$

$$\frac{x-x_0}{x_0}(a+u) = \frac{y-y_0}{y_0}(b+u) = \frac{z-z_0}{z_0}(c+u)$$

Bestimmt man nun die Punkte der Krümmungslinie, wo die Normalen erster Art, die Tangenten und die Normalen zweiter Art durch den Kugelkreis gehen, so findet man

$$2z_0 + u + a + b = 0$$
$$(2z_0 + u + a + b)(2z_0 + 2u + a + b) = 0$$
$$2z_0 + 2u + a + b = 0$$

und diese Gleichungen lehren, dass es in der vorigen Bezeichnung vier Punkte P_1 und vier Punkte P_2 giebt. In bekannter Weise folgt dann $\lambda = 4$.

Fasst man die bisherigen Resultate zusammen, so folgt, dass es auf der Röhrenfläche einer Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades zwei zweizweigige ausgezeichnete Krümmungslinien giebt. In der folgenden Tabelle sind die Charaktere der Originalcurve, die der Krümmungslinien der Röhrenfläche und die der ausgezeichneten Krümmungslinien zusammengestellt; dieselben bestimmen sich aus vier bekannten Charakteren mit Hülfe der Cayley-Plücker'schen Formeln.

Digitized by Google

Charakter	Centrische Fläche zweiten Grades. Krümmungslinie	Kl. der Röhrenfl.	Ausgez. Kl. der Röhrenfl.	Nicht centrische Fläche zweiten Grades. Krümmungslinie	Kl. der Röhrenfl.	Ausgez. Kl. der Röhrenfl.
m	4	24	16	4	16	12
n	12	24	24	6	12	12
ν	8	16	16	6	12	12
θ	0	0	0	0	0	0
β	0	48	24	0	24	12
α	16	48	40	4	16	12
$h+D$	2	196	76	3	78	42
$x+d$	16	72	84	6	36	42
$y+d$	8	72	76	4	40	42
$g+\Delta$	38	196	208	6	36	42

III. Specialisirung des Problems für ebene Curven.

Ist die Originalcurve eben, ist also $n=0$, so ist auch jede Parallelcurve eben; denn es ist $n_1=2n=0$. Die Ebene ε_1 der Parallelcurve ist parallel der Ebene ε der Originalcurve, da die Schmiegungsebenen in entsprechenden Punkten parallel sind. Das Stück einer Erzeugenden der zu Grunde gelegten Torse A zwischen beiden Ebenen ist nach Construction von constanter Länge ϱ, und daraus folgt, dass alle Erzeugenden gegen ε gleich geneigt sind. Sieht man nun C^m als ebene Krümmungslinie an, so ist eine der Torsen A die abwickelbare Normalenfläche, und man hat den Satz: Besitzt eine algebraische Fläche eine ebene Krümmungslinie, so sind die Erzeugenden der zu ihr gehörigen abwickelbaren Normalenfläche gegen die Ebene der Krümmunglinie gleich geneigt; d. i. das Joachimsthal'sche Theorem.

Die Krümungslinien der Röhrenfläche einer ebenen Curve liegen in Ebenen, die parallel sind der Ebene ε der Curve; jedoch ist zu beachten, dass ein solcher ebener Schnitt nicht Krümmungslinie ist im früheren Sinne, da diese stets aus zwei Zweigen besteht, die in getrennten von ε äquidistanten Ebenen liegen. Bei Röhrenflächen dieser Art giebt es nun stets zwei ausgezeichnete Krümmungslinien; die erste ist der Schnitt der Röhrenfläche mit der Ebene ε, und sie ist charakterisirt durch $\lambda=0$, d. h. λ Minimum; sie ist die ebene Parallelcurve (mod ϱ) von C^m. Die zweite ist der Schnitt der Röhren-

Digitized by Google

fläche mit dem über C^m errichteten Cylinder; sie ist charakterisirt durch den Maximalwert von λ; so oft sich eine Tangente vom Kugelkreise an C^m ziehen lässt, so oft coincidiren τ und ν; und da sich $(2\nu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Tangenten ziehen lassen, so folgt $m_1 = 2m$, d. h. diese Krümmungslinie ist identisch mit der doppelt zu zählenden Originalcurve. — Für die nicht ausgezeichneten Krümmungslinien ist $\lambda = 0$; ihre Projectionen bestehen aus den ebenen Parallelcurven von C^m $(\mathrm{mod}\, \varrho . \cos\alpha)$, und ihre beiden Zweige liegen in Ebenen ε' und ε'', die den Abstand $\varrho . \sin\alpha$ zu beiden Seiten von ε haben. Die Charaktere dieser Krümmungslinien, als Raumcurven angesehen, folgen aus den allgemeinen Formeln für $n = 0$, $\lambda = 0$. Diese Specialisirung hat keine Schwierigkeit und soll deshalb übergangen werden.

Wichtiger sind die Specialisirungen, die sich für die ebenen Parallelcurven ergeben. Wir bezeichnen mit

μ die Ordnung,	$\varkappa$ die Spitzenzahl
ν die Classe,	ι die Inflexionspunktzahl
δ die Doppelpunktzahl,	τ die Doppeltangentenzahl

einer ebenen Curve, und die Charaktere einer Raumcurve mit den Zeichen, wie sie Salmon, Raum II, Art 88 einführt, so ist, falls die Raumcurve zur ebenen wird:

$$\begin{array}{llll} m = \mu & \theta = \iota & \beta = \varkappa & \varepsilon = \varepsilon \\ n = 0 & D = \delta & y = 0 & \sigma = \sigma \\ \nu = \nu & d = \tau & h = 0 & \lambda = 0 \end{array}$$

Hier giebt ε die Zahl an, wie oft die ebene Curve durch einen Kreispunkt geht, und σ die Zahl ihrer Berührungen mit der unendlich fernen Geraden.

Die ebene Parallelcurve von C^μ ist ein specieller Fall der räumlichen Parallelcurve, da die Ebene von C^μ ein specieller Fall der Torsen A ist. Nach früherem bestehen nun die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2(m+\nu) - 2(\varepsilon+\sigma) - \lambda \\ \nu_1 &= 2\nu \\ n_1 &= 2n \\ \theta_1 &= 2\theta \\ \beta_1 &= 3m_1 - 3\nu_1 + n_1 + \theta_1 \\ 2(y_1+\delta_1) &= \nu_1(\nu_1 - 1) - m_1 - 3(n_1+\theta_1) \\ 2(h_1+D_1) &= m_1(m_1-10) + 8\nu_1 - 3n_1 - 3\theta_1 \end{aligned}$$

Digitized by Google

und diese Gleichungen gehen für den Fall der ebenen Parallelcurve über in:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 2(\mu+\nu)-2(\varepsilon+\sigma)\\
\nu_1 &= 2\nu\\
\iota_1 &= 2\iota\\
\varkappa_1 &= 2(\varkappa+3\nu)-6(\varepsilon+\sigma)\\
2\delta_1 &= \mu_1(\mu_1-10)+8\nu_1-3\iota_1\\
2\tau_1 &= \nu_1(\nu_1-1)-\mu_1-3\iota_1
\end{aligned}$$

d. s. die Charaktere der ebenen Parallelcurven, wie sie Cayley direct bestimmt hat.

Ist C^m eine ebene Curve, so ist die Zahl der durch einen willkürlichen Punkt des Raumes gehenden Normalebenen gleich der Zahl der durch einen willkürlichen Punkt der Curvenebene gehenden Normalen; weil für eine ebene Parallelcurve überdies $\lambda = 0$ ist, so folgt, dass die Ordnung einer ebenen Parallelcurve gleich ist dem Doppelten der Anzahl von Normalen, die man von einem beliebigen Punkte der Ebene an C^m legen kann. Und da für eine ebene Curve die abwickelbare Polarfläche übergeht in den Cylinder, der über der Evolute errichtet ist, dieser Cylinder aber dieselbe Ordnung hat wie die Evolute, so folgt: Die Zahl der Spitzen einer ebenen Parallelcurve ist gleich dem Doppelten der Ordnungszahl der Evolute der Originalcurve. — Diese beiden letzten Sätze, die also durch Specialisirung erhalten sind, sind bereits früher ausgesprochen. cf. Salmon, Höhere Curven", Art 111, 112, 118.

Digitized by Google

IV.

Zur Goursat'schen Reduction des Problems der Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel.

Von

R. Hoppe.

In der Abhandlung C. des 1. Bandes der Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, betitelt: Sur un problème relatif aux courbes à double courbure, hat E. Goursat das Problem, eine Curve darzustellen, deren Krümmungs- und Torsionswinkel in gegebener Relation stehen, in andrer Weise als ich es in Crelle J. LX. 182 getan auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgeführt. Die zwei Functionen, welche einzeln den zwei Gleichungen genügen, stehen in keiner sichtlichen Beziehung. Auch die Coefficienten sind anscheinend von verschiedener Form; ihre wirkliche sehr einfache Beziehung, welche von Interesse ist, wird sich später ergeben.

Es ist klar, dass das Problem kein verschiedenes ist, mag man die Relationen zwischen Bogen, Krümmung und Torsion als gegeben, die Coordinaten als gesucht, oder die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel als gegeben, die Tangentialrichtung als gesucht aufstellen. Denn um das Problem in Angriff zu nehmen, ist man gleich anfangs genötigt, von den Coordinaten, deren Differentiale sich nur durch den Factor ∂s von den Richtungscosinus der Tangente unterscheiden, auf letztere überzugehen, und von da an hat die ganze Untersuchung mit dem Bogenelement ∂s nichts mehr zu tun. Auch Goursat erklärt das Problem für gelöst, sobald die Tangentialrichtungen gefunden sind, da ja nur Quadraturen übrig bleiben. Aber

Digitized by Google

anstatt nun die Rechnung von dem überflüssigen Element ∂s, welches sich gleich anfangs als Factor weghebt, zu befreien, behält er nicht nur diesen unnützen Ballast überall bei, sondern führt auch s als unabhängige Variable in alle Differentiationen ein. Infolge dessen ist nun die Untersuchung weit länger und umständlicher, das Resultat complicirter geworden, als es bei richtiger Erkenntniss der Sachlage der Fall gewesen wäre.

Dies gibt mir Anlass, die von Goursat entdeckte Reduction, im wesentlichen nach seiner Methode, aber mit Ausscheidung des nicht hingehörigen Bogenelements, im Folgenden nochmals herzuleiten, woran sich dann weitere Fragen knüpfen werden. Um Unterbrechungen zu meiden, schicke ich einige Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung voraus.

§. 1. Besondere Form der zweiten Lösung einer linearen Gleichung 2. Ordnung.

Sind 2 lineare Gleichungen 2. Ordnung

$$y''+py'+cy=0; \qquad z''+qz'+dz=0 \tag{1}$$

gegeben, so lässt sich die Bedingung, unter der einer Lösung y der ersten Gleichung eine Lösung der zweiten

$$z=uy'$$

für irgend ein u entspricht, für beliebige p, q, c stets durch d erfüllen. Diese Bedingung vereinfacht sich sehr, wenn c constant ist, was wir hier annehmen wollen. Dann findet man durch Differentiation mit Anwendung der ersten Gl. (1):

$$\begin{aligned} z' &= (u'-pu)y'-cuy \\ z'' &= \{u''-2pu'+(p^2-p'-c)u\}y'-c(2u'-pu)y \end{aligned}$$

Führt man diese Werte in die zweite Gl. (1) ein und lässt letztere durch die Coefficienten von y und y' erfüllen, so erhält man die 2 Gleichungen:

$$\frac{u'}{u}=\frac{p-q}{2} \tag{2}$$

$$\frac{u''}{u}-(2p-q)\frac{u'}{u}+p^2-pq-p'-(c-d)=0$$

und nach Elimination von $\frac{u'}{u}$:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{4}(p-q)(p+q)-\tfrac{1}{2}(p+q)'-(c-d)=0 \tag{3}$$

Dies ist die allgemeine Bedingung. Sind hier p, q und c, d conjugirt, so ist

$$(p+q)'=0$$

und, wenn man

$$p=a+it; \qquad q=a-it; \qquad c=b+ie; \qquad d=b-ie$$

setzt,

$$at=2e$$

also entweder t constant oder a und e null. Der erste Fall, wo alle Coefficienten der Gl. (1) constant sind, hat kein Interesse. Im zweiten werden die Gl. (1) und (2):

$$y''+ity'+cy=0; \qquad z''-itz'+cz=0 \tag{4}$$

$$\frac{u'}{u}=it$$

wo t und c reell, und c constant ist. Da nun die zweite Gleichung für den conjugirten Wert von z in die erste übergeht, so ist der conjugirte Wert von uy' eine zweite Lösung der ersten.

§. 2. Reduction einer linearen Gleichung 3. Ordnung auf eine solche 2. Ordnung.

Sei

$$y''+ay'+by=0 \tag{5}$$

und

$$x=y^2$$

so erhält man:

$$x'=2yy'$$

$$x''=2y'^2-2ayy'-2by^2$$

$$x'''=-6ay'^2+2(a^2-a'-4b)yy'+2(ab-b')y^2$$

und nach Elimination von y'^2, yy', y^2:

$$x'''+3ax''+(2a^2+a'+4b)x'+2(2ab+b')x=0 \tag{6}$$

Damit diese Gleichung mit einer gegebenen

$$x'''+Ax''+Bx'+Cx=0$$

identisch sein könne, haben a und b drei Gleichungen zu erfüllen. Eliminirt man a und b, so bleibt die Bedingungsgleichung:

$$2A^3+15AA'+9A''-9AB-27B'+54C=0 \tag{7}$$

Ist diese durch C erfüllt, so hat man:

$$a=\tfrac{1}{3}A; \qquad b=\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{18}A^2-\tfrac{1}{12}A' \tag{8}$$

Digitized by Google

Sind y und z zwei nicht linear abhängige Lösungen der Gl. (5), so ist auch $\alpha y + \beta z$ für constante α, β eine solche, folglich sind

$$x = y^2, \quad z^2 \quad (\alpha y + \beta z)^2$$

und eben deshalb auch

$$x = x^2, \quad z^2, \quad yz \tag{9}$$

Lösungen von Gl (5). Wäre aber für irgend welche constante α, β, γ

$$\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2 = 0$$

so wäre auch $\frac{z}{y}$ constant. Demnach sind auch die Werte (9) drei linear unabhängige Lösungen von Gl. (5).

§. 3. Gleichung 3. Ordnung zur Bestimmung einer Curve aus der Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel.

Seien f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, f', g', h' die der Hauptnormale, l, m, n die der Binormale, $\partial\tau$, $\partial\vartheta$, $\partial\sigma$ die Winkel zwischen der Tangente, Binormale, Hauptnormale und ihren respectiven Consecutiven (mithin τ, ϑ, σ der Krümmugswinkel, Torsionswinkel und Torsionsbogen) und

$$\partial\tau = \partial\sigma \cos\lambda; \qquad \partial\vartheta = \partial\sigma \sin\lambda$$

Ferner sei

$$x = f + il$$

dann erhält man durch successive Differentiation:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = f' e^{-i\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2} = \left(l \sin\lambda - f \cos\lambda - if' \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right) e^{-i\lambda}$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \sigma^3} = \left\{-f'\left[1 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right)^2 + i\frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\right] + (l\cos\lambda + f\sin\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma} \right.$$
$$\left. - 2i(l\sin\lambda - f\cos\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right\} e^{-i\lambda}$$

und nach Elimination von f, f', l zwischen allen 4 Gleichungen:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \sigma^3} + 3i\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2} + \left[1 - 2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\right)^2 + i\frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\right]\frac{\partial x}{\partial\sigma} + i\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}x = 0 \tag{10}$$

Dieselbe Gleichung muss auch hervorgehen, wenn man

Digitized by Google

setzt; daher ist

$$x = g + im \quad \text{oder} \quad x = h + in$$

$$x = \alpha(f + il) + \beta(g + im) + \gamma(h + in)$$

der allgemeinste Wert jeder Lösung von Gl. (10) und dieser geht für irgend eine Lage des Coordinatenaxensystems oder der Curve relativ zu demselben über in

$$x = k(f + il) \tag{11}$$

Jede Lösung von Gl. (10) entspricht demnach in der Bedeutung (11) einer Curve, wie umgekehrt der Wert (11) für jede Curve, deren λ dieselbe gegebene Function von σ ist, die Gl. (10) befriedigt. Statt der Relation zwischen σ und λ kann aber auch die Relation zwischen τ und ϑ gegeben sein; denn jede von beiden bestimmt die andre.

Hierbei ist indes zu beachten, dass α, β, γ, k im allgemeinen complex sind, die Lage der Curve also, wenn nur die Gl. (10) zugrunde liegt, nicht als reelle vorausgesetzt werden darf.

§. 4. Reduction der Gleichung 3. Ordnung auf eine lineare Gleichung 2. Ordnung.

Die Gl. (10) stimmt schon völlig mit Gl. (6) überein, wenn man

$$a = i\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}; \qquad b = \tfrac{1}{4}$$

setzt. Gl. (5) lautet dann:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma^2} + i\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial y}{\partial\sigma} + \tfrac{1}{4}y = 0 \tag{12}$$

Jeder Lösung derselben y entspricht eine Lösung

$$x = y^2$$

von Gl. (10).

Gl. (12) hat die Form von Gl. (4), und zwar ist daselbst σ die unabhängige Variable,

$$t = \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}; \qquad \frac{\partial u}{u\partial\sigma} = \frac{i\partial\lambda}{\partial\sigma}; \qquad u = ce^{i\lambda}$$

daher genügt der conjugirten Gleichung

$$z = c\frac{\partial y}{\partial\sigma}e^{i\lambda}$$

und, wenn y_1 dem y conjugirt ist, so sind

Digitized by Google

$$y, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \sigma} e^{-i\lambda} \tag{13}$$

die zwei Lösungen von Gl. (12).

Die entsprechenden Lösungen von Gl. (10) sind 3 homogene lineare Functionen der 3 Werte (9). Da aber

$$(f+il)^2+(g+im)^2+(h+in)^2=0 \tag{14}$$

ist, so müssen sie eine Quadratsumme null haben. Dem genügt das System

$$f+il=yz; \qquad g+im=\frac{i}{2}(y^2+z^2); \qquad h+in=\frac{1}{2}(y^2-z^2)$$

Jedes andre System würde aus diesem speciellen durch Orthogonalsubstitution hervorgehen.

§. 5. Darstellung der Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale.

Jede der 2 Lösungen (13) der Gl. (12) ist mit einem willkürlichen constanten Factor verbunden, der durch die Bedingung (14) nicht controlirt wird. Bezeichnet y eine beliebige Lösung, so enthält es diesen Factor implicit. Der Factor der zweiten Lösung ergibt sich zuerst, wenn man durch Differentiation von $g+im$ den Wert von g' entwickelt, durch die Bedingung, dass g' reell sei. Er ist

$$c=2$$

was wir im voraus annehmen und nachträglich controliren. Dann hat man:

$$f+il=2y\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}e^{-i\lambda}; \qquad g+im=\frac{i}{2}\left[y^2+4\left(\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}\right)^2 e^{-2i\lambda}\right] \tag{15}$$

$$h+in=\tfrac{1}{2}\left[y^2-4\left(\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}\right)^2 e^{-2i\lambda}\right]$$

Dies differentiirt und mit $e^{i\lambda}$ multiplicirt gibt:

$$f'=2\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}-\tfrac{1}{2}yy_1 \tag{16}$$

$$g'=i\left(y\frac{\partial y}{\partial \sigma}e^{i\lambda}-y_1\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}e^{-i\lambda}\right)$$

$$h'=y\frac{\partial y}{\partial \sigma}e^{i\lambda}+y_1\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}e^{-i\lambda}$$

sämtlich der Form zufolge reell.

Digitized by Google

Zum Beweise, dass f, g, h der Tangente einer Curve entsprechen, ist noch die Orthogonalität derselben und der Haupt- und Binormale zu prüfen. Es muss sein

$$f^2+l^2+f'^2 = g^2+m^2+g'^2 = h^2+n^2+h'^2 = 1 \qquad (16^*)$$

Man findet übereinstimmend:

$$(f+il)(f-il)+f'^2 = (g+im)(g-im)+g'^2 =$$
$$(h+in)(h-in)+h'^2 = \left(2\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}+\tfrac{1}{2}yy_1\right)^2 \qquad (17)$$

Differentiirt man die Grösse zur Rechten, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(2\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}+\tfrac{1}{2}yy_1\right) = 0 \qquad (17^*)$$

Die 3 Quadratsummen (16*) sind daher von selbst derselben Constanten gleich, und diese ist $= 1$ zu setzen. Bedingung also für y ist, dass die vermöge der Gl. (17*) constante Grösse

$$2\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}+\tfrac{1}{2}yy_1 = 1 \qquad (18)$$

ist Der Ausdruck dieser Grösse bleibt immer derselbe, wenn man für y eine Lösung von Gl. (12)

$$ay+b\frac{\partial y_1}{\partial \sigma}e^{-i\lambda}$$

substituirt; nur kommt der constante Factor $a^2+\frac{1}{4}b^2$ hinzu.

§. 6. Reelle Elemente der Lösungen der Gleichung 2. Ordnung.

Sei $y = pe^{iv}$, p und v reell; dann gehen aus Gl. (12) die 2 reellen Gleichungen hervor:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2}-p\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2+\tfrac{1}{4}p-p\frac{\partial v}{\partial \sigma}\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} &= 0\\ 2\frac{\partial p}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma}+p\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial p}{\partial \sigma}\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

woraus nach Elimination von $\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}$:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2}+p\frac{\partial p}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2+p^2\frac{\partial v}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2}+\tfrac{1}{4}p\frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0$$

integrirt und mit Bestimmung der Constanten durch Gl. (18)

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)^2 + p^2\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2 + \tfrac{1}{4}p^2 = \text{const} = \tfrac{1}{2} \tag{20}$$

Erfüllt man diese Gleichung durch

$$p = \sqrt{2}\sin\varphi;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \tfrac{1}{2}\cos\psi;\quad \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \tfrac{1}{2}\cot\varphi\sin\psi \tag{21}$$

so geben die Gl. (19) übereinstimmend:

$$\frac{\partial(\lambda+\psi)}{\partial \sigma} = -\cot 2\varphi \sin\psi \tag{22}$$

Die 4 Gl. (21) (22) drücken in einfachster reeller Form den Zusammenhang zwischen den gegebenen λ, σ und gesuchten p, v aus.

§. 7. Die verschiedenen linearen Gleichungen 2. Ordnung, auf welche das Problem zurückgeführt werden kann, und deren Beziehungen.

Ich gehe von derjenigen Reduction des Problems aus, welche ich in der citirten Arbeit hergeleitet habe. Die Gleichung $f^2+f'^2+l^2=1$ ward zerlegt in

$$\left.\begin{aligned} f\cos\mu + f'\sin\mu &= 1 \\ f\sin\mu - f'\cos\mu &= il \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Hierdurch ist μ definirt, und durch die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu = \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial \tau} \tag{24}$$

bis auf einen constanten Factor die Function r, und dieses r genügt der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial \tau} + \tfrac{1}{4}r = 0 \tag{25}$$

Vermöge einer bekannten Dualität der Curventheorie folgt hieraus die Existenz einer zweiten Reduction. Man kann nämlich, vorausgesetzt, dass das Bogenelement eliminirt ist, für f, f', l, ϑ, τ substituiren $\pm l$, f', $\mp f$, $\pm\tau$, $\mp\vartheta$, mit analoger Substitution in Bezug auf alle Axen. Dann muss aus (25) eine Gleichung

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta^2} + i\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta}\frac{\partial q}{\partial \vartheta} + \tfrac{1}{4}q = 0 \tag{26}$$

hervorgehen, in welcher nur q zu bestimmen bleibt. Zur Berechnung liegt das Nötige vor, doch ist sie langwierig. Einfach ist dagegen das Resultat:

Digitized by Google

$$q = \left(r - 2i\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)e^{\frac{1}{2}i(\vartheta-\tau)} \tag{27}$$

die Einsetzung ergibt sofort seine Richtigkeit.

Eine dritte Reduction gleicher Form ist nun die von Goursat:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} + i\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}\,\frac{\partial y}{\partial \sigma} + \tfrac{1}{4}y = 0 \tag{28}$$

Diese Form besitzt sie in des Autors Aufstellung noch nicht; namentlich hat bei ihm der letzte Term einen variabeln Coefficienten, welcher die hier beabsichtigte Anwendung verhindern würde.

Die Dualität ergibt keine neue Gleichung, denn σ bleibt bei obiger Substitution unverändert, und λ geht nur in $\lambda + R$ über. Aber das durch die Dualität im ersten Falle gewonnene Resultat, welches in einer rein analytischen Transformation ohne geometrische Beziehung besteht, muss auch auf Gl. (28) anwendbar sein. Demnach hat man auf Grund der Gl. (26) die vierte Reduction:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} + i\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\,\frac{\partial z}{\partial \lambda} + \tfrac{1}{4}z = 0 \tag{29}$$

und zwar genügt dieser Gleichung:

$$z = \left(y - 2i\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)e^{\frac{1}{2}i(\lambda-\sigma)} \tag{30}$$

was sich durch Einsetzung ebenso bestätigt.

Nun bleibt noch die Beziehung zwischen y und r zu suchen. Die Gl. (23) geben je 2 Werte für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu$, aber nur eine Wurzel ist beiden gemeinsam, nämlich

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu = \frac{f' + il}{1+f} \quad \text{nach Gl. (24)} \quad = \frac{2}{r}\,\frac{\partial r}{\partial \tau}$$

daher ist, wenn r_1 conjugirt zu r:

$$\frac{\partial r}{r} + \frac{\partial r_1}{r_1} = \frac{f'\partial\tau}{1+f}$$

integrirt:

$$r r_1 = C(1+f)$$

Bezeichnet k den Modul von r, so hat man:

$$\frac{\partial . k^2}{\partial \tau} = Cf'$$

Andrerseits ist nach Gl. (16) (18)

Digitized by Google

$$f' = 2\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial y_1}{\partial \sigma} - \tfrac{1}{2}yy_1 = 1 - yy_1 = 1 - p^2$$

Hiernach erhält man die einfache Beziehung der Moduln:

$$p^2 = 1 - \frac{\partial . k^2}{\partial \tau}$$

Die zugehörige Amplitude v wird durch Gleichung (20) auf p zurückgeführt, lässt sich mithin stets in k darstellen.

Nun stehen aber die 4 Reductionen in sehr einfacher geometrischer Beziehung unter einander. Betrachtet man nämlich die aus den Functionen r, q, y, z sich bestimmenden Curven als 4 verschiedene, so werden die 4 gegebenen Verhältnisse

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau},\quad \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta},\quad \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma},\quad \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}$$

(abgesehen vom Vorzeichen) identisch, nur jedes bezüglich auf eine andere der 4 Curven, wenn die zweite die Einhüllende der Krümmungsaxe der ersten, die vierte die der dritten, und die erste die Einhüllende der rectificirenden Geraden der vierten ist. Ich verweise dabei auf meine Curventheorie § 66 und 68, wo gleich anfangs die Relationen

$$\vartheta_2 = \tau_1; \qquad \vartheta_1 = \sigma_4$$
$$\tau_2 = -\vartheta_1; \qquad \tau_1 = \lambda_4$$

aufgestellt sind, so dass auch

$$\sigma_4 = \lambda_3; \qquad \lambda_4 = \sigma_3$$

Digitized by Google

V.

Ueber die von Humbert untersuchten Kugelflächenstücke.

Von

R. Hoppe.

Der Aufsatz von Humbert: „Sur quelques propriétés des aires sphériques“ in Jordan, Journal de Math. t. IV. p. 313 ist sehr geeignet, zu weiterer Verfolgung des Gegenstandes anzuregen. Was ich im Gegenwärtigen dazufüge, besteht erstens in einer neuen Herleitung des Hauptresultats, zweitens in der Untersuchung einer dasselbe betreffenden Frage nebst einigen Anwendungen. Bei der Berechnung der durch einen Kegel begrenzten sphärischen Flächen wendet nämlich Humbert eine mehrfache Vermittelung an, indem er eine unendlich vielseitige Pyramide erst in den Kegel übergehen lässt und von den Flächen erst nur die Variationen bestimmt; auch bedarf er zur Darstellung des Resultats der Einführung zweier neuen Begriffe. Mögen nun diese Umwege vielleicht einem Zwecke dienen, so ist jedenfalls die directe, weit kürzere Berechnung und die Darstellung in lauter gegebenen Grössen, wie ich sie gebe, daneben nicht ohne Interesse.

I.

Die Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

werde von einer Geraden

$$x=-h+u\cos\vartheta;\quad y=u\sin\vartheta\cos\varphi;\quad z=u\sin\vartheta\sin\varphi \qquad (1)$$

in 2 reellen Punkten (u_1) und (u_2) geschnitten. Dann sind u_1 und u_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 - 2hu\cos\vartheta = r^2 - h^2$$

woraus:

$$u_1 = h\cos\vartheta + q; \qquad u_2 = h\cos\vartheta - q$$

$$q = \sqrt{r^2 - h^2\sin^2\vartheta}$$

Ihnen entsprechen die Werte:

$$x_1 = -h\sin^2\vartheta + q\cos\vartheta$$
$$x_2 = -h\sin^2\vartheta - q\cos\vartheta$$

Ist nun $h > r$, so ist die Differenz der absoluten Strecken der x Axe innerhalb der Kugel und ausserhalb der 2 Schnittpunktsprojectionen:

$$(r - x_1) - (x_2 + r) = 2h\sin^2\vartheta$$

Ist $h < r$, so ist deren Summe:

$$(r - x_1) + (-x_2 - r) = 2h\sin^2\vartheta$$

Multiplicirt man diese Strecken mit dem grössten Kreise der Kugel 4Rr, so drücken die Producte die Kugelzonen aus, deren Höhen die Strecken sind. Ein Element jeder Zone begrenzt von den 2 Meridianen φ und $\varphi + \partial\varphi$ erhält man, wenn man statt des Kreises dessen Element $r\partial\varphi$ setzt. Daher ist, jenachdem $h >$ oder $< r$, die Differenz oder Summe der 2 Zonenelemente

$$= 2hr\partial\varphi\sin^2\vartheta \tag{2}$$

Beschreibt nun die Gerade (1), indem sie beständig durch den festen Punkt der x Axe $x = -h$ geht und die Kugel beständig reell schneidet, eine geschlossene konische Fläche ohne Doppelgerade, innerhalb deren die x Axe liegt, so begrenzt sie 2 Kugelflächenstücke, deren Differenz oder Summe, jenachdem die Kegelspitze ausser- oder innerhalb der Kugel liegt, $= \omega$ sei. Das Element derselben ist ausgedrückt durch (2). Um ω zu erzeugen hat φ von O bis 4R zu variiren. Folglich ist

$$\omega = 2hr\int_0^{4R} \partial\varphi\sin^2\vartheta \tag{3}$$

Der als letzter Factor hier auftretende Integralausdruck hängt von der Kugel gar nicht, sondern allein vom Kegel (wie wir zur Kürzung die geschlossene konische Fläche nennen) und von der Richtung der x Axe relativ zum Kegel ab. Daher variirt ω nur proportional mit h und r, wenn man den Kegel in der Richtung der x Axe, d. h. der Verbindung von Spitze und Mittelpunkt, verschiebt und

Digitized by Google

die Kugel bei festem Mittelpunkt verändert. Es bleibt nun die Frage, wie sich ω mit der Richtung der Axe ändert. Diese wollen wir jetzt untersuchen.

II.

Hier sei die Kegelspitze Anfang der xyz, die x Axe beliebig innerhalb des Kegels,

$$x = u\cos\vartheta;\quad y = u\sin\vartheta\cos\varphi;\quad z = u\sin\vartheta\sin\varphi \tag{4}$$

und der Kegel gegeben durch die periodische eindeutige Function:

$$\vartheta = \vartheta(\varphi) = \vartheta(\varphi + 4\mathrm{R})$$

Eine zweite Axe bilde in der xy Ebene mit der ersten den Winkel ε. Die Coordinaten derselben Erzeugenden (4) werden in Bezug auf diese:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon = u\cos\vartheta_1 \\ y_1 &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon = u\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 \\ z_1 &= z \qquad\qquad\qquad\;\; = u\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{vmatrix} y_1 & \partial y_1 \\ z_1 & \partial z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \partial x \\ z & \partial z \end{vmatrix} \sin\varepsilon + \begin{vmatrix} y & \partial y \\ z & \partial z \end{vmatrix} \cos\varepsilon$$

das ist:

$$\begin{aligned} \partial\varphi_1 \sin^2\vartheta_1 &= \partial\varphi \sin^2\vartheta\cos\varepsilon \\ &\quad + (\partial\vartheta\sin\varphi + \partial\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi)\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Geht also ω für die neue Axe in ω_1 über, so ist

$$\omega_1 = \omega\cos\varepsilon + 2\chi\sin\varepsilon$$

wo nach einer teilweisen Integration

$$\chi = 2hr \int_0^{4\mathrm{R}} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \sin^2\vartheta \sin\varphi\, \partial\varphi$$

wird.

Die y Axe hatte noch beliebige Richtung. Aendert sich jetzt die Richtung der Ablenkung der x Axe, so ändert sich nur der Anfang der φ. Es geht φ über in $\varphi + \zeta$, also, wenn

$$\psi = 2hr \int_0^{4\mathrm{R}} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \sin^2\vartheta \cos\varphi\, \partial\varphi$$

gesetzt wird, χ in

$$\chi\cos\zeta+\psi\sin\zeta = 2rh\int_0^{4R}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\sin^2\vartheta\sin(\varphi+\zeta)\partial\varphi$$

Bei fester Lage des Axensystems der xyz wird, wenn der Kugelmittelpunkt die Coordinaten

$$x = h\cos\varepsilon,\quad y = h\sin\varepsilon\cos\zeta,\quad z = h\sin\varepsilon\sin\zeta$$

hat,

$$\omega(\varepsilon,\ \zeta) = \omega(0,\ 0)\cos\varepsilon+2\chi\sin\varepsilon\cos\zeta+2\psi\sin\varepsilon\sin\zeta$$

sein, woraus:

$$\omega(\varepsilon,\ 0) = \omega(0,\ 0)\cos\varepsilon+2\chi\sin\varepsilon$$
$$\omega(\varepsilon,\ R) = \omega(0,\ 0)\cos\varepsilon+2\psi\sin\varepsilon$$

und man hat die Relation:

$$\omega(\varepsilon,\ \zeta) = \omega(0,\ 0)(1-\cos\zeta-\sin\zeta)+\omega(\varepsilon,\ 0)\cos\zeta+\omega(\varepsilon,\ R)\sin\zeta$$

Der Fall, wo χ und ψ verschwinden, lässt sich leicht speciell herbeiführen. Ist $\vartheta(\varphi) = \vartheta(\varphi+2R)$, so ist

$$\int_0^{4R}\vartheta'(\varphi)\sin^2\vartheta\sin(\varphi+\zeta)\partial\varphi = 0 \tag{5}$$

daher für jedes ε und jedes ζ

$$\omega(\varepsilon,\ \zeta) = \omega(0,\ 0)\cos\varepsilon$$

Ist statt dessen $\vartheta(\varphi) = \vartheta(4R-\varphi)$, so verschwindet nur χ. Gl. (5) ist im allgemeinen nur für $\zeta = 0$ oder $= 2R$ erfüllt, und es ergibt sich der Satz:

„Teilt eine durch die Spitze gehende Ebene den Kegel in 2 congruente Hälften, so variirt ω bei beliebig veränderter Lage des Kegels relativ zur Kugel nur mit dem Factor $hr\cos\varepsilon$. Teilt sie ihn in 2 symmetrische Hälften, so kann der Kugelmittelpunkt noch längs der Symmetrieebene beliebig verschoben werden, während ω proportional $hr\cos\varepsilon$ bleibt.“

Beide Fälle finden zugleich statt, wenn der Kegel von 2 Ebenen symmetrisch geteilt wird, z. B. beim Kegel 2. Grades.

Ist $\vartheta(\varphi) = \vartheta\left(\varphi+\frac{4R}{n}\right)$, wo n ganze Zahl >1, so ist die Grösse (5) gleichfalls null, weil

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin\left(\varphi+\frac{4kR}{n}+\zeta\right) = 0$$

Digitized by Google

ist. Für ungerades n hat dann der Kegel n Symmetrieebenen, für gerades 2 orthogonale.

Beziehen sich also ϑ, φ als Polarcoordinaten auf eine beliebig gewählte Kegelaxe, und bedeutet h die Projection der Entfernung des Mittelpunkts von der Spitze auf die Kegelaxe, so gilt der Wert (3) in den genannten Fällen, wo $\psi = \chi = 0$ ist, für jede Lage des Kegels zur Kugel.

III.

Zur Anwendung auf ebenflächige Kegel, d. h. Pyramiden oder Ecken, wollen wir das Integral (3) transformiren. Des bequemern Ausdrucks wegen beschreiben wir um den Scheitel der Ecke mit dem Radius 1 eine Kugel. Diese wird vom Kegel in der Linie s, von seiner Axe im Punkte O geschnitten. Die sphärische Tangente in s im laufenden Punkte P sei PT, und der Normalbogen OT senkrecht auf ihr.

Vermöge der Sinusproportion in dem sphärischen Dreieck zwischen dem Bogenelement ∂s und dem Punkte O und im Dreieck OPT hat man:

$$\sin OPT = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\sin\vartheta = \frac{\sin OT}{\sin\vartheta}$$

woraus, wenn $OT = \eta$ gesetzt wird:

$$\partial\varphi \sin^2\vartheta = \partial r \sin\eta$$

Ist nun der Kegel eine Ecke, deren n Seiten $s_1, s_2, \ldots s_n$, und sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ die normalen Winkelabstände der Axe von den Seiten, so ist η längs jeder Seite constant, und man erhält:

$$\omega = 2hr \sum_{l=1}^{k=n} s_k \sin\eta_k \tag{6}$$

IV.

Das einfachste Beispiel eines Kegels, der keine Symmetrieebene und doch eine Periode über den halben Umlauf, mithin auch eine Centralaxe hat derart, dass jede durch sie gehende Ebene den Kegel in 2 congruente Teile teilt, ist eine vierseitige Ecke mit gleichen Gegenseiten.

Eine solche Ecke (oder sphärisches Viereck) hat mit dem ebenen Parallelogramm die Eigenschaften gemein, dass auch die Gegenwinkel gleich sind, und dass ihre Diagonalen einander halbiren.

Digitized by Google

Die Seiten seien a, b, die Winkel α, β, die Diagonalen c, d, so dass c die Winkel β in β_1 und β_2 teilt bzhw. zwischen b, c und a, c liegend. Im Dreieck abc liegen den Seiten a, b, c bzhw. gegenüber β_1, β_2, α; daher ist

$$\cos\beta_1 = \frac{\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos\alpha}{\sin c}; \quad \sin\beta_1 = \frac{\sin b\sin\alpha}{\sin c}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{\cos b\sin a - \sin b\cos a\cos\alpha}{\sin c}; \quad \sin\beta_2 = \frac{\sin a\sin\alpha}{\sin c}$$

Entwickelt man hieraus den Wert von $\sin(\beta_1+\beta_2) = \sin\beta$ und setzt zur Kürzung

$$\lambda = \cos a + \cos b; \qquad \mu = \cos a\cos b; \qquad \nu = \sin a\sin b$$

drei Grössen die in der Relation stehen

$$\lambda^2 + \nu^2 = (1+\mu)^2$$

so erhält man, mit Beachtung, dass

$$\sin^2 c = 1 - (\mu + \nu\cos\alpha)^2 \tag{7}$$

ist:

$$\sin\beta = \frac{\lambda\sin\alpha}{1+\mu+\nu\cos\alpha} \tag{8}$$

und analog:

$$\sin\alpha = \frac{\lambda\sin\beta}{1+\mu+\nu\cos\beta}$$

woraus nach Multiplication:

$$(1+\mu+\nu\cos\alpha)(1+\mu+\nu\cos\beta) = \lambda^2 = (1+\mu)^2 - \nu^2$$

$$\cos\beta = -\frac{\nu+(1+\mu)\cos\alpha}{1+\mu+\nu\cos\alpha} \quad \text{oder}$$

$$(1+\mu)(\cos\alpha+\cos\beta) + \nu(1+\cos\alpha\cos\beta)$$

woraus zu ersehen, dass $\cos\alpha+\cos\beta$ stets negativ ist, weil die 3 übrigen Factoren positiv sind (wofern a und b nicht $> 2R$). Setzt man nun:

$$\frac{\nu}{1+\mu} = \sin t \quad \text{das ist} \quad \frac{\sin a\sin b}{1+\cos a\cos b} = \sin t$$

$$-\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta} = \cos\tau \quad \text{das ist} \quad \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta} = \sin\tau$$

und nimmt t und τ im ersten Quadranten, so hat man zwischen Seiten und Aussenwinkeln die reciproke Beziehung:

$$t+\tau = R$$

Digitized by Google

Die Centralaxe habe von den Seiten a, b bzhw. die normalen Winkelabstände e, f; dann ist

$$\sin e = \sin\frac{c}{2}\sin\beta_2 = \frac{\sin a\sin\alpha}{2\cos\frac{c}{2}}$$

$$\sin f = \sin\frac{c}{2}\sin\beta_1 = \frac{\sin b\sin\alpha}{2\cos\frac{c}{2}}$$

ferner nach Gl. (7) und (8)

$$2\cos^2\frac{c}{2} = 1+\cos c = 1+\mu+\nu\cos\alpha = \frac{\lambda\sin\alpha}{\sin\beta}$$

folglich

$$\sin e = \sin a\sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\lambda}};\quad \sin f = \sin b\sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\lambda}}$$

Dies in Gl. (6) eingeführt gibt:

$$\omega = 2rh(a\sin a+b\sin b)\sqrt{\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\cos a+\cos b}}$$

gültig für jede Lage der Ecke relativ zur Kugel, wenn h die Projection der Entfernung des Mittelpunkts vom Scheitel auf die Centralaxe bezeichnet.

V.

Ist die Ecke regelmässig und hat n Seiten, jede $= a$, bezeichnet ferner e den normalen Winkelabstand der Centralaxe von der Seite, so ist

$$\sin e = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cot\frac{2R}{n}$$

folglich

$$\omega = 2nrha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cot\frac{2R}{n}$$

gültig für jede Lage der Ecke zur Kugel, wenn h die Projection der Entfernung des Mittelpunkts vom Scheitel auf die Centralaxe bezeichnet.

In den zwei von Humbert in Compt. Rend. CVII. 944 mitgeteilten Resultaten ist gemeinsam $h = r$, $n = 3$ und einzeln $a = R$ und $\frac{2}{3}R$. Hier wird einzeln

$$\omega = 2\sqrt{3}Rr^2 \quad\text{und}\quad \omega = \tfrac{4}{3}Rr^2 = \tfrac{1}{6}\text{ Kugelfläche}$$

beides übereinstimmend mit jenen Angaben.

Digitized by Google

VI.

Auswertung einiger bestimmten Integrale durch Anwendung des freien Integrationsweges.

Von

Ulrich Bigler.

Wie die mathematische Litteratur genügend zeigt, ist der Gebrauch des freien Integrationsweges noch nicht allgemeines Eigentum der Mathematiker geworden. Obschon der Beweis für die Gültigkeit desselben unantastbar vorliegt, so zeigt sich doch unter den meisten Mathematikern immer noch eine eigentümliche Scheu vor dem imaginären Gebiete des Zahlenfeldes, so dass das Betreten derselben so viel wie möglich vermieden wird. Allein der heutige Stand der math. Disciplin erfordert nicht nur die Kenntniss derselben, sondern auch seine Anwendung. Wie schon die Ausmittlung bestimmter Integrale durch den Gebrauch des freien Weges oft sehr erleichtert wird, so gibt es auch Gebiete, die in ihrer vollen Allgemeinheit ohne Anwendung desselben gar nicht betrachtet werden können. Ich erinnere hier nur an die Besselschen Functionen und an die Heineschen Kugelfunctionen $P^a(x)$ und $Q^a(x)$. Aus der Scheu vor krummlinigen Integrationswegen erklärt sich denn auch der Umstand, dass oft für ein und dieselbe Function verschiedene Integralformen mit verschiedenen Namen unterschieden werden, die doch alle hinsichtlich der Lage des Weges in Bezug auf die kritischen Punkte wesentlich ein und dieselben sind, und sich nur in der zufälligen Form des Weges von einander unterscheiden. Auf diesen Uebelstand hat auch schon Herr Prof. Schläfli an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten hingewiesen. Mein Aufsatz enthält nun die Auswertung einiger bestimmten Integrale unter diesem allgemeineren Gesichtspunkte. Die

Digitized by Google

meisten dieser Integrale sind dem Lehrbuch von Dienger entnommen, wo sie nach der gewöhnlichen Methode, also mittelst Doppelintegralen, bestimmt werden. Ich habe nun in allen ausgewählten Beispielen die Doppelintegrale durch einfache mit freien Integrationswegen ersetzt und ich glaube, meine Auflösungen seien natürlicher und darum auch einfacher als die von Dienger.

Zur Erklärung schicke ich folgendes voraus: Wenn eine Variable x durch $a+ib = me^{i\Theta}$ dargestellt ist, wo a, b, Θ reell und m positiv sind, so schreibe ich $a = \text{reep.}\, x$, $b = \text{imep.}\, x$, $m = \text{mod.}\, x$ und nenne m den absoluten Betrag, Θ die Phase der Variabeln. Die Ebene, in der a und b die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes sind, der den augenblicklichen Wert der Variabeln x versinnlicht, nenne ich x Feld, die Abscissenaxe Realitätslinie, die Ordinatenaxe laterale Axe und sage, ∞ sei durch den Horizont dargestellt. Einen grossen positiven Wert, der bestimmt ist, unendlich zu werden, nenne ich Ostpunkt und unterscheide so die Weltgegenden des Horizontes. Wenn die Phase Θ wächst, so nenne ich in Bezug auf den Ursprung die Bewegung des Punktes x positiv oder rechtläufig, wenn sie abnimmt, negativ od. rückläufig. Pole eines Integrals nenne ich diejenigen Punkte, in denen die zu integrirende Function den Charakter einer ganzen Function verliert. Ein Integrationsweg, dessen Anfang und Ende zusammenfallen, ohne dass der Wert des Integrals wiederkehrt, heisst Schlinge, geworfen aus dem vereinigten Anfangs- und Endpunkte um die betreffenden Pole. Wenn dagegen der Integrand auf denselben Wert zurückkommt, so heisst der Weg eine geschlossene Curve.

$$\text{I.} \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4 \log \sin x}{2 - \sin^2 x} \,.\, dx$$

Wenn $s = \sin^2 x$, also $ds = 2 \sin x \cos x\, dx$, $dx = \dfrac{ds}{2\sqrt{s(1-s)}}$ gesetzt wird, so erhält man

$$A = \int_0^1 \frac{-\log s}{2-s} \times \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}}$$

Die Pole dieses Integrales liegen nun in $s = 0, 1, 2$. Es sei nun

$$A_1 = \int \frac{-\log s}{2-s} \times \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}}$$

Der Weg von A_1 ist eine aus dem Pole 0 um den Pol 1 geworfene,

Digitized by Google

rechtläufige Schlinge (Fig. 1). Im Punkte a werde $\log z$ reell und $\sqrt{z(z-1)}$ positiv verstanden. Wird nun dieser Schlingenweg auf das Stück der Realitätslinie von 0 bis 1 zusammengedrängt, so erhält man

$$A_1 = i\int_0^1 \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} - i\int_1^0 \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}$$

und also ist

$$A_1 = 2iA$$

somit

$$A = \frac{1}{2i}\int \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 1)}$$

Um diesen Weg ausdehnen zu können, muss noch der Pol 2 durch die Schlinge eingeschlossen werden. Es sei deshalb

$$A_{11} = \frac{1}{2i}\int \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}}$$

Der Weg dieses Integrals ist eine aus 0 um die Pole 1 und 2 geworfene, rechtläufige Schlinge (Fig. 2). Gibt man nun derselben die in (Fig. 3) gezeichnete Form und beachtet, dass sich die Wege von a bis b aufheben, so erhält man

$$A_{11} = \frac{1}{2i}\int \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 1)}$$

$$+ \frac{1}{2i}\int \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}} \quad \text{(Weg eine geschlossene Curve allein um den Pol 2).}$$

Nun ist aber nach Cauchy

$$\frac{1}{2i}\int \frac{-\log z}{2-z} \times \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}} \text{ (geschlossene Curve um 2)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\log 2$$

somit ist also

$$A + \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\log 2 = \frac{1}{2i}\int \frac{\log z}{z-2} \times \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 2. Erkennungsort in } a\text{)}$$

In diesem Integrale tritt nun der Ausdehnung des Weges kein Punkt mehr hindernd entgegen. Man führe deshalb den Schlingenweg von 0 aus auf der Realitätslinie nach dem Westpunkte; von hier aus werde der ganze Horizont in positiver Richtung durchlaufen und vom Westpunkte kehre derselbe auf der Realitätslinie zum Anfangspunkte 0 zurück (Fig. 4). Nun aber verschwindet das Integral im Horizonte

Digitized by Google

wie $-\left(\frac{\log s}{s}+\frac{1}{s}\right)$. Im Punkte a ist $\log s$ verstanden. Man führe nun s von hier aus durch kleine, negative Halbkreise um die Pole auf die Südseite der westlichen Hälfte der Realitätslinie. Hier ist demnach $\log s = -i\pi + \log(-s)$ und auf der nördlichen Seite hat man $\log s = i\pi + \log(-s)$. Es ist somit

$$A = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\log 2 + \frac{1}{-2i}\int_0^{-N}\frac{-i\pi+\log(-s)}{s-2}\times\frac{ds}{\sqrt{(-s)(1-s)}}$$

$$+\frac{1}{-2i}\int_{-N}^{0}\frac{i\pi+\log(-s)}{s-2}\,\frac{ds}{\sqrt{(-s)(1-s)}}$$

also auch

$$A = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\log 2 + \pi\int_0^N\frac{dt}{(2+t)\sqrt{t(1+t)}}$$

Setzt man hier

$$2x^2 = \frac{t}{1+t}, \quad \frac{1}{1+t} = 1-2x^2, \quad 1+t = \frac{1}{1-2x^2}, \quad t+2 = \frac{2(1-x^2)}{1-2x^2}$$

$$dt = \frac{4x}{(1-2x^2)^2}$$

$$\frac{dt}{(2+t)\sqrt{t(1+t)}} = \sqrt{2}\,\frac{dx}{1-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

so wird

$$A = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\log 2 + \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

und man erhält schliesslich

$$A = \pi\sqrt{2}\log(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

$$\text{II.}\quad f(a,\,r) = \int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\times\frac{\varphi\,d\varphi}{\varphi^2+a^2}$$

Weil

$$1-2r\cos\varphi+r^2 = r^2 - r(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+1 = (r-e^{i\varphi})(r-e^{-i\varphi})$$

und

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left[(r - e^{-i\varphi}) - (r - e^{i\varphi})\right]$$

so ist

$$\frac{\sin\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{r - e^{i\varphi}} - \frac{1}{r - e^{-i\varphi}}\right)$$

und somit

$$f(a, r) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(\frac{1}{r - e^{i\varphi}} - \frac{1}{r - e^{-i\varphi}}\right)\frac{\varphi\, d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

oder auch

$$f(a, r) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{1}{r - e^{i\varphi}} \times \frac{\varphi\, d\varphi}{\varphi^2 + a^2} - \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{1}{r - e^{-i\varphi}} \times \frac{\varphi\, d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Wird nun im ersten Integral φ durch $-it$ und im zweiten durch it ersetzt, so erhält man

$$f(a, r) = \frac{1}{2i}\int_{iN}^{-iN} \frac{1}{e^t - r} \times \frac{t\, dt}{t^2 - a^2}$$

Ich nehme nun an mod $r < 1$ und resp. $a =$ pos.; die Pole dieses Integrals liegen in $t = a$, $-a$, $\log s + i\varphi$, wenn $r = se^{i\varphi}$. Weil nun aber $\log s$ einen negativen Wert hat, so liegen die beiden Pole $-a$ und $\log s + i\varphi$ auf der Westseite der lateralen Axe und nur a liegt östlich derselben. Weil das Integral im östlichen Horizonte verschwindet, so schalte man in obigen Integrationsweg den rechtläufigen, östlichen Horizont ein, und erhält so einen neuen Weg, der den Rand des östlichen Zahlenfeldes umgibt (Fig. 5). Diese geschlossene Curve lässt sich aber auf den Pol a zusammenziehen und man hat somit

$$f(a, r) = \frac{1}{2i}\int \frac{1}{e^t - r} \times \frac{t\, dt}{t^2 - a^2} \quad \text{(Weg wie in Fig. 6)}$$

also nach Cauchy

$$f(a, r) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{e^a - r} = \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \times \frac{\varphi\, d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Wäre die reelle Componente von a neg. angenommen worden, so würde der in Fig. 5 dargestellte Integrationsweg nur den einzigen Pol $(-a)$ eingeschlossen haben. In diesem Falle ist also

$$f(a, r) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{e^{-a} - r} = \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \times \frac{\varphi\, d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Digitized by Google

Ist schliesslich mod. $r > 1$, so ersetze man im anfänglichen Integralausdrucke r durch $\frac{1}{r_1}$, wo dann wieder mod. $r_1 < 1$ ist.

$$\text{III.} \quad f(a, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log(1 - 2r\cos\varphi + r^2) \frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Weil

$$1 - 2r\cos\varphi + r^2 = (r - e^{+i\varphi})(r - e^{-i\varphi}) = (1 - re^{-i\varphi})(1 - re^{i\varphi})$$

so ist

$$f(a, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log(1 - re^{i\varphi}) \frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log(1 - re^{-i\varphi}) \frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Wird nun im ersten Integral φ durch it und im zweiten durch $-it$ ersetzt, so erhält man

$$f(a, r) = \frac{i}{\pi} \int_{iN}^{-iN} \log(1 - re^{-t}) \frac{a\,dt}{a^2 - t^2}$$

Die Pole dieses Integrals liegen in $t = a$, $-a$, $\log r$. Wird nun mod. $r < 1$ und recp. $a =$ pos. angenommen, so liegt nur der Pol a auf der östlichen Seite der lateralen Axe, und weil das Integral im östlichen Horizonte verschwindet, so hat man

$$f(a, r) = \frac{i}{\pi} \int \log(1 - re^{-t}) \frac{a\,dt}{a^2 - t^2}$$

(der Weg wird durch den Rand des östlichen Zahlenfeldes gebildet Fig. 5).

Wird nun dieser Weg auf den Pol a zusammen gezogen, so folgt

$$f(a, r) = \frac{i}{\pi} \int \log(1 - re^{-t}) \frac{a\,dt}{a^2 - t^2}$$

(Weg eine geschlossene, rechtläufige Curve um a (Fig. 6))

also nach Cauchy

$$f(a, r) = \log(1 - re^{-a}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log(1 - 2r\cos\varphi + r^2) \frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Wird recp. $a =$ negativ angenommen, so schliesst obiger Integrationsweg nur den Pol $(-a)$ ein, und man erhält in diesem Falle

Digitized by Google

$$f(a, r) = \log(1 - r e^a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log(1 - 2r\cos\varphi + r^2)\,\frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Ist ferner mod. $r > 1$, so liegt auch der Pol $\log r$ auf der östlichen Seite der lateralen Axe und der Integrationsweg längs des Randes des östlichen Zahlenfeldes kehrt nicht mehr auf seinen anfänglichen Wert zurück. In diesem Falle setze man

$$f(a, r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log r^2 \cdot \frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log\left(\frac{1}{r^2} - 2\,\frac{1}{r}\cos\varphi + 1\right)\frac{a\,d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

$$= \frac{i}{\pi}\log r\int_{iN}^{-iN} \frac{a\,dt}{a^2 - t^2} + \frac{i}{\pi}\int_{iN}^{-iN} \log\left(1 - \frac{1}{r}\cdot e^{-t}\right)\frac{a\,dt}{a^2 - t^2}$$

und also durch Einschaltung des östlichen Horizontes

$$f(a, r) = \frac{i}{\pi}\log r\int \frac{a\,dt}{a^2 - t^2} \quad \text{(Weg wie in Fig. 5)}$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int \log\left(1 - \frac{1}{r}e^{-t}\right)\frac{a\,dt}{a^2 - t^2} \quad \text{(Weg wie in Fig. 5)}$$

$$= \frac{i}{\pi}\log r\int \frac{a\,dt}{a^2 - t^2} \quad \text{(Weg wie in Fig. 6)}$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int \log\left(1 - \frac{1}{r}e^{-t}\right)\frac{a\,dt}{a^2 - t^2} \quad \text{(Weg wie in Fig. 6)}$$

und somit

$$f(a, r) = \log r + \log\left(1 - \frac{1}{r}e^{-a}\right) = \log(r - e^{-a})$$

wenn recp. a = pos. und

$$f(a, r) = \log(r - e^a)$$

wenn recp. a = negativ.

$$\text{IV.} \quad f(r) = \int_0^\pi \log(1 - 2r\cos\varphi + r^2)\,d\varphi$$

Weil

$$f(r) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(1 - re^{i\varphi})(1 - re^{-i\varphi})\,d\varphi$$

so erhält man durch die Substitution $x = e^{i\varphi}$

$$f(r) = \frac{1}{2i}\int \log\cdot\left(\frac{(1-rx)(x-r)}{x}\right)\times\frac{dx}{x}$$

(Weg der Einheitskreis in positiver Richtung Fig. 7).

Die Pole dieses Integrals liegen in $x = 0,\ r,\ \frac{1}{r}$. Wird nun mod. $r < 1$ angenommen, so liegen die beiden Pole 0 und r innerhalb, und nur $\frac{1}{r}$ liegt ausserhalb des Integrationsweges. Es ist nun

$$f(r) = \frac{1}{2i}\int \log\left(1-\frac{r}{x}\right)\times\frac{dx}{x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 7)}$$

$$+\frac{1}{2i}\int \log(1-rx)\times\frac{dx}{x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 7)}$$

Das erste Integral schliesst 2 Pole ein und keinen aus; man kann deshalb den Weg so weit ausdehnen, bis eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von x möglich ist. Weil aber

$$\log\left(1-\frac{r}{x}\right) = -\frac{r}{x}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{x^2}+\ldots$$

so kommt im Integrand der Term $\frac{1}{x}$ gar nicht vor; der Wert des ersten Integrals ist somit null. Das zweite Integral schliesst nur den Pol $= 0$ ein; es ist somit

$$f(r) = \frac{1}{2i}\int \log(1-rx)\times\frac{dx}{x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 7)}$$

also nach Cauchy

$$f(r) = \int_0^{\pi} \log(1-2r\cos\varphi+r^2)\,d\varphi = 0$$

wenn mod. $r < 1$ ist.

Ist hingegen mod. $r > 1$, so schliesst das Integral

$$\frac{1}{2i}\int \log\left(\frac{(r-x)(rx-1)}{x}\right)\times\frac{dx}{x}$$

die beiden Pole 0 und $\frac{1}{r}$ ein und r aus.

Man hat

$$(r) = \frac{1}{2i}\int \log\left(r-\frac{1}{x}\right)\times\frac{dx}{x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 8)}$$

Digitized by Google

$$+\frac{1}{2i}\int \log(r-x) \times \frac{dx}{x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 8)}$$

Das erste Integral enthält nur die Pole 0 und $\frac{1}{r}$, schliesst also beide ein und keinen aus. Nun ist

$$\frac{1}{2i}\int \log\left(r-\frac{1}{x}\right) \times \frac{dx}{x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 8)}$$

$$= \frac{\log r}{2i}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2i}\int \log\left(1-\frac{1}{xr}\right) \times \frac{dx}{x}$$

den Weg des zweiten Integrals dehne man so weit aus, bis eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von x möglich ist. Weil aber in der Entwicklung der Term $\frac{1}{x}$ gar nicht vorkommt, so ist der Wert des Integrals $\frac{1}{2i}\int \log\left(1-\frac{1}{xr}\right) \times \frac{dx}{x}$ gleich null. Man hat somit

$$f(r) = \log r \cdot \frac{1}{2i}\int \frac{dx}{x} \quad \text{(Weg Fig. 8)}$$

$$+\frac{1}{2i}\int \log(r-x) \times \frac{dx}{x} \quad \text{(Weg Fig. 8)}$$

also

$$f(r) = 2\pi \log r = \int_0^\pi \log(1-2r\cos\varphi + r^2)\, d\varphi$$

wenn mod. $r > 1$. Dieses letzte Resultat erhält man aber kürzer auf folgende Art. Es ist unmittelbar

$$f(r) = 2\log r \int_0^\pi d\varphi + \int_0^\pi \log\left(1-2\frac{1}{r}\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\right) d\varphi$$

und weil nun das zweite Integral den Wert null hat, so hat man sogleich

$$f(r) = 2\pi \log r$$

$$\text{V.} \quad f(r) = \frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\log 2\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2}\, d\varphi$$

Man betrachte folgendes Integral:

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int \left(\log(x+1) + \log\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{1}{x-r} + \frac{r}{1-rx}\right) dx$$

(Weg wie in Fig. 9)

Digitized by Google

Die Variable x durchläuft hier den Einheitskreis mit Ausnahme kleiner Halbkreise, eines rechtläufigen um 1 und eines rückläufigen um -1 (Fig. 9). Ist nun mod. $r < 1$, so schliesst dieser Weg die Pole 0, r, $+1$ ein und (-1), $\frac{1}{r}$ aus. Im Punkte a (östlich von 1) habe $\frac{x^2-1}{x}$ eine nulle Phase und gewinnt durch die positive Viertelsdrehung die Phase $\frac{\pi}{2}$; im nördlichen Halbkreise ist demnach

$$\log \frac{x^2-1}{x} = \frac{i\pi}{2} + \log 2 \sin \varphi$$

wenn $x = e^{i\varphi}$ gesetzt wird. Im südlichen Halbkreise denke man sich $x = e^{-i\varphi}$ gesetzt; hier ist

$$\log \frac{x^2-1}{x} = -\frac{i\pi}{2} + \log 2 \sin \varphi$$

Demnach ist

$$S = \frac{(1-r^2)}{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{i\pi}{2} + \log 2 \sin \varphi\right) + \left(-\frac{i\pi}{2} + \log 2 \sin \varphi\right)\right] \cdot \frac{d\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$$

also

$$f(r) = \frac{1}{2i\pi} \int \left(\log(x+1) + \log \frac{x-1}{x}\right) \left(\frac{1}{x-r} + \frac{r}{1-rx}\right) dx$$

(Weg wie in Fig. 9)

Nun ist aber

$$f(r) = \frac{1}{2i\pi} \int \log(x+1) \frac{dx}{x-r} + \frac{1}{2i\pi} \int \log(x+1) \frac{r\,dx}{1-rx}$$
$$+ \frac{1}{2i\pi} \int \log \frac{x-1}{x} \cdot \frac{dx}{x-r} + \frac{1}{2i\pi} \int \log \frac{x-1}{x} \times \frac{r\,dx}{1-rx} \quad \text{(Weg Fig. 9.)}$$

Das Integral $\frac{1}{2i\pi} \int \log(x+1) \frac{dx}{x-r}$ hat nur die zwei Pole -1 und r, von welchen nur der letztere eingeschlossen wird. Demnach ist

$$\frac{1}{2i\pi} \int \log(x+1) \frac{dx}{x-r} \quad \text{(Weg Fig. 9)} \quad = \log(1+r)$$

Das zweite Integral $\frac{1}{2i\pi} \int \log(x+1) \frac{r\,dx}{1-rx}$ schliesst seine beiden Pole -1 und $\frac{1}{r}$ aus, somit ist sein Wert null. Das Integral

Digitized by Google

$\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\times\frac{dx}{x-r}$ hat die Pole 0, 1, r, welche alle eingeschlossen werden. Man kann daher den Weg so weit ausdehnen, bis eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von x möglich ist. Weil aber in dem Producte der beiden Reihen für $\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$ und $\frac{1}{x-r}$ der Term mit x^{-1} fehlt, so ist der Wert dieses Integrales ebenfalls null. Das vierte und und letzte Integral ist $\frac{1}{2i\pi}\int\log\frac{x-1}{x}\times\frac{r\,dx}{1-rx}$; dasselbe schliesst die Pole 0 und 1 ein und $\frac{1}{r}$ aus. Man gebe nun dem Integrationswege die in Fig. 10 gezeichnete Form. Anfangs- und Endpunkt sollen mit dem Westpunkte zusammenfallen. Weil das Integral im Horizonte verschwindet, so setze man an das Ende des obigen Weges den ganzen rückläufigen Horizont an und weil auf diesem Wege den Integrand mit dem gleichen Werte im Westpunkte anlangt, mit dem er ausgegangen ist, so erhält man eine geschlossene Curve, welche die Pole 0 und 1 ausschliesst, dagegen den Pol $\frac{1}{r}$ rückläufig umgibt (Fig. 11). Diesem neuen Wege kann man nun die in Fig. 12 gezeichnete Gestalt geben. Man hat demnach

$$\frac{1}{2i\pi}\int\log\frac{x-1}{x}\times\frac{r\,dx}{1-xr}\quad\text{(Weg Fig. 9)}$$
$$=\frac{1}{2i\pi}\int\log\frac{x-1}{x}\times\frac{dx}{x-\frac{1}{r}}\quad\text{(Weg wie in Fig. 12)}$$

also nach Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int\log\frac{x-1}{x}\times\frac{r\,dx}{1-xr}\quad\text{(Weg Fig. 9)}\quad=\log(1-r)$$

Man findet schliesslich

$$f(r)=\log(1-r^2)=\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\log 2\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,d\varphi$$

wenn mod. $r<1$ angenommen wird. Ohne die Eigenschaft des Verschwindens im Horizonte zu benutzen, kann man das Integral

$$\frac{1}{2i\pi}\int\log\frac{x-1}{x}\times\frac{r\,dx}{1-xr}\quad\text{(Weg wie in Fig 9)}$$

auch auf folgende Art berechnen. Weil der Pol $x=r$ weggefallen ist, so kann man den Weg auf die Realitätslinien von 0 bis 1 zusammenpressen, und erhält

Digitized by Google

$$\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x} \times \frac{r\,dx}{1-xr} \quad \text{(Weg in Fig. 9)} =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \left(-i\pi+\log\frac{1-x}{x}\right)\frac{r\,dx}{1-rx} - \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \left(i\pi+\log\frac{1-x}{x}\right)\frac{r\,dx}{1-rx}$$

also

$$-\int_0 \frac{dx}{x-\frac{1}{r}} = \log(1-r)$$

Ist mod. $r > 1$, so hat man

$$f(r) = -\frac{1-\frac{1}{r^2}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\log 2\sin\varphi}{1-2\frac{1}{r}\cos\varphi+\frac{1}{r^2}}\,d\varphi$$

und weil nun hier mod. $\frac{1}{r} < 1$, so hat man sogleich

$$f(r) = -\log\left(1-\frac{1}{r^2}\right) = \log\frac{r^2}{r^2-1}$$

Es liegt mir nun daran, dieses Resultat auf dem gleichen Wege wie im Falle mod. $r < 1$ zu erhalten. Man hat gefunden

$$f(r) = \frac{1}{2i\pi}\int \log(x+1)\cdot\frac{dx}{x-r} + \frac{1}{2i\pi}\int \log(x+1)\frac{r\,dx}{1-rx}$$
$$+\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\cdot\frac{dx}{x-r} + \frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\cdot\frac{r\,dx}{1-rx}$$

Der allen 4 Integralen gemeinsame Weg ist durch Fig. 13 dargestellt. Derselbe fällt mit Ausnahme zweier kleinen Halbkreise mit dem Einheitskreise zusammen und schliesst die Pole 0, $\frac{1}{r}$, 1 ein, während -1, r ausserhalb derselben liegen. Das erste Integral $\frac{1}{2i\pi}\int \log(x+1)\frac{dx}{x-r}$ hat nur -1 und r als Pole, schliesst also keinen derselben ein und somit ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int \log(x+1)\frac{dx}{x-r} \quad \text{(Weg Fig. 13)} = 0$$

Das zweite Integral im Ausdrucke für $f(r)$ enthält nur die Pole -1 und $\frac{1}{r}$ und schliesst allein den letztern ein. Demnach ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int \log(x+1)\,\frac{r\,dx}{1-rx}\quad \text{(Weg Fig. 13)}\quad = \log\frac{r}{1+r}$$

Im dritten Integral finden sich die Pole 0, 1, r, von welchen die zwei ersten eingeschlossen werden, und nur der dritte ausserhalb des Integrationsweges liegt. Man gebe nun dem Wege die in Fig. 14 gezeichnete Form. Als Ausgangspunkt werde der Westpunkt gewählt. Weil das Integral im Horizonte verschwindet, so darf man in den so eben genannten Weg den ganzen rückläufigen Horizont einschalten und erhält so einen neuen Weg, wie ihn Fig. 15 darstellt. Wird nun derselbe ganz in das endliche Gebiet gebracht, so hat man eine geschlossene Curve, die nur den Pol r rückläufig umgibt, wie Fig. 16 es anzeigt. Man hat daher

$$\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\cdot\frac{dx}{x-r}\quad \text{(Weg wie in Fig. 13)}$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\cdot\frac{dx}{x-r}\quad \text{(Weg wie in Fig. 16)}$$

also nach Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\cdot\frac{dx}{x-r}\quad \text{(Weg wie in Fig. 13)} = \log\frac{r}{r-1}$$

Das vierte Integral endlich schliesst alle seine Pole ein. Weil der Horizont zugänglich ist, so verlege man den Weg dorthin, und weil hier das Integral verschwindet, so ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int \log\frac{x-1}{x}\cdot\frac{r\,dx}{1-rx}\quad \text{(Weg Fig. 13)}\quad = 0$$

Es ist somit für mod. $r > 1$

$$f(r) = \log\frac{r}{r+1} + \log\frac{r}{r-1} = \log\frac{r^2}{r^2-1}$$

$$\text{VI.}\quad f(a, x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^a\,\frac{dt}{t+x}$$

Wenn in diesem Integral x eine von null verschiedene Grösse bezeichnet, so erfordert die Convergenz, dass $a+1$ positiv sei. Wir nehmen ferner an, a sei keine ganze Zahl. Ich setze nun

Digitized by Google

$$S = \int e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x}$$

und der Weg sei eine aus dem Ostpunkte um die Pole $-x$ und 0 geworfene, rechtläufige Schlinge (Fig. 17). Dieselbe kann nun in eine den Pol $(-x)$ rechtläufig umlaufende geschlossene Curve und in eine aus dem Ostpunkte allein um den Pol 0 geworfene, rechtläufige Schlinge verwandelt werden (Fig. 18). Es ist somit

$$S = \int e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x} \quad \text{(Weg eine rechtl. geschlossene Curve um 0)}$$
$$+ \int e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x} \quad \text{(Weg eine aus dem Ostpunkte um 0 geworfene, rechtl. Schlinge)}$$

Der Wert des ersten Integrals ist aber nach Cauchy gleich $2i\pi e^{-i\pi a} e^x x^a$, und beim zweiten kann man die Schlinge auf die Realitätslinie von 0 bis $+\infty$ zusammenpressen und findet

$$\int e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x} \quad \text{(Weg eine aus dem Ostpunkte um 0 geworfene, rechtl. Schlinge (Fig. 18))}$$
$$= \int_\infty^0 e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x} + e^{2i\pi a} \int_0^\infty e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x}$$
$$= e^{i\pi a}\, 2i \sin a\pi \int_0^\infty e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x}$$

Also ist

$$S = 2 i\pi e^{i\pi a} e^a x^a + 2 i e^{i\pi a} \sin a\pi \times f(a, x)$$

oder

$$f(a, x) = \frac{1}{2 i e^{i\pi a} \sin a\pi} \int e^{-t} t^a \frac{dt}{t+x} \quad \text{(Weg wie in Fig. 17)}$$
$$- \frac{\pi}{\sin a\pi} e^x x^a$$

Man kann nun diesen Schlingenweg so weit ausdehnen, dass auf dem ganzen Wege mod. $t >$ mod. x und also $(t+x)^{-t}$ nach fallenden Potenzen von t entwickelt werden kann. Wird diese Entwickelung ausgeführt, so hat man

$$f(a, x) = \frac{1}{2 i e^{i\pi a} \sin a\pi} \times \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \binom{-1}{\lambda} \int e^{-t} t^{a-1-\lambda} x^\lambda\, dt \quad \text{(Weg wie in Fig. 19)} \quad - \frac{\pi}{\sin a\pi} \cdot e^x x^a$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi e^{i\pi a}} \times \int e^{-x} x^{-a} dx \quad \text{(Weg wie in Fig. 19)}$$

und mit Hülfe dieser Formel findet man schliesslich

$$f(a, x) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{x^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1-a)} - e^{x} x^{a}\right]$$

$$\text{VII.} \quad f(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 + i\frac{\alpha^2}{x^2}} dx$$

Setzt man hier $e^{-i\frac{\pi}{4}} \alpha = \beta$, wo α eine reelle Zahl bedeutet, so ist

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}} dx$$

und wenn noch $x^2 = t$ gesetzt wird, so hat man

$$f(\alpha) = \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t - \frac{\beta^2}{t}} t^{-\frac{1}{2}} dt = -\tfrac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^{t + \frac{\beta^2}{t}} (-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

Es sei nun

$$S = \frac{1}{4i}\int e^{t + \frac{\beta^2}{t}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

(Weg von $-N$ nach 0 mit $\log t = -i\pi + \log u$ und Weg von 0 nach $-N$ mit $\log t = i\pi + \log u) = f(\alpha)$

Ferner sei

$$S_1 = \frac{1}{4i}\int e^{t + \frac{\beta^2}{t}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

(Weg eine aus dem Westpunkte um 0 geworfene, rechtläufige Schlinge Fig. 20)

gibt man nun dieser Schlinge die in Fig. 21 gezeichnete Gestalt, so sieht man, dass

$$S_1 = S + \frac{1}{4i}\int e^{t + \frac{\beta^2}{t}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

(Weg eine von 0 aus um 0 geworfene, rechtl. Schlinge Fig. 22)

und somit ist

Digitized by Google

$$f(\alpha) = \frac{1}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt \quad \text{(Weg in Fig. 20)}$$

$$-\frac{1}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt \quad \text{(Weg wie in Fig. 22)}$$

Man dehne nun den Schlingenweg des ersten Integrals so weit aus, dass $e^{\frac{\beta^2}{t}}$ nach fallenden Potenzen von t entwickelt werden kann. Weil

$$e^{\frac{\beta^2}{t}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!}\,\frac{\beta^{2\lambda}}{t^\lambda}$$

so ist

$$\frac{1}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta^{2\lambda}}{\lambda!}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int e^t t^{-\frac{1}{2}-\lambda}\, dt$$

(Weg wie in Fig. 20)

also nach der bekannten Formel für $\frac{1}{\Gamma(a)}$

$$\frac{1}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt \quad \text{(Weg Fig. 20)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(2\beta)^{2\lambda}}{2\lambda!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{coſ} 2\beta$$

Im zweiten Integral des Ausdruckes für $f(\alpha)$ ersetze man t durch $\frac{\beta^2}{t}$ und erhält

$$\frac{1}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt \quad \text{(Weg wie in Fig. 22)}$$

$$= \frac{\beta}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}}\, t^{-\frac{3}{2}}\, dt \quad \text{(Weg wie in Fig. 20)}$$

Hier kann man wieder den Weg so weit ausdehnen, dass $e^{\frac{\beta^2}{t}}$ nach fallenden Potenzen von t entwickelt werden kann. Man findet so

$$\frac{\beta}{4i}\int e^{t+\frac{\beta^2}{t}}\, t^{-\frac{3}{2}}\, dt \quad \text{(Weg in Fig. 20)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\cdot\frac{\beta^{2\lambda+1}}{\lambda!}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int e^t\, t^{-\frac{3}{2}-\lambda} \quad \text{(Weg Fig. 20)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\beta^{2\lambda+1}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\cdot\frac{(2\beta)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathfrak{ſin}\,2\beta$$

Es ist somit

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\mathfrak{coſ}\,2\beta - \mathfrak{ſin}\,2\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\beta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}e^{i\alpha\sqrt{2}}$$

oder

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2+i\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}e^{i\alpha\sqrt{2}};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2-i\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}e^{-i\alpha\sqrt{2}}$$

Aus diesen 2 Gleichungen ergeben sich nun noch die beiden folgenden:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}$$

VIII. $f(a) = \int_0^{\infty}\cos x\,\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$

Ersetzt man den $\cos x$ durch $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, so ist auch

$$f(a) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{ix}\frac{a\,dx}{a^2+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-ix}\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

Wird nun im ersten Integral x durch it und im zweiten durch $-it$ ersetzt, so lässt sich $f(a)$ wieder durch ein einziges Integral darstellen. Es ist also

$$f(a) = \frac{1}{2i}\int_{+iN}^{-iN} e^{-t}\frac{a\,dt}{-a^2+t^2}$$

Digitized by Google

Die Pole dieses Integrals liegen in $t = a, \ -a$. Nimmt man nun recp. a = pos. an, so liegt nur der Pol a in der Osthälfte des Zahlenfeldes. Weil das Integral im östlichen Horizonte verschwindet, so schalte man in den obigen Weg den rechtläufigen östlichen Horizont ein und erhält so einen neuen Weg, wie ihn Fig. 5 darstellt. Es ist somit

$$f(a) = \frac{1}{2i}\int e^{-t}\frac{a\,dt}{-a^2+t^2} \quad \text{(Weg in Fig. 6)} \quad = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

oder

$$\int_0^N \cos x \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

$$\text{IX.} \quad f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a+\cos 2x}\, x\,dx$$

Setzt man hier $2x = x'$, so folgt

$$f(a) = \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{a+\cos x}\cdot x\,dx = \tfrac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{a+\cos x}\cdot x\,dx$$

und eine partielle Integration ergibt nun

$$f(a) = \tfrac{1}{8}\left[x\log\frac{a+\cos x}{a-1}\right]_{\pi}^{-\pi} + \tfrac{1}{8}\int_{-\pi}^{+\pi}\log\frac{a+\cos x}{a-1}\,.dx$$

oder auch, da der eingeklammerte Ausdruck verschwindet,

$$f(a) = \tfrac{1}{8}\int_{-\pi}^{+\pi}\log\frac{a+\cos x}{a-1}\,.dx$$

Wenn nun $e^{ix} = t$ gesetzt wird, so ist

$$f(a) = \frac{1}{8i}\int \log\frac{t^2+2at+1}{2t(a-1)} \times \frac{dt}{t}$$

wo nun t den Einheitskreis in positiver Richtung durchläuft. Ist $2a = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, wo mod. $\alpha > 1$, so liegen die Pole des Integrals in $t = 0, \ -\alpha, \ -\frac{1}{\alpha}$, von welchen nur $-\alpha$ ausserhalb des Einheitskreises liegt. Man setze nun

$$f(a) = \frac{1}{8i}\int \log(t+\alpha)\frac{dt}{t} \quad \text{(Weg der Einheitskreis)}$$

$$+\frac{1}{2i}\int \log\frac{\left(t+\frac{1}{\alpha}\right)}{2t(a-1)} \times \frac{dt}{t} \quad \text{(Weg der Einheitskreis)}$$

Das erste Integral schliesst nur den einzigen Pol 0 ein und somit ist

$$\frac{1}{8i}\int \log(t+\alpha) \times \frac{dt}{t} \quad \text{(Weg der Einheitskreis)} \quad = \frac{\pi}{4}\log\alpha$$

Der Integrationsweg des zweiten Integrals schliesst alle seine Pole ein und somit tritt der Ausdehnung des Weges kein Punkt hindernd entgegen. Man mache von dieser, Eigenschaft Gebrauch und dehne den Weg so weit aus, bis $\log\frac{t+\frac{1}{\alpha}}{2t(a-1)}$ nach fallenden Potenzen von t entwickelt werden kann. Weil

$$\log\frac{1+\frac{1}{\alpha t}}{2(a-1)} = -\log 2(a-1) + \frac{1}{\alpha t} - \frac{1}{2\alpha^2 t^2} + \dots$$

so ist also

$$\frac{1}{8i}\int \log\frac{t+\frac{1}{\alpha}}{2t(a-1)} \times \frac{dt}{t} \quad \text{(Weg der Einheitskreis)}$$

$$= -\frac{\log 2(a-1)}{8i}\int\frac{dt}{t} \quad \text{(Weg der Einheitskreis)}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\log 2(a-1)$$

und somit

$$f(a) = \frac{\pi}{4}(\log\alpha - \log 2(a-1))$$

Weil nun aber

$$2(a-1) = \frac{\alpha^2+1-2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

so ist auch

$$f(a) = \frac{\pi}{2}\log\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

oder, da

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a-1}}$$

ist,

Digitized by Google

$$f(a) = \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}{2\sqrt{a-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{a + \cos 2x} \cdot x\,dx$$

$$\text{X.} \quad f(a) = \int_0^\infty \log\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+a}{\sqrt{x^2+1}-a}\right) \times \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Man setze $\sqrt{x^2+1} = t$, also

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

dann ist

$$f(a) = \int_1^\infty \log\left(\frac{t+a}{t-a}\right) \times \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

Die Pole dieses Integrals liegen in $t = a, -a, 1, -1$ und die Punkte 1 und -1 sind zugleich Verzweigungspunkte eines zweiblättrigen t Feldes, dessen Uebergangslinie die Pole $(+1)$ und (-1) verbindet. Nun sei

$$S = \int \log\left(\frac{t+a}{t-a}\right) \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{(Weg in Fig. 23)}$$

Der Weg dieses Integrals ist eine aus dem Ostpunkte um den Verzweigungspunkt 1 geworfene, rechtläufige Schlinge Fig. 23; b sei Erkennungsort, wo $\sqrt{1-t^2}$ pos. und $\log\frac{t+a}{t-a}$ reell verstanden werden, wenn a reell und $0 < a < 1$ angenommen wird. Weil nun auch

$$S = i\int_N^1 \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{1}{i}\int_1^N \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

also

$$S = \frac{2}{i}\int_1^{N_1} \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{2}{i} f(a)$$

so ist

$$f(a) = \frac{i}{2}\int \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 23)}$$

Für dieses Integral ist der Horizont zugänglich. Man dehne deshalb die Schlinge so weit als möglich aus und gebe ihr die in Fig. 24

Digitized by Google

gezeichnete Gestalt. Weil nun aber das Integral längs des Horizontes verschwindet, so hat man

$$f(a) = \frac{1}{2i}\int \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(der Weg ist eine aus dem Westpunkte um die Pole -1, $-a$, a geworfene, rechtl. Schlinge Fig. 25)

Nach einem Umlaufe um die logarithmischen Pole a und $-a$ allein kehrt aber der Integrand auf seinen alten Wert zurück, und somit zerfällt die Schlinge in eine nur die log. Pole umgebende geschlossene Curve und in eine rechtl. Schlinge, geworfen aus dem Westpunkte um den Pol -1 allein (Fig. 26). Es ist somit

$$f(a) = \frac{1}{2i}\int \log\frac{-t-a}{-t+a} \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(Weg eine aus dem Westpunkt um -1 geworfene, rechtl. Schlinge; Erkennungsort in b, wo $\sqrt{1-t^2}$ pos. und $\log\frac{-t-a}{-t+a}$ reell verstanden werden Fig. 26)

$$+\frac{1}{2i}\int \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(Weg eine geschlossene, rechtl. Curve um a und $-a$; Erkennungsort in a, Fig. 26)

Nun ist aber

$$\frac{1}{2i}\int \log\frac{-t-a}{-t+a} \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{(Weg obige Schlinge)}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-N} \log\frac{-t-a}{-t+a} \times \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{1}{2}\int_{-N}^{-1} \log\frac{-t-a}{-t+a} \times \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= -f(a)$$

und somit ist

$$f(a) = \frac{1}{4i}\int \log\frac{t+a}{t-a} \times \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(Weg eine rechtläufig geschlossene Curve um die Pole a und $-a$, Fig. 26).

Man dränge nun die Curve auf das Stück der Realitätslinie von $-a$ nach a zusammen. Auf dem Hinwege ist

$$\log\frac{t+a}{t-a} = \log\frac{t+a}{a-t} - i\pi$$

und auf dem Herwege hat man

Digitized by Google

$$\log\frac{t+a}{t-a}=\log\frac{t+a}{a-t}+i\pi$$

folglich ist

$$f(a)=\frac{1}{4i}\int\limits_{a}^{-a}\left[\log\frac{t+a}{a-t}+i\pi-\log\frac{t+a}{a-t}-i\pi\right]\times\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

und man erhält schliesslich

$$f(a)=\pi\arcsin a=\int\limits_0^{\infty}\log\frac{\sqrt{x^2+1}+a}{\sqrt{x^2+1}-a}\times\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{XI.}\quad f(a,r)=\int\limits_0^{N}\frac{1}{1+2r\cos x+r^2}\times\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

Um diesem Integral eine für die Anwendung des freien Weges passende Form zu geben, beachte man, dass

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{a\,dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

ist. Dieses Resultat kann am einfachsten auf folgende Art gefunden werden. Es ist

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{a\,dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-N}^{+N}\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

in diesen Weg schalte man den nördlichen Horizont ein, und da der Integrand auf den nämlichen Wert zurückkehrt, mit dem er ausgegangen ist, so erhält man als neuen Weg eine geschlossene, rechtl. Curve längs der nördlichen Halbebene. Wird nun a pos. angenommen, so schliesst dieser Weg nur den einzigen Pol ia ein, und somit ist der Wert des Integrals nach Cauchy gleich $\frac{\pi}{2}$; daher die Gleichung

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{a\,dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

(Weg eine geschlossene, rechtl. Curve um den Pol a) $=\frac{\pi}{2}$

Demnach ist

$$(1-r^2)f(a,\ r)+\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^\infty\frac{1-r^2}{1+2r\cos x+r^2}\times\frac{a\,dx}{a^2+x^2}+\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{2(1+r\cos x)}{1+2r\cos x+r^2}\times\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

oder auch

$$(1-r^2)f(a,\ r)+\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{1+re^{ix}}+\frac{1}{1+re^{-ix}}\right)\times\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

$$=\int\limits_{-N}^{+N}\frac{1}{1+re^{ix}}\times\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

Ersetzt man hier x durch it, so hat man

$$f(a,\ r)+\frac{\pi/2}{1-r^2}=\frac{i}{1-r^2}\times\int\limits_{iN}^{-iN}\frac{1}{1+re^{-t}}\times\frac{a\,dt}{a^2-t^2}$$

Die Pole des ersten Factors sind durch $\log r+i\pi(2n+1)$ dargestellt, wo n alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen kann, liegen also, wenn mod. $r<1$ ist, in der Westhälfte des Zahlenfeldes. Der zweite Factor enthält die Pole a und $-a$ Wird nun resp. $a=$ pos. angenommen, so liegt a allein in der Osthälfte des Feldes. Um den vielen Polen in der Westhälfte des Zahlenfeldes auszuweichen, schalte man in obigen Integrationsweg die Osthälfte des Horizontes ein, wodurch man eine geschlossene Curve erhält, die den Rand des östlichen Zahlenfeldes in positiver Richtung umgibt und nur den einzigen Pol a einschliesst (Fig. 5). Es ist somit

$$f(a,\ r)+\frac{\pi/2}{1-r^2}=\frac{i}{1-r^2}\int\frac{1}{1+re^{-t}}\times\frac{a\,dt}{a^2-t^2}\quad\text{(Weg in Fig. 5)}$$

also nach Cauchy

$$f(a,\ r)+\frac{\pi/2}{1-r^2}=\frac{1}{1-r^2}\times\frac{\pi}{1+re^{-a}}$$

folglich

$$f(a,\ r)=\frac{\pi/2}{1-r^2}\times\frac{1-re^{-a}}{1+re^{-a}}=\int\limits_0^\infty\frac{1}{1+2r\cos x+r^2}\times\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$

Um diese Formel zu erhalten, ist es nicht absolut notwendig, den östlichen Horizont in den Weg einzuschliessen. Wird der westliche Horizont eingeschaltet, so erhält man

Digitized by Google

$$f(a, r) + \frac{\pi/2}{1-r^2} = \frac{i}{1-r^2}\int \frac{1}{1+r\,e^{-t}} \times \frac{a\,dt}{a^2-t^2} \quad \text{(Weg in Fig. 27)}$$

Der Weg dieses Integrales umgibt in negativer Richtung den Rand des westlichen Zahlenfeldes und schliesst also die Pole $\log r + i\pi(2n+1)$ (für $n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$) und $-a$ ein. Weil nun aber der Integrand nach einem Umlaufe um einen dieser Pole auf seinen anfänglichen Wert zurückkehrt, so zerfällt dieser Weg in eine Anzahl isolirter, geschlossener Curven, welche jeweilen nur einen einzigen Pol einschliessen (Fig. 28). Es ist somit

$$f(a, r) = -\frac{\pi/2}{1-r^2} + \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \frac{i}{1-r^2}\int \frac{1}{1+r\,e^{-t}} \times \frac{a\,dt}{t^2-a^2}$$

(Weg eine rechtläufig geschlossene Curve um den Pol $\log r + i\pi(2\lambda+1)$)

$$+ \frac{i}{1-r^2}\int \frac{1}{1+r\,e^{-t}} \times \frac{a\,dt}{t^2-a^2}$$

(Weg eine rechtl. geschlossene Curve um dem Pol $-a$)

also nach Cauchy

$$f(a, r) = -\frac{\pi/2}{1-r^2} - \frac{2\pi}{1-r^2} \cdot \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \frac{a}{(\log r + i\pi(2\lambda+1))^2 - a^2}$$
$$+ \frac{\pi}{1-r^2} \cdot \frac{1}{1+r\,e^a}$$

oder auch

$$f(a, r) = \frac{\pi/2}{1-r^2} \cdot \frac{1-r\,e^a}{1+r\,e^a} - \frac{2\pi}{1-r^2} \times$$
$$\Sigma \left(\frac{\log r - a}{m^2\pi^2 + (\log r - a)^2} - \frac{\log r + a}{m^2\pi^2 + (\log r + a)^2} \right)$$

wo in der Summe die Zahl m alle positiven, ungeraden Zahlen durchläuft. Um diese Formel mit der auf dem ersten Wege erhaltenen in Uebereinstimmung zu bringen, müssen wir den Wert dieser Summe ausmitteln. Für das Integral $\frac{i}{1-r^2}\int \frac{1}{1+r\,e^{-t}}\,\frac{a\,dt}{t^2-a^2}$ ist der ganze Horizont zugänglich und zwar verschwindet dasselbe hier wie $\frac{a}{t}$; demnach ist

$$\frac{i}{1-r^2}\int \frac{1}{1+r\,e^{-t}} \times \frac{a\,dt}{t^2-a^2} \quad \text{(Weg der rechtläufige Horizont Fig. 29)} = 0$$

Nun aber kann dieser Weg in gesonderte, rechtläufige Curven um die einzelnen Pole aufgelöst werden, wie Fig. 29 es andeutet, und der Satz von Cauchy gibt sogleich

$$\Sigma \frac{2\pi}{1-r^2}\left[\frac{\log r - a}{m^2\pi^2+(\log r - a)^2} - \frac{\log r + a}{m^2\pi^2+(\log r + a)^2}\right]$$
$$+\frac{\pi}{1-r^2}\cdot\frac{1}{1+re^{-a}} - \frac{\pi}{1-r^2}\cdot\frac{1}{1+re^{a}} = 0$$

wo in der Summe die Zahl m alle ungeraden, positiven Werte durchläuft. Wird nun dieser Wert für die Summe oben eingesetzt, so erhält man

$$f(a,\ r) = \frac{\pi/2}{1-r^2}\cdot\frac{1-re^{a}}{1+re^{a}} - \frac{\pi}{1-r^2}\cdot\frac{1}{1+re^{a}} + \frac{\pi}{1-r^2}\cdot\frac{1}{1+re^{-a}}$$

oder

$$f(a,\ r) = \frac{\pi/2}{1-r^2}\times\frac{1-re^{-a}}{1+re^{-a}}$$

also wie auf dem ersten Gange.

$$\text{XII.}\quad A = \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Die Pole dieses Integrales liegen in 1 und -1. Es sei nun

$$S = \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

(Weg eine rechtläufig geschlossene Curve um die Pole 1 und -1; Erkennungsort in a, wo $\sqrt{x^2-1}$ pos. ist (Fig. 30))

Man ziehe den Weg auf die Uebergangslinie von 1 nach -1 zusammen; auf dem Hinwege hat man $-i\int_{+1}^{-1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und auf dem Herwege $i\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, also ist

$$S = 4i\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und somit

$$A = \frac{1}{4i}\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 30)}$$

Der Integrationsweg schliesst alle Pole des Integrals ein; man kann daher den Weg so weit ausdehnen, bis $\sqrt{x^2-1}$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt werden kann. Weil

Digitized by Google

$$(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \binom{-\frac{1}{2}}{\lambda} x^{-2\lambda-1}$$

so ist

$$A = \frac{1}{4i} \times \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \binom{-\frac{1}{2}}{\lambda} \int x^{2n-2\lambda-1}\,dx$$

(Weg eine rechtl. geschlossene Curve um den Pol 0)

also

$$A = \frac{\pi}{2}(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$\text{XIII.}\quad A = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{dx}{(1+x)^{n+1}}$$

Die untere Grenze dieses Integrals verlangt, dass $0 < \alpha$ und die oben $\alpha < n+1$; zugleich nehmen wir an, dass α keine ganze Zahl sei. Man bilde nun folgendes Integral

$$S = \int x^{\alpha-1}\frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 31)}$$

Der Weg ist eine aus dem Ostpunkte um die Pole -1 und 0 geworfene, rechtläufige Schlinge (Fig. 31). Weil der Integrand nach einem Umlaufe um -1 auf seinen alten Wert zurückkehrt, so zerfällt dieser Weg in eine rechtläufig geschlossene Curve um -1 und in eine aus dem Punkte $+N$ um 0 geworfene Schlinge (Fig. 32). Also ist

$$S = \int x^{\alpha-1}\frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(geschlossene Curve um } -1)$$

$$+\int x^{\alpha-1}\frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(Schlinge aus } +N \text{ um } 0)$$

Nach Cauchy ist aber

$$\int x^{\alpha-1}\frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(Weg eine geschlossene rechtl. Curve um } -1)$$

$$= 2i\pi e^{i\pi(\alpha-1)}(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}$$

Den Schlingenweg des zweiten Integrals kann man auf die Realitätslinie von $+N$ bis 0 zusammenziehen und erhält

Digitized by Google

$$\int x^{\alpha-1} \frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(Weg eine Schlinge aus } N \text{ um 0)}$$

$$= 2 i e^{i\pi\alpha} \sin \alpha\pi \int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{2x}{(1+x)^{n+1}}$$

somit ist

$$A = \frac{1}{2 i e^{i\pi\alpha} \sin \pi\alpha} \int x^{\alpha-1} \frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(Weg in Fig. 32)}$$

$$+ \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} (-1)^n \binom{\alpha-1}{n}$$

In diesem Ausdrucke steht nun der Ausdehnung des Weges kein Pol mehr im Wege. Man benutze nun diese Eigenschaft und dehne den Weg bis in den Horizont aus, und weil hier das Integral wie $x^{\alpha-(n+1)}$ verschwindet, so hat man

$$A = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+1)}$$

Man kann das Integral A auch auf folgende Art auswerten. Es ist

$$A = \frac{1}{2 i e^{i\pi\alpha} \sin \alpha\pi} \int x^{\alpha-1} \frac{dx}{(1+x)^{n+1}}$$

(Weg eine rechtläufige Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol 0, Fig. 19)

und wenn man nun hier an das Ende des Weges den ganzen rückläufigen Horizont anschliesst, so kehrt der Integrand auf seinen anfänglichen Wert zurück und man erhält als neuen Integrationsweg eine geschlossene Curve, welche nur den Pol -1 rückläufig umgibt und den andern Pol 0 ausschliesst (Fig. 33). Bringt man diesen Weg ganz in das endliche Gebiet, so ist

$$A = \frac{1}{2 i \sin \alpha\pi} \int (-x)^{\alpha-1} \frac{dx}{(1+x)^{n+1}}$$

(Weg eine rechtläufig geschlossene Curve um den Pol -1; Erkennungsort in a, Fig. 33)

also nach Cauchy

$$A = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+1)}$$

Digitized by Google

XIV. $A = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}}$; $0 < a < n(m+1)$

Die Pole dieses Integrals sind durch 0 und $e^{\frac{i\pi(2\lambda+1)}{n}}$ dargestellt, wo λ die positiven ganzen Zahlen 0, 1, 2, ... $(n-1)$ durchlaufen kann. Es sei nun

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}}$$

(Weg eine aus dem Ostpunkte um 0 geworfene, rechtläufige Schlinge Fig. 19)

Wird nun dieser Weg auf die Realitätslinie von 0 bis $+N$ zusammengezogen, so erkennt man, dass

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}} \quad \text{(Weg wie oben)}$$

$$= 2\,i\,e^{i\pi a} \sin a\pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}}$$

ist, und somit

$$A = \frac{1}{2\,i\,e^{i\pi a}\sin a\pi} \int \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}} \quad \text{(Weg eine rechtl. Schlinge aus } N \text{ um } 0)$$

An das Ende dieser Schlinge werde nun der ganze rückläufige Horizont angefügt, und da der Integrand auf diesem Wege auf seinen alten Wert zurückkehrt, so erhält man eine geschlossene Curve, welche alle Pole des Integrals mit Ausnahme von 0 einschliesst (Fig. 34). Weil nun aber der Integrand nach einem Umlauf um einen dieser Pole auf seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, so zerfällt diese Curve in n gesonderte Curven um die Pole $e^{i\pi\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)}$ wie Fig. 34 es anzeigt. Es ist somit

$$A = \frac{1}{2\,i\,e^{i\pi a}\sin a\pi} \times \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \int \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}} \quad \left(\text{Weg um den Pol } e^{i\pi\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)}\right)\right]$$

und es bleibt noch die Aufgabe übrig, den Wert eines solchen Integrals auszumitteln. Zu diesem Zwecke setze ich

$$x = r + h$$

wo h sehr klein ist, und

$$r = e^{\frac{i\pi(2\lambda+1)}{n}}$$

bedeutet. Dann wird

$$\frac{1}{2ie^{i\pi a}\sin a\pi}\int\frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}}$$

$$= (-1)^m\frac{r^{a-1}}{2ie^{i\pi a}\sin a\pi}\int\left(1+\frac{h}{r}\right)^{a-1}\left(\left(1+\frac{h}{r}\right)^n-1\right)^{-m-1}dh$$

wo h einen positiven, sehr kleinen Kreis um 0 beschreibt. Setzt man nun

$$x = \frac{h}{r}+1$$

so hat man

$$\frac{1}{2ie^{i\pi a}\sin a\pi}\int\frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x^n)^{m+1}} = \frac{(-1)^m r^a}{2ie^{i\pi a}\sin a\pi}\int x^{a-1}(x^n-1)^{-m-1}dx$$

(Weg ein kleiner pos Kreis um 1)

$$= (-1)^{m+1}\frac{r^a}{2ie^{i\pi a}\sin a\pi}\cdot\frac{1}{n}\int x^{\frac{a}{n}-1}(x-1)^{-m-1}dx$$

(Weg ein kleiner pos. Kreis um 1)

$$= \frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot(-1)^m\frac{r^a}{e^{i\pi a}}\frac{1}{n}\binom{\frac{a}{n}-1}{m}$$

Um A zu erhalten, muss man für r seinen Wert einsetzen und nach λ von 0 bis $n-1$ summiren. Demnach ist

$$A = \frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{(-1)^m}{n}\binom{\frac{a}{n}-1}{m}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{1}{e^{i\pi a}}e^{i\pi\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)a}$$

oder also

$$A = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{a\pi}{n}}(-1)^m\binom{\frac{a}{n}-1}{m} = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(m-\frac{a}{n}\right)}{\Gamma(m+1)}$$

XV. $$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty\sin zu\,.\,\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

Hier ist es die Function $\sin zu$, welche das Integral an der obern

Grenze schwierig macht. Mag man diese Grenze nach $N+ia$ oder nach $N-ia$, wo a pos. und beliebig gross werden soll, verschieben, immer wird die zu integrirende Function unendlich, wenn man in eine andere Weltgegend gelangen will. Man muss durchaus $2i\sin zu$ in die zwei Functionen e^{izu} und $-e^{-izu}$ zerreissen und hat dann

$$f(z) = \frac{1}{i\pi}\int_1^N e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} + \frac{1}{i\pi}\int_N^1 e^{-izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

(Die Integrale convergiren in $u = N$. Beim ersten zum Beispiel braucht man nur

$$\int^N e^{izu}\frac{du}{u} = \frac{1}{iz}\left\{e^{izu}\frac{1}{u}\right\}^N + \frac{1}{iz}\int^N e^{izu}\frac{du}{u^2}$$

zu betrachten).

Beim ersten Integral kann man die obere Grenze der Nordhälfte des Horizonts entlang fort bewegen und beim zweiten die untere Grenze durch die Südhälfte; hier geschehe es bis zum Westpunkte. Am Horizonte ist $\sqrt{u^2-1} = u$ und galt im Ostpunkte als positiv; also ist $\sqrt{u^2-1}$ im Westpunkte negativ. Es ist also

$$\frac{1}{i\pi}\int_N^1 e^{-izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{i\pi}\int e^{-izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \quad \text{(Weg wie in Fig. 35).}$$

Ersetzt man nun im Integral rechter Hand die Variable u durch $-u$, so werden die neuen Grenzen zu N und -1 und der neue Weg liegt ganz in der Nordhälfte (Fig. 35). In $-N$ war $\sqrt{u^2-1}$ neg.; also ist in $u = N$ statt des vorigen $\sqrt{u^2-1}$ jetzt $-\sqrt{u^2-1}$ zu setzen, damit $\sqrt{u^2-1}$ in $u = N$ dieselbe positive Bedeutung habe, wie im ersten Integrale. Es ist also

$$\frac{1}{i\pi}\int_N^1 e^{-izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{i\pi}\int e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

(Weg wie in der Nordhälfte von Fig. 35)

sein Anfang schliesst sich an das Ende des ersten Integrals an. Man kann beide vereinigen und hat

$$\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin zu\cdot\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{i\pi}\int e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

(Weg wie in Fig. 36)

Digitized by Google

Diesen Weg kann man nun auf die Realitätslinie von 1 nach -1 zusammenziehen. Im Ostpunkte war $\sqrt{u^2-1}$ positiv und bleibt es, bis dass u kurz vor 1 angelangt ist. Weil u nur durch eine halbe positive Drehung in die Strecke zwischen -1 und 1 kommen kann, so ist längs derselben $\sqrt{u^2-1} = i\sqrt{1-u^2}$ nördlich lateral. Kehrt man endlich den Weg um, so ist

$$1)\qquad \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin zu\,.\,\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} e^{izu}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos zu\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Die Pole des Integrals liegen in 1 und -1 und dasselbe sind zugleich die Verzweigungspunkte eines zweiblättrigen u-Feldes mit einer Uebergangslinie von 1 nach -1. Es sei nun

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

(Weg wie in Fig. 37; in a sei $\sqrt{u^2-1}$ positiv)

Der Weg ist eine geschlossene Curve, welche den Pol 1 rechtläufig, hingegen den -1 rückläufig umschliesst (Fig. 37). Zieht man diesen Weg auf die Uebergangslinie zusammen, so folgt

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} e^{izu}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

und somit ist

$$2)\qquad \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin zu\cdot\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{2i\pi}\int e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}\qquad \text{(Weg wie in Fig. 32)}$$

Um noch eine dritte Integralform zu erhalten, schalte man in diesen Weg einen doppelten positiven Umlauf um -1 ein, längs dessen das Integral 0 beträgt (Fig. 38). Denn, wenn man

$$u = -1 - 2t^2$$

setzt (wo t abs. < 1) und sich orientirt, so ist

$$e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = e^{-iz}(-1)\,e^{-2izt^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

der doppelte positive Umlauf der Variabeln u hat sich in einen einfachen positiven Umlauf der Variabeln t um 0 verwandelt und man hat

Digitized by Google

$$-\frac{e^{-is}}{i\pi}\int e^{-i2st^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{(geschlossene Curve um 0)} \quad = 0$$

(Die Pole $-i$ und i sind durch die Bedingung mod. $t < 1$ ausgeschlossen). Zerrt man nun den Teil des Weges, der im zweiten Blatte liegt, durch die Uebergangslinie hindurch in das obere Blatt, so verwandelt sich der erste Weg ohne Aenderung des Integrals in den zweiten (Fig. 39), und es ist somit

$$\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin zu \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{2i\pi}\int e^{izu}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \quad \text{(Weg in Fig. 39)}$$

Es sei nun

$$u = \tfrac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)$$

Dann ist

$$\sqrt{u^2-1} = \tfrac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

also positiv, wenn p positiv und grösser als 1 ist; p beschreibt einen rechtläufigen Kreis um 0. Setzt man noch

$$p = -is$$

so beschreibt auch s einen rechtläufigen Kreis um 0 mit demselben Radius wie p und man hat

$$3) \quad \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin zu \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{2i\pi}\int e^{\frac{1}{2}z\left(s-\frac{1}{s}\right)}\frac{ds}{s}$$

(Weg eine geschlossene Curve um 0)

Wird die Bessel'sche Function mit $\overset{a}{J}(x)$ bezeichnet, so ist die Summe

$$\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+a+1)}$$

als die Definitionsgleichung zu betrachten. Was nun auch a sein mag, so hat man immer

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^u u^{-a}\,du$$

(Weg eine aus dem Westpunkte um 0 gelegte, rechtläufige Schlinge Fig. 40)

Man darf daher

Digitized by Google

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+a+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^u u^{-\lambda-a-1} \quad \text{(Weg Fig. 40)}$$

setzen und weil

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda!}\left(-\frac{x^2}{4u}\right)^\lambda = e^{-\frac{x^2}{4u}}$$

so hat man

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{2i\pi}\int e^{u-\frac{x^2}{4u}} \cdot u^{-a-1}du \quad \text{(Weg wie in Fig. 20}$$

Diese Formel gilt für alle a und x. Sie convergirt stets, welche endlichen Werte der Parameter a und das Argument x auch haben mögen. Ist x pos., so sei

$$u = \tfrac{1}{2}xt$$

der Ausgangspunkt der Schlinge bleibt dann für t derselbe wie für u, und man bekommt

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-a-1}dt \quad \text{(Weg in Fig. 40)}$$

Ist a eine ganze Zahl, so schliesst sich der Weg im Westen, und die Schlinge verwandelt sich in eine geschlossene Curve um 0. Vergleicht man nun Formel 3 auf Seite 91 mit diesem Ausdrucke, so erkennt man, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin zu \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \overset{a}{J}(z)$$

ist. Wenn

$$V = \int x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

(Weg eine vom Punkte t aus um 0 gelegte rechtläufige Schlinge)

und

$$W = \int x^{a-1}.(1-x)^{\beta-1}dx$$

(Weg eine vom Punkte t aus um 1 gelegte, rechtläufige Schlinge)

dann ist

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2i\sin\alpha\pi}e^{-i\pi\alpha}V - \frac{1}{2i\sin\beta\pi}e^{-i\pi\beta}W \quad \text{(Weg Fig. 41)}$$

Digitized by Google

Ist nun α pos., also der Pol 0 zugänglich, so verlege man den Ausgangspunkt der Schlingenwege in den Punkt 0, und weil $V = 0$ ist, so hat man

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(1-\beta)} = \frac{1}{2i\pi}\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}\,dx \text{ (Weg in Fig. 41)}$$

Nach dieser Formel findet man nun

$$\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,\Gamma(\lambda+a+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int t^{\lambda-\frac{1}{2}}(t-1)^{a-\frac{1}{2}} \text{ (Weg wie in Fig. 41)}$$

und weil in dieser Gleichung λ eine positive ganze Zahl bezeichnet, die Null nicht ausgeschlossen, so besteht dieselbe, was auch a sein mag. Die Function $(t-1)^{a-\frac{1}{2}}$ ist im allgemeinen eine transcendente Function und wird algebraisch, so oft a einer rationalen Zahl gleich wird. $t^{\lambda-\frac{1}{2}}$ ist eine algebraische Function, die zu ihrer Ausbreitung ein zweiblättriges Feld erfordert. Die Uebergangslinie gehe von 0 nach dem Westpunkte. Nun ist auch

$$\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,\Gamma(\lambda+a+1)} = \frac{1}{4i\pi}\int (t-1)^{a-\frac{1}{2}}\,t^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt \text{ (Weg wie in Fig. 42)}$$

Der Weg dieses Integrals besteht aus einer geschlossenen Curve, welche die beiden Pole 0 und 1 einmal rechtläufig und einmal rückläufig umgibt, wie es Fig. 42 anzeigt. Um die Verzweigung aufzulösen, setze man

$$t = u^2$$

Dann geht u rechtläufig um 1 und rückläufig um -1 und man hat

$$\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,\Gamma(a+\lambda+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int (u^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\,u^{2\lambda}\,du \qquad \text{(Weg wie in Fig 43)}$$

Aus dieser Formel folgt nun sogleich, dass

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{2i\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-a)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int (u^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(ixu)^{2\lambda}}{(2\lambda)!}\times du$$

(Weg in Fig. 43)

ist, und weil

$$\frac{1}{2i\pi}\int (u^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\,u^{2\lambda+1}\,du \quad \text{(Weg Fig. 43)} \quad = 0$$

so kann man auch setzen

Digitized by Google

$$\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - a)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2\,i\pi} \int (u^2 - 1)^{a-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{i\,x\,u}{\lambda!}\right)^{\lambda} \cdot du$$

(Weg in Fig. 43)

und man erhält schliesslich

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - a)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^a \cdot \frac{1}{2\,i\pi} \int e^{ixu} (u^2 - 1)^{a-\frac{1}{2}} du \quad \text{(Weg in Fig. 43)}$$

Diese Formel ist gültig für alle endlichen Werte von a mit Ausnahme des Falles, wo $a + \frac{1}{2}$ eine ganze positive Zahl wird, weil $\Gamma(\frac{1}{2} - a)$ unendlich wird, und das Integral verschwindet, aus Mangel an Polen. Setzt man hier $a = 0$ und vergleicht das Resultat mit der Formel (2) auf Seite 90, so erkennt man auch, dass

$$\overset{a}{J}(z) = \int_1^{\infty} \sin zu \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

ist.

Digitized by Google

VII.

Miscellen.

1.

Ueber Ermittelung von Krümmungshalbmessern von Kegelschnitten auf synthetischem Wege.

Indem Steiner Krümmungskreise eines Kegelschnitts als Kreise definirte, welche drei zusammenfallende Punkte mit dem Kegelschnitt gemein haben, fand er eine einfache Methode, sie durch Bestimmung des vierten gemeinschaftlichen Punktes zu construiren. Aber seine Methode ist nicht allgemein: sie lässt im Stich, wenn alle vier gemeinschaftlichen Punkte des Kegelschnitts und des Kreises zusammenfallen.

Ich gelangte zu einer allgemeineren Methode zur Bestimmung von Krümmungskreisen an Kegelschnitten, indem ich sie als Kreise betrachtete, die mit ihren Tangenten gleiche Elemente gemein haben, wie der Kegelschnitt mit seiner Tangente an der im einzelnen Fall gegebenen Stelle.

Man kann zunächst beweisen, dass die Elemente, welche Kreise mit Tangenten gemein haben, sich wie ihre Radien verhalten.

Denn man kann zwei Kreise als collinear ansehen mit dem Schnittpunkt ihrer gemeinschaftlichen inneren Tangenten als Collineationscentrum und der sogenannten Potenzlinie als Collineationsaxe. Dann ist jede der beiden inneren Tangenten Träger zweier projectivischen Punktreihen, Collineationscentrum und Schnittpunkt mit der Collineationsaxe sind ihre Doppelpunkte, und die beiden Elemente, mit denen die Kreise berühren, sind entsprechende Strecken.

Digitized by Google

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse, in denen die Strecke zwischen den Doppelpunkten durch je zwei entsprechende Punkte geteilt wird, folgt, wenn mit β_0 und δ_0 die Berührungselemente, mit α und ε die Strecken von einem Doppelpunkt bis zum Anfang von β_0 und vom andern bis δ_0, schliesslich die Strecke zwischen β_0 und δ_0 mit γ bezeichnet werden:

$$\frac{\alpha}{\beta_0+\gamma+\delta_0+\varepsilon} : \frac{\alpha+\beta_0}{\gamma+\delta_0+\varepsilon} = \frac{\alpha+\beta_0+\gamma}{\delta_0+\varepsilon} : \frac{\alpha+\beta_0+\gamma+\delta_0}{\varepsilon}$$

woraus sich nach Ausführung mehrerer leichten Rechnungsoperationen und bei Vernachlässigung der höheren Potenzen der unendlich kleinen Grössen β_0 und δ_0 die Proportion

$$\frac{\beta_0}{\delta_0} = \frac{\alpha(\gamma+\varepsilon)}{\varepsilon(\alpha+\gamma)}$$

ergibt. Sind R und r die zu β_0 und δ_0 gehörigen Kreisradien, so ist

$$\frac{R}{r} = \frac{\alpha}{\gamma-\alpha}$$

denselben Wert hat offenbar der Quotient $\frac{\beta_0}{\delta_0}$ da, wie leicht zu sehen, α und ε negativ zu nehmen sind, und da

$$\varepsilon = -\frac{\gamma}{2}$$

Mittelst des eben angewendeten Verfahrens kann man nun offenbar auch Krümmungshalbmesser für jede beliebige Stelle eines Kegelschnitts bestimmen, indem man die Tangente an dieser Stelle zum Träger zweier projectivischen Punktreihen macht. Man erreicht dies, indem man ihren Schnittpunkt mit einer beliebigen zweiten Tangente am Kegelschnitt als einen Doppelpunkt, ihren Schnittpunkt mit der leicht zu findenden Collineationsaxe des Kegelschnitts und eines beliebig an beide Tangenten gelegten Kreises als den zweiten Doppelpunkt, die beiden Elemente, welche die beiden Curven mit der ersten Tangente gemein haben, als entsprechende Strecken betrachtet. Das Verhältniss dieser Elemente, d. h. das des gesuchten Krümmungshalbmessers zu dem des Hülfskreises ist dann wiederum

$$\frac{\beta_0}{\delta_0} = \frac{R}{r} = \frac{\alpha(\gamma+\varepsilon)}{\varepsilon(\alpha+\gamma)}$$

Rudolf Skutsch.

Digitized by Google

2.

Bemerkung über die wahrscheinlichsten Werte beobachteter Grössen.

Die folgenden Bemerkungen sind durch Bessel's Abhandlung: „Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler" im 16. Bde. der Astron. Nachr. veranlasst worden.

Es bezeichne x den Fehler einer Beobachtung, genommen als Differenz zwischen dem wahren und beobachteten Wert einer Grösse, welche eine Function der m unbekannten Elemente $p, q, r, \ldots$ ist, und

$$y = \varphi(x)$$

sei die Gleichung dieses Fehlers in dem Sinne, dass $y dx$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, der Fehler einer künftigen Beobachtung werde zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegen. Sind n Beobachtungen ($n > m$) gemacht worden, so war vor Ausführung derselben die Wahrscheinlichkeit, dass die ihnen anhaftenden Fehler x_1, x_2, $\ldots x_n$ seien, proportional dem Product

$$\Omega = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ \ldots\ \varphi(x_n)$$

nach Ausführung der Beobachtungen ist die Wahrscheinlichkeit eines Systems von Werten der Elemente $p, q, r, \ldots$ eben demselben Product proportional [1]), wo nunmehr unter x der Unterschied der mit diesem Wertsystem gerechneten und der aus der Beobachtung hervorgegangenen Grösse zu verstehen ist.

Nach Gauss wird nun jenem Wertsystem der Unbekannten p, $q, r, \ldots$ unter allen Systemen, welche aus den gemachten Beobachtungen auf irgend welche Art abgeleitet werden können, der Vorzug gegeben, für welches

$$\Omega \text{ ein Maximum}$$

welches also, wenn man sich der Abkürzung

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \psi(x)$$

bedient, der Gleichung

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ \ldots\ + \psi(x_n) = 0 \qquad (1)$$

Genüge leistet; dieses Wertsystem wird als das **w a h r s c h e i n l i c h s t e** bezeichnet.

---

1) Vorausgesetzt, dass alle Wertsysteme $p, q, r \ldots$ a priori gleich wahrscheinlich sind.

Digitized by Google

Diese Festsetzung geschieht unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass die Function φ solcher Natur ist, um ein Maximum von Ω zuzulassen; wenn x einen zufälligen Fehler in dem üblichen Sinne des Wortes bezeichnet, so ist die Möglichkeit eines Maximums aus den Eigenschaften von φ, wie sie aus der Erfahrung sich ergeben und von Gauss dem oben entwickelten Raisonnement vorausgeschickt sind (Theoria motus, art. 175), unmittelbar einleuchtend.

Anders aber verhält es sich, wenn der Fehler x, ohne dass er aufhört dem Zufall unterworfen zu sein, einem besonderen Gesetze folgt. Es ist der Zweck dieser Zeilen zu zeigen, dass die Eigenschaften von φ dann solcher Art sein können, dass Ω überhaupt keinen ausgezeichneten Wert annimmt, und die oben getroffene Wahl von $p, q, r, \ldots$ illusorisch wird; dass in andern Fällen Ω nur ein Minimum werden kann, und die diesem Minimum entsprechenden Werte von $p, q, r, \ldots$ die vorzugsweise zu wählenden sind, so dass nunmehr als die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten diejenigen zu gelten haben, für deren Existenz die kleinstmögliche Wahrscheinlichkeit besteht; dass endlich Fälle denkbar sind, wo Ω nur einen grössten Wert erreicht, ohne eigentlich ein Maximum zu werden. — Wir werden uns dabei auf den einfachsten Fall, auf directe Beobachtungen beschränken.

Im ersten Teile der oben erwähnten Abhandlung leitet Bessel Gesetze von Fehlern ab, welche aus einer einzigen Fehlerursache entspringen. An diesen wollen wir das eben Behauptete nachweisen.

Der Fehler x einer Beobachtung hange von einer Grösse ξ in bekannter Weise ab, so dass

$$x = f(\xi) \tag{2}$$

wo also f das Zeichen für eine gegebene Function ist. Der Wert von ξ aber sei dem Zufall unterworfen und folge der Gleichung

$$\eta = g(\xi) \tag{3}$$

so dass $\eta d\xi$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, es liege ξ zwischen ξ und $\xi + d\xi$. Die Wahrscheinlichkeit, der Fehler einer künftigen Beobachtung falle zwischen

$$x = f(\xi) \quad \text{und} \quad x + dx = f(\xi + d\xi)$$

kommt dann überein mit der Wahrscheinlichkeit, dass der bei der Beobachtung zufällig eintreffende Wert von ξ zwischen ξ und $\xi + d\xi$ fällt, und man hat somit zur Bestimmung von $\varphi(x)$ die Gleichung

Digitized by Google

$$\varphi(x)\,dx = g(\xi)\,d\xi$$

aus welcher sich zunächst

$$\varphi(x) = \frac{g(\xi)}{f'(\xi)} \tag{4}$$

ergibt; durch Elimination von ξ mit Hilfe von (2) erhält man $\varphi(x)$ als Function von x dargestellt.

In dem vorliegenden Falle aber handelt es sich um die Ausführung der Gleichung (1), also um $\psi(x)$; nun ist

$$\psi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)g'(\xi) - f''(\xi)g(\xi)}{g(\xi)f'(\xi)^2} \tag{5}$$

wo abermals rechter Hand ξ mit Hilfe von (2) durch x zu ersetzen ist.

Sind alle Werte von ξ zwischen den Grenzen $-\alpha$ und α gleich möglich, so ist

$$g(\xi) = \frac{1}{2\alpha}$$

und die Formeln (4) und (5) lauten dann einfacher

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\alpha\, f'(\xi)} \tag{6}$$

$$\psi(x) = -\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \tag{7}$$

1. Es sei

$$x = a\xi, \quad g(\xi) = \frac{1}{2\alpha}$$

so wird

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a\alpha}$$

die möglichen Werte des Fehlers x liegen zwischen den Grenzen $-a\alpha$ und $a\alpha$ und sind alle gleich wahrscheinlich. Die Function $\psi(x)$ verschwindet für alle Werte von x, die Aufstellung der Gleichung (1) und somit auch die Bestimmung wahrscheinlichster Werte der Unbekannten wird illusorisch.

2. Es sei

$$x = a\sin\xi, \quad g(\xi) = \frac{1}{\pi}$$

die Grenzen von ξ sind $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, daher $-a$ und a die Grenzen von x. Man findet jetzt

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Digitized by Google

so dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x mit seiner Grösse wächst, und an der Grenze $x = a$ die Function φ unendlich wird, während dem Fehler null die kleinste Wahrscheinlichkeit zukommt.

Es ergibt sich ferner

$$\psi(x) = \frac{x}{a^2 - x^2}$$

so dass die zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes p einer direct beobachteten Grösse aus den n Beobachtungsresultaten führende Gleichung (1) nun lautet

$$\frac{p - l_1}{a^2 - (p - l_1)^2} + \frac{p - l_2}{a^2 - (p - l_2)^2} + \ldots + \frac{p - l_n}{a^2 - (p - l_n)^2} = 0$$

Dass aber die hieraus resultirende Lösung nicht einem Maximum, sondern einem Minimum der Wahrscheinlichkeit entspricht, geht unmittelbar aus der Natur der Function φ hervor, welche kein Maximum, sondern blos ein Minimum von Ω zulässt. Auch aus dem einfachsten Falle einer einzigen Beobachtung ist dies zu entnehmen; ihr Resultat l_1 hätte dann notwendig als wahrscheinlichster Wert von p zu gelten, und dies entspricht dem Minimum von

$$\varphi(p - l_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - (p - l_1)^2}}$$

auf welchen Ausdruck sich Ω hier reducirt.

3. Es sei

$$x = a\xi^2, \quad g(\xi) = \frac{1}{2\alpha}$$

dann ergibt sich

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\alpha \sqrt{ax}}$$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt ab, während die Grösse des Fehlers wächst, und für $x = 0$ wird φ unendlich; zudem sind Fehler nur eines Vorzeichens, und zwar desselben, welches die Constante a besitzt, möglich.

Für die Function $\psi(x)$ ergibt sich der Ausdruck

$$\psi(x) = -\frac{1}{2x}$$

und es lautet demnach die zur Bestimmung von p dienliche Gleichung

$$\frac{1}{p - l_1} + \frac{1}{p - l_2} + \ldots + \frac{1}{p - l_n} = 0$$

Digitized by Google

Da aber, dem oben Bemerkten zufolge, alle Differenzen $p-l$ gleich bezeichnet sein müssen, so ist die in dieser Gleichung ausgesprochene Bedingung unerfüllbar. Die Function Ω könnte nur an solcher Stelle ein Maximum erreichen, an welcher ihr Differentialquotient unendlich wird. Letzteres geschieht in der Tat, wenn p einem der Beobachtungsergebnisse gleich gesetzt wird, und zwar muss hiefür, jenachdem die Fehler durchaus positiv oder durchaus negativ werden sollen, das grösste, beziehungsweise das kleinste l gewählt werden. Dadurch aber wird zugleich Ω unstetig, indem es unendlich wird, so dass auch hier der wahrscheinlichste Wert p nicht einem eigentlichen Maximum von Ω entspricht.

Der vorliegende Fall wird klar, wenn man das Beispiel, welches Bessel zu diesem Fehlergesetze gegeben, zu Hilfe nimmt. Wenn die Länge eines Stabes, welcher eine kugelförmig gekrümmte Endfläche hat, auf einem mikrometrischen Apparate gemessen werden soll, welcher den Fehler hat, dass der Mittelpunkt der kugelförmigen Fläche nicht sicher in die gerade Linie zwischen der Mikrometerspitze und dem Punkte, von welchem an die Linie gezählt wird, gebracht werden, sondern innerhalb der Grenzen $-\alpha$ und α willkürlich davon entfernt sein kann, so befolgen, wie man sich durch eine einfache geometrische Betrachtung überzeugt, die Fehler das obige Gesetz. Die Beobachtung gibt die zu messende Grösse immer zu klein oder immer zu gross, jenachdem das Ende des Stabes convex oder concav ist, und offenbar ist das grösste, beziehungsweise kleinste unter den Beobachtungsergebnissen der Wahrheit am nächsten, und daher als das wahrscheinlichste Resultat zu wählen. Der Fall bietet ein bemerkenswertes Beispiel insofern, als hier nicht ein aus allen Beobachtungen combinirter Wert, sondern statt dessen eine einzelne Beobachtung das Endresultat bildet. E. Czuber.

3.

Ueber die einem Kegelschnitt umgeschriebenen Kreisvierecke.

1. Wir stellen uns die Aufgabe, zu einem gegebenen Punkte $P(x', y')$ in der Ebene eines Kegelschnitts S einen zweiten Punkt $Q(x'', y'')$ derart zu bestimmen, dass die vier Schnittpunkte der beiden Tangentenpaare aus P und Q an S auf einem Kreise liegen. Diese vier Punkte, durch die erwähnten Tangenten mit einander verbunden, bestimmen dann ein dem Kegelschnitt S umgeschriebenes Kreisviereck.

Digitized by Google

Es werden rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt.

Sei $S = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts, $L' = 0$ die Gleichung der Polare von P in Bezug auf denselben. Dann ist

$$S - kL'^2 = 0$$

die Gleichung eines Büschels von Kegelschnitten, welche S in den Schnittpunkten mit L' doppelt berühren. Unter diesen Kegelschnitten ist derjenige, welcher durch P hindurchgeht, gleichbedeutend mit dem Tangentenpaare aus P an S; um den ihm zugeordneten Wert des Parameters k zu erhalten, hat man auszudrücken, dass die obige Gleichung durch die Coordinaten x', y' von P befriedigt wird. Bezeichnet man das Substitutionsresultat von $x = x'$, $y = y'$ in S mit S', und bemerkt, dass auch L', wenn man darin diese Substitution ausführt, in S' übergeht, so ergibt sich zur Bestimmung von k die Gleichung

$$S' - kS'^2 = 0$$

aus welcher, sofern man den Fall ausschliesst, dass P auf S liegt,

$$k = \frac{1}{S'}$$

folgt. Hiermit lautet also die Gleichung des Tangentenpaars aus P

$$S'S - L'^2 = 0 \qquad (1$$

Ebenso ergibt sich, mit Benutzung analoger Bezeichnungen, die Gleichung des Tangentenpaars aus Q, nämlich

$$S''S - L''^2 = 0 \qquad (2$$

Die beiden Tangentenpaare, als degenerirte Kegelschnitte aufgefasst, bestimmen ein Kegelschnittbüschel, dessen Gleichung

$$S'S - L'^2 - \lambda(S''S - L''^2) = 0 \qquad (3$$

lautet. Dieses Büschel ist, durch Wahl von Q, derart zu bestimmen, dass es einen Kreis enthalte. Denkt man sich die Gleichung 3) auf die Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

gebracht, so sind

$$a_{11} = a_{22} \qquad a_{12} = 0 \qquad (4$$

die beiden notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter welchen sie einen Kreis darstellt. Eliminirt man zwischen den Gleichungen 4) den Parameter λ, so ist die Resultante die Gleichung des geometrischen Ortes von Q.

Digitized by Google

2. Die Ausführung dieses Gedankengangs möge nun für die Centralkegelschnitte und die Parabel gesondert vorgenommen werden.

a) Die gemeinsame Axengleichung der Centralkegelschnitte kann in der Form

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$$

geschrieben werden. Alsdann ist

$$S = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1, \quad S' = \frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} - 1, \quad L' = \frac{x'x}{A} + \frac{y'y}{B} - 1 \text{ u. s. w.}$$

Die Bedingungsgleichungen (4 nehmen die Gestalt an

$$x'^2 - y'^2 - A + B = \lambda(x''^2 - y''^2 - A + B)$$
$$x'y' = \lambda x''y''$$

und die Elimination von λ gibt

$$\frac{x'^2 - y'^2 - A + B}{x'y'} = \frac{x''^2 - y''^2 - A + B}{x''y''}$$

Bezeichnet μ den gemeinsamen Wert dieser beiden Quotienten, so kann die Bedingung dahin formulirt werden, dass die beiden Punkte P und Q gleichzeitig dem Orte

$$x^2 - y^2 - \mu xy - A + B = 0 \tag{5}$$

angehören müssen. Für die Ellipse und Hyperbel stellt aber $A - B$ das Quadrat der linearen Excentricität c dar, für den Kreis dagegen ist jene Differenz gleich null. Demnach lautet, wenn S eine Ellipse oder Hyperbel ist, die Gleichung 5)

$$x^2 - \mu xy - y^2 - c^2 = 0 \tag{5*}$$

und stellt ein Büschel von gleichseitigen, mit dem zu Grunde liegenden Kegelschnitt concentrischen und durch seine Brennpunkte gehenden Hyperbeln dar. Für den Kreis geht die Gleichung (5 über in

$$x^2 - \mu xy - y^2 = 0 \tag{5**}$$

und stellt das System der mit dem Kreise concentrischen Rechtwinkelpaare dar als Grenzfall jenes Büschels gleichseitiger Hyperbeln.

Das Ergebniss lässt sich in den Satz zusammenfassen:

„Die Gegenseitenpaare eines Kreisvierecks, das einem Central-„kegelschnitt umgeschrieben ist, schneiden sich auf einer mit dem-„selben concentrischen, durch seine Brennpunkte gehenden gleich-„seitigen Hyperbel, welche für den Kreis in ein Paar zu einander „senkrechter Durchmesser degenerirt.“

Digitized by Google

Insbesondere entspricht die Schaar der dem Kegelschnitt umgeschriebenen Rechtecke den Tangentenpaaren aus den unendlich fernen Punktepaaren der gleichseitigen Hyperbeln.

Als Grenzfall der gleichseitigen Hyperbeln erscheint das Axenpaar des betrachteten Kegelschnitts. Daher der specielle Satz:

„Wenn die Gegenseitenpaare eines Vierecks, dass einer Ellipse „oder Hyperbel umgeschrieben ist, auf den Axen sich schneiden, so „ist das Viereck ein Kreisviereck“

Liegen die Schnittpunkte beide auf ein und derselben Axe, so ist das Viereck zu dieser Axe symmetrisch, hat gleiche Gegenseiten und einen sich selbst durchschneidenden Perimeter.

b) Legt man die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px$$

der Parabel zu Grunde, so ist

$$S = y^2 - 2px, \quad S' = y'^2 - 2px', \quad L' = y'y - p(x'+x) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Bedingungsgleichungen (4 werden für diesen Fall

$$2x' - p = \lambda(2x'' - p)$$
$$y' = \lambda y''$$

und geben durch Elimination von λ

$$\frac{2x' - p}{y'} = \frac{2x'' - p}{y''}$$

Bezeichnet man, wie vorhin, den gemeinsamen Wert dieser Quotienten mit μ, so erkennt man, dass die Punkte P und Q gleichzeitig dem Orte

$$2x - \mu y - p = 0 \tag{6}$$

angehören müssen, damit ein Kreisviereck zu Stande komme. Diese Gleichung stellt aber bei variablem μ ein Strahlenbüschel dar, welches den Brennpunkt der Parabel zum Mittelpunkt hat.

Demnach lautet das Resultat:

„Die Gegenseitenpaare eines Kreisvierecks, das einer Parabel „umgeschrieben ist, schneiden sich auf einer durch den Brennpunkt „der Parabel gehenden Geraden.“

3. Bemerkenswert ist der Specialfall, welcher sich ergibt, wenn die Ellipse oder Hyperbel in Folge Verschwindens der Länge ihrer

Digitized by Google

Nebenaxe in eine Gerade zusammenfällt, weil er in einfacher Weise mehrere Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel erkennen lässt.

In dem gedachten Falle gehen nämlich alle Tangenten des degenerirten Kegelschnitts durch zwei feste Punkte, welche gleichzeitig seine Brennpunkte sind. Der obige allgemeine Satz kann dann wie folgt ausgesprochen werden: Wenn man einen beliebigen Durchmesser MN einer gleichseitigen Hyperbel aus zweien ihrer Punkte, P und Q, projicirt, so liegen die vier Schnittpunkte der beiden Geradenpaare jedesmal auf einem Kreise.

Diese Kreise aber bilden, da zwei von den vier Schnittpunkten, nämlich M und N, fest bleiben, ein Kreisbüschel mit den Grundpunkten M und N. Hält man den Punkt P fest, so bleibt das eine Geradenpaar, PM und PN, auch fest, und man kann den Satz aussprechen: Wenn man die projectivischen Punktreihen, welche ein Kreisbüschel auf zwei durch die Grundpunkte M und N gezogenen Geraden bestimmt, aus den Grundpunkten N und M projicirt, so erzeugen die Strahlenbüschel eine gleichseitige Hyperbel, für welche M und N Diametralpunkte sind.

Die Punktreihen sind ähnlich, weil ihre unendlich fernen Punkte, durch den unendlich grossen Kreis des Büschels erzeugt, einander entsprechen, und in perspectivischer Lage, weil der Schnittpunkt P ihrer Träger vermöge des Kreises MNP sich selbst entspricht; die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind der Tangente p an den Kreis MNP im Punkte P parallel.

Bezeichnet Q den Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen der Büschel M und N, also einen Punkt der gleichseitigen Hyperbel, so sind die Winkel QMP und QNP gleich, als Peripheriewinkel über demselben Bogen, und entgegengesetzt gerichtet; folglich beschreiben die Strahlen MQ und NQ zwei ungleichlaufende projectivisch-gleiche Strahlenbüschel. Man erkennt also: Zwei ungleichlaufende projectivisch-gleiche Strahlenbüschel erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, für welche die Centra der Büschel Diametralpunkte sind.

Die eben benutzte Winkelgleichheit zeigt aber weiter, dass in dem Dreiecke MNQ, während der Punkt Q die Hyperbel durchläuft, die Differenz der Winkel an der Basis MN consant bleibt. Die Bedeutung dieser Winkeldifferenz ist unschwer zu erkennen; lässt man den Punkt Q unendlich nahe rücken an M (oder N), so geht der Strahl MQ in die Tangente der Hyperbel im Punkte M über, während der zugeordnete mit NM zusammenfällt; die Winkeldifferenz verwandelt sich jetzt in den Winkel, welchen die zu MN conjugirte Sehnenrichtung mit MN bestimmt. Dies führt zu dem Satze: Wenn

Digitized by Google

man einen beliebigen Durchmesser MN einer gleichseitigen Hyperbel mit beliebigen Punkten derselben zu Dreiecken verbindet, so ist in diesen die Differenz der Winkel an der festen Seite MN constant und gleich dem zu MN gehörigen Conjugationswinkel.

Diese Eigenschaft hat weiter zur Folge, dass die Halbirungslinien des Winkels MQN und seines Nebenwinkels je dieselbe Richtung beibehalten; die diesen beiden Richtungen parallelen Strahlenpaare aus M und N entsprechen einander, weil sie mit den festen Geraden MP und NP gleichschenklige Trapeze, also Kreisvierecke bilden, und führen zu den unendlich fernen Punkten der Hyperbel. Man findet also weiter: Die Halbirungslinien des Innen- und Aussenwinkels an der Ecke Q des variabeln Dreiecks MNQ bestimmen die Richtungen der Asymptoten.

Der über MN als Durchmesser beschriebene, also kleinste Kreis des Büschels ergibt diejenigen beiden zugeordneten Strahlen, welche auf NP beziehungsweise MP senkrecht stehen und daher zwei Höhen des Dreiecks MNP darstellen; somit geht durch ihren Schnittpunkt R nicht allein die Hyperbel, sondern auch die dritte Höhe des genannten Dreiecks. Hierin spricht sich ein specieller Fall des Satzes aus, wonach eine einem Dreieck umgeschriebene gleichseitige Hyperbel auch durch den Höhendurchschnitt des Dreiecks geht.

Man denke sich einen zweiten Durchmesser $M'N'$ der Hyperbel gezogen und seine Endpunkte mit Q verbunden, so wird auch der Winkel $M'QN'$ durch die Richtung einer Asymptote halbirt. Da hiernach die Winkel MQN und $M'QN'$ eine gemeinsame Halbirungslinie haben, so sind die Winkel MQM' und NQN', ebenso die Winkel MQN' und NQM' einander gleich. Man kann dies wie folgt aussprechen: Zwei parallele und gleiche — oder in Bezug auf den Mittelpunkt symmetrische — Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel werden aus allen Punkten der Hyperbel unter gleichen (oder supplementären) Winkeln gesehen.

Daraus aber folgt, dass die um $MM'Q$ und $NN'Q$ beschriebenen Kreise gleich sind und gleich bleiben, während Q auf der Hyperbel sich bewegt; diese Kreise beschreiben zwei Kreisbüschel, deren Grundpunkte M, M' und N, N' und deren Axen parallel sind. Bezeichnet man zwei solche Kreisbüschel als projectivisch-gleich, parallel und gleichlaufend, so kann man das Ergebniss in dem Satze zusammenfassen: Zwei parallele und gleichlaufende, projectivisch-gleiche Kreisbüschel erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, für welche der Mittelpunkt des Parallelogramms der Grundpunkte Centrum und die Hal-

Digitized by Google

birungslinien der Winkel des Parallelogramms Asymptotenrichtungen sind [1]).

Bei zwei Kreisbüscheln mit imaginären Grundpunkten sind die Richtungen der Seiten des Parallelogramms durch die Radicalaxen und die Verbindungslinien zugeordneter Grenzpunkte bezeichnet; sein Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt des Parallelogramms der Grenzpunkte zusammen.

Die Centrallinien zugeordneter Kreise beider Büschel sind parallel, daher sind es auch die Chordalen, und zwar gehen letztere, weil je zwei zugeordnete Kreise gleich sind, durch die Mitten der Centrallinien. Denkt man sich nun, dass die Büschel sich einander nähern derart, dass die Centra des einen Büschels auf den zugehörigen Centrallinien sich bewegen, so gehen die Chordalen in dem Augenblicke, wo die Kreisbüschel zusammenfallen, in ein System paralleler Durchmesser über, und man erhält als Resultat den Satz: Ein Kreisbüschel und ein Büschel paralleler Durchmesser erzeugen eine gleichseitige Hyperbel; die Grundpunkte des Kreisbüschels sind Diametralpunkte für dieselbe und die Halbirungslinien der Winkel, welche die Richtung der Durchmesser mit der Axe des Kreisbüschels bildet, bezeichnen die Asymptotenrichtungen. Die bekannte Construction der Hyperbel als Ort der Endpunkte der zur Axe senkrechten Durchmesser in den Kreisen eines Büschels gründet sich auf einen speciellen Fall des obigen allgemeinen Satzes.

Es ist nicht ohne Interesse, diese Entstehung der gleichseitigen Hyperbel von einem andern Gesichtspunkte aufzufassen. Nach einem von Küpper herrührenden Satze erzeugt nämlich ein Kreisbüschel mit dem Büschel der durch einen festen Punkt gehenden Durchmesser eine circulare Curve dritter Ordnung, für welche die unendlich fernen Kreispunkte conjugirte Punkte sind; wenn der Mittelpunkt des Durchmesserbüschels ins Unendliche rückt, so zerfällt die Curve dritter Ordnung in eine gleichseitige Hyperbel und die unendlich ferne Gerade. Bei der zweiteiligen Curve (Kreisbüschel mit reellen Grundpunkten) gibt der unendliche Curvenast den einen, das

---

1) Zwei parallele und ungleichlaufende, projectivisch-gleiche Kreisbüschel erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung; denn die Chordalen zugeordneter Kreise gehen durch einen festen Punkt, den gemeinsamen Mittelpunkt der Centrallinien, welcher mit dem Mittelpunkte des Parallelogramms der Grundpunkte zusammenfällt; mithin ist das Erzeugniss gleichbedeutend mit dem Erzeugniss eines Kreisbüschels und eines mit ihm projectivischen Strahlenbüschels. Die reelle Asymptote der Curve geht durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels und steht normal zur Axe des Kreisbüschels.

Digitized by Google

Oval streckt sich zu dem andern Hyperbelast aus; bei der einteiligen Curve (Kreisbüschel mit imaginären Grundpunkten) teilt sich der unendliche Ast in die beiden Hyperbeläste. E. Czuber.

4.

Ueber Congruenz und Symmetrie der Gebilde von beliebig vielen Dimensionen.

1) Zwei in zwei linearen n dehnungen enthaltene Gebilde A, B, deren Punkte sich eindeutig entsprechen, wollen wir structurgleich nennen, wenn die Entfernung je zweier Punkte des einen der Entfernung der entsprechenden Punkte des andern gleich ist.

2) Aus dieser Bedingung folgt, dass einer Geraden in A eine Gerade in B und einem Winkel in A ein gleicher Winkel in B entspricht. Denn, liegen drei Punkte von A in gerader Linie, so ist eine der 3 Entfernungen die Summe der beiden andern, daher können die 3 entsprechenden Punkte von B nicht Ecken eines Dreiecks sein. Bilden nun 2 entsprechende Pare von Geraden 2 entsprechende Winkel, und man begrenzt deren Schenkel durch entsprechende Punkte, so sind die Dreiecke, deren Ecken diese Punkte und der Scheitel sind, congruent wegen Gleichheit aller Seiten, mithin auch jene entsprechenden Winkel gleich.

3) Demzufolge entspricht einem orthogonalen Axensystem in A ein solches in B, und vermöge der anfänglichen Bedingung haben bezüglich auf die entsprechenden Axen die entsprechenden Punkte gleiche Coordinaten, und zwar mit gleichen Vorzeichen, wenn die positiven Arme der Axen einander entsprechen.

4) Dass umgekehrt aus den gleichen Coordinaten auch gleiche Entfernungen folgen, leuchtet leicht ein. Wir können daher auch definiren:

5) Zwei Gebilde sind structurgleich, wenn ihre entsprechenden Punkte bezüglich auf irgend zwei orthogonale Axensysteme gleiche Coordinaten haben.

6) Da aber die Wahl des positiven Armes jeder der n Axen willkürlich ist, so gibt es 2^n verschiedene Coordinatensysteme, für welche das Gebilde A dem Gebilde B structurgleich ist.

7) Wird nun das Gebilde A auf ein bestimmtes Axensystem

Digitized by Google

bezogen in Coordinaten ausgedrückt und ein Gebilde B bezüglich auf eine der 2^n Axen in denselben Coordinaten dargestellt, so ist nach 5) das Gebilde B dem Gebilde A structurgleich. Folglich ist A 2^n verschiedenen Gebilden B und diese unter einander structurgleich, während die den Axen von A entsprechenden Axen von B sämtlich in dieselben Geraden fallen.

8) Diese 2^n structurgleichen Gebilde, d. h. diejenigen, welche in denselben Coordinaten bezüglich auf dieselben Geraden als Axen, aber mit verschiedener Wahl der positiven Arme dargestellt sind, heissen symmetrisch liegende.

9) Die Axen (B) mögen gegen die Axen (A) die Richtungscosinus

$$\begin{array}{lcccccc}
1) & \cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\
2) & \sin\varphi, & \cos\varphi, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\
3) & 0, & 0, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\
4) & 0, & 0, & 0. & 1, & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n) & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots & 1
\end{array}$$

und einen gemeinsamen Anfangspunkt haben. Die Bedingung der Orthogonalitat ist sichtlich allseitig erfüllt. Die Axen (B) fallen von der dritten an mit den entsprechenden Axen (A) zusammen, und ihre positiven Richtungen stimmen überein. Die beiden ersten Axen (B) bilden mit den entsprechenden von (A) den stetig variirenden Winkel φ, das heisst: Ein System von n Axen kann um $n-2$ beliebige seiner Axen, welche in Ruhe bleiben, rotiren.

10) Für $\varphi = 0$ fallen die Systeme zusammen, für $\varphi = 2R$ haben die zwei ersten Axen beider Systeme entgegengesetzte Richtung. Daraus folgt bei wiederholter Anwendung: Symmetrisch liegende Gebilde, von deren entsprechenden Axen eine gerade Anzahl entgegengesetzte positive Arme haben, lassen sich durch Bewegung innerhalb der n dehnung zur Deckung bringen. Ist es eine ungerade Anzahl, so lässt sich dieselbe auf 1 reduciren.

11) Aus dem Vorstehenden ergibt sich eine von der Lage in der n dehnung unabhängige' Scheidung der structurgleichen n dehnigen Gebilde. Congruent in der n dehnung heissen diejenigen Gebilde, welche sich durch Bewegung innerhalb der n dehnung zur Deckung bringen lassen, symmetrisch in der n dehnung diejenigen structurgleichen 2 Gebilde, deren entsprechende Axen durch Bewegung innerhalb der n dehnung derart zur Deckung gelangen können, dass $n-1$ positive Arme derselben mit den entsprechenden

Digitized by Google

zusammenfallen, während 1 Axe mit der entsprechenden entgegengesetzten positiven Arm hat. Hiernach sind alle symmetrisch liegende Gebilde congruent, wenn eine gerade, symmetrisch, wenn eine ungerade Anzahl entsprechender positiver Axenarme entgegengesetzt sind.

12) Lässt man eine Bewegung in $(n+1)$ter Dimension zu, so kann man das System der Richtungscosinus der Axen (B) gegen die Axen (A) folgendermassen annehmen:

$$\begin{array}{rcccccc}
1) & \cos\varphi, & 0, & 0, & \ldots & 0, & -\sin\varphi \\
2) & 0, & 1, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\
3) & 0, & 0, & 1, & \ldots & 0, & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
n) & 0, & 0, & 0, & \ldots & 1, & 0 \\
n+1) & \sin\varphi, & 0, & 0, & \ldots & 0, & \cos\varphi
\end{array}$$

Bei variirendem φ rotirt das Axensystem um $n-1$ feste Axen 2) 3) ... n). Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2R$ befinden sich die n ersten Axen (B) in der n dehnung, und zwar fallen für $\varphi = 0$ alle positiven Arme mit den entsprechenden zusammen, für $\varphi = 2R$ hat der positive Arm der ersten Axe allein entgegengesetzte Lage. Ist also ein n dehniges Gebilde bezüglich auf die n ersten Axen bestimmt, so kommt es nach Rotation um 2R durch $(n+1)$te Dimension in symmetrischer Lage wieder in derselben n dehnung an, daher kann auch durch umgekehrte Bewegung das dem A symmetrische Gebilde B mit A zur Deckung gebracht werden. Wir können das Resultat so aussprechen: In der n dehnung sind alle structurgleichen Gebilde von weniger als n Dimensionen congruent.

13) Es bleibt noch zu beweisen, dass n dehnige symmetrische Gebilde in der n dehnung nie congruent sind. Die Axensysteme (A) und (B) mögen die ersten $n-1$ Axen und deren positive Arme gemein haben; dann sind die $n-1$ ersten Richtungscosinus der Axen (B) gegen sämtliche $n-1$ ersten Axen (A) null, folglich der allein übrigbleibende $n$te Richtungscosinus $=1$ oder $=-1$. Ist er $=-1$, so kann er durch keine stetige Veränderung $+1$ werden, w. z. b. w.

14) Speciell geht aus dem Schlusssatze 12) für $n=4$ hervor, dass ein starrer physischer Körper durch freie Bewegung in 4ter Dimension in den Raum so zurückgelangen könnte, dass die Anordnung seines Stoffes die symmetrische zur ursprünglichen wäre.

Digitized by Google

'5.

Zur Inhaltsberechnung der Flächen und Körper.

Ist bei einer Curve die Subtangente das μ-fache der Abscisse, so ist der Inhalt F eines von der Abscisse x, der Ordinate y und dem zugehörigen Bogen begrenzten Segments gegeben durch:

$$F = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot xy$$

Wenn in der Figur die Subtangente

$$AB = \mu x$$

so ist

$$OA = (1-\mu)x \quad (\mu \text{ kann auch } > 1 \text{ sein})$$

Bei einer unendlich kleinen Aenderung von x verhalten sich die Aenderungen der Flächen OBC und OAC wie $1 : \frac{1-\mu}{2}$, woraus folgt, dass:

$$F = \frac{1-\mu}{2} \cdot F + \frac{\mu}{2} xy$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der für F gegebene Ausdruck.

Wenn F die Grundfläche eines prismatischen Körpers von der Höhe 1 ist, so ist das Volumen dieses Körpers:

$$V = \frac{\mu}{1+\mu} xy$$

Bei diesem Körper kann man auch x als die Höhe und $y.1$ als Durchschnittsfläche in der Höhe x ansehen.

Hat eine Curve zur Gleichung

$$y = ax^n$$

(n positiv ganz oder gebrochen), so ist die Subtangente dieser Curve gleich $\frac{x}{n}$, also proportional der Abscisse und

$$\mu = \frac{1}{n}$$

also ist

Digitized by Google

$$F = \frac{1}{n+1} xy = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

Es ist daher auch das Volumen eines Körpers, dessen Schnittfläche in der Höhe x:

$$f(x) = ax^n$$

ist, gegeben durch

$$V = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

Kiel, den 26ten December 1889.

Ligowski.

Digitized by Google

VIII.

Ueber Kegelschnitte, die zu dem verallgemeinerten Brocard'schen Dreiecke in Beziehung stehen.

Von

Andreas Müller.

I.

Es wurde früher gezeigt, dass, wenn man die Seiten eines Dreiecks ABC mit den Eckpunkten des Brocard'schen Dreiecks $A_m B_m C_m$ verbindet, je drei sich entsprechende Verbindungsgerade sich in demselben Punkte schneiden. Derselben Erscheinung begegnen wir nun wieder, wenn wir die Seiten des Dreiecks $A_m B_m C_m$ in demselben Verhältnisse teilen und die Teilpunkte mit den Ecken des Coordinatendreiecks verbinden, so dass wir die drei Sätze erhalten:

Teilt man die Seiten des Dreiecks $A_m B_m C_m$ im nämlichen Verhältnisse und verbindet die Teilpunkte

1. auf $B_m C_m$ mit A, auf $C_m A_m$ mit B, auf $A_m B_m$ mit C,
2. auf $B_m C_m$ mit B, auf $C_m A_m$ mit C, auf $A_m B_m$ mit A,
3 auf $B_m C_m$ mit C, auf $C_m A_m$ mit A, auf $A_m B_m$ mit B,

so schneiden sich je drei zusammengehörige Verbindungsgerade in demselben Punkte. Der geometrische Ort dieser Schnittpunkte ist in drei Fällen für jedes m eine Hyperbel, so dass wir drei neue Hyperbelscharen erhalten, welche dem Coordinatendreieck umschrieben sind und welche mit H_β bezeichnet sein mögen, um sie von den früher behandelten Kegelschnitten zu unterscheiden, welche durch Verbin-

Digitized by Google

dung homologer Punkte auf den Seiten des Dreiecks ABC mit den Punkten $A_m B_m C_m$ entstehen und welche mit H_a bezeichnet seien. Den Beweis für die oben angeführten Behauptungen, dessen Gang in allen drei Fällen der nämliche ist, werden wir auf den ersten derselben beschränken dürfen.

Ein Punkt nun, welcher die Strecke $B_m C_m$ im Verhältniss $q:p$ teilt, hat den Ausdruck

$$T_a \equiv (pc^m + qb^m)A + (pb^m + qa^m)B + (pa^m + qc^m)C$$

ebenso ergeben sich die Ausdrücke für die Teilpunkte auf $C_m A_m$ und $A_m B_m$

$$T_b \equiv (pb^m + qa^m)A + (pa^m + qc^m)B + (pc^m + qb^m)C$$
$$T_c \equiv (pa^m + qc^m)A + (pc^m + qb^m)B + (pb^m + qa^m)C$$

Da der erste Teilpunkt mit A, der zweite mit B, der dritte mit C verbunden wird, so beweist das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -(pa^m + qc^m) & pb^m + qa^m \\ pc^m + qb^m & 0 & -(pb^m + qa^m) \\ -(pc^m + qb^m) & pa^m + qc^m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dass die drei Verbindungsgeraden durch denselben Punkt gehen. Für den Schnittpunkt selbst erhalten wir aus der Determinante den Ausdruck

$$Y_1 \equiv \frac{1}{pc^m + qb^m}A + \frac{1}{pa^m + qc^m}B + \frac{1}{pb^m + qa^m}C$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $p = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{b^m}A + \frac{1}{c^m}B + \frac{1}{a^m}C \equiv O_m$$

Setzt man $q = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{c^m}A + \frac{1}{a^m}B + \frac{1}{b^m}C \equiv O_m'$$

Setzt man $p = q$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{b^m + c^m}A + \frac{1}{a^m + c^m}B + \frac{1}{b^m + a^m}C \equiv S'_{m1}$$

Setzt man $p + q = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{b^m - c^m}A + \frac{1}{c^m - a^m}B + \frac{1}{a^m - b^m}C \equiv P_{m1}'$$

Digitized by Google

Wir bestimmen nun, um zu zeigen, dass alle Punkte Y auf einem Kegelschnitte liegen, welcher dem Coordinatendreiecke umschrieben ist, die Constanten eines solchen mit Rücksicht darauf, dass derselbe durch die Punkte O_m und O_m' geht. Wir erhalten dann, wenn diese Constanten mit f, g, h bezeichnet werden, die beiden Gleichungen

$$b^m f + c^m g + a^m h = 0$$
$$c^m f + a^m g + b^m h = 0$$

Daraus ergibt sich

$$f : g : h = (b^m c^m - a^{2m}) : (a^m c^m - b^{2m}) : (a^m b^m - c^{2m})$$

oder, wenn wir uns der früher schon gebrauchten Abkürzung bedienen,

$$f : g : h = \alpha_m : \gamma_m : \beta_m$$

Sollen nun die Punkte Y, deren Ausdruck oben abgeleitet wurde, auf diesem Kegelschnitte liegen, so muss die Gleichung erfüllt sein

$$\alpha_m (pc^m + qb^m) + \gamma_m (pa^m + qc^m) + \beta_m (pb^m + qa^m) = 0$$

Dies ist aber der Fall, wie man auf Grund der Determinante Δ_m erkennt, da jeder der mit p und q multiplicirten Factoren für sich null ist, wenn man einerseits die mit p, anderseits die mit q multiplicirten Glieder zusammengefasst denkt.

Der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts H_{m1} ist gegeben durch den Ausdruck

$$H_{m1} \equiv \alpha_m d_\alpha A + \gamma_m d_\gamma B + \beta_m d_\beta C$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$\beta_m + \gamma_m - \alpha_m = d_\alpha, \quad \alpha_m + \beta_m - \gamma_m = d_\gamma, \quad \alpha_m + \gamma_m - \beta_m = d_\beta$$

Um endlich zu zeigen, dass der in Betracht kommende Kegelschnitt eine Hyperbel ist, müssten wir den Ausdruck

$$\alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2 - 2(\alpha_m \beta_m + \alpha_m \gamma_m + \beta_m \gamma_m)$$

discutiren und von demselben dartun, dass er grösser ist als null. Da aber im vorliegenden Falle die Punkte O_m und O_m' auf dem Kegelschnitte liegen, diese aber innerhalb des Coordinatendreiecks, welchem der Kegelschnitt umschrieben ist, sich befinden, so können wir uns einfach auf den Satz stützen [1]): Wenn von vier Punkten in einer Ebene der eine innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt, so können durch sie weder Ellipsen noch Parabeln, sondern bloss Hyperbeln geführt werden.

---

1) Möbius d. b. C. 3. Absch. § 254.

Digitized by Google

Was nun noch die Hyperbeln angeht, welche auf die oben unter 2. und 3. angegebene Weise entstehen, so sind die auf denselben liegenden Punkte gegeben durch die Ausdrücke

$$Y_2 \equiv \frac{1}{pa^m + qc^m} A + \frac{1}{pb^m + qa^m} B + \frac{1}{pc^m + qb^m} C$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{pb^m + qa^m} A + \frac{1}{pc^m + qb^m} B + \frac{1}{pa^m + qc^m} C$$

Für $p = 0$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C \equiv O_m'$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv G_{-m}$$

Für $q = 0$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv G_{-m}$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C \equiv O_m$$

Für $p = q$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{a^m + c^m} A + \frac{b}{b^m + a^m} B + \frac{1}{c^m + b^m} C = S_{m_1}'$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{b_m + a^m} A + \frac{1}{c^m + b^m} B + \frac{1}{a^m + c^m} C = S_{m_2}'$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_2 \equiv \frac{1}{a^m - c^m} A + \frac{1}{b^m - a^m} B + \frac{1}{c^m - b^m} C \equiv P_{m_2}'$$

$$Y_3 \equiv \frac{1}{b^m - a^m} A + \frac{1}{c^m - b^m} B + \frac{1}{a^m - e^m} C \equiv P_{m_3}'$$

Die Constanten für $H_{\beta 1}$ und $H_{\beta 2}$ sind bestimmt durch

$$f : g : h = \gamma_m : \beta_m : \alpha_m$$

und

$$f : g : h = \beta_m : \alpha_m : \gamma_m$$

Die Mittelpunkte also durch

$$H_{m2} \equiv \gamma_m d_\gamma A + \beta_m d_\beta B + \alpha_m d_\alpha C$$
$$H_{m3} \equiv \beta_m d_\beta A + \alpha_m d_\alpha B + \gamma_m d_\gamma C$$

Digitized by Google

II.

1. Sind A', B', C' die Mitten der Seiten des Coordinatendreiecks, haben A_m, B_m, C_m die frühere Bedeutung, und verbindet man A' mit A_m, B' mit B_m, C' mit C_m, teilt diese Strecken in demselben Verhältniss und verbindet diese Teilpunkte auf $A'A_m$ mit A, auf $B'B_m$ mit B, auf $C'C_m$ mit C, so schneiden sich je drei zusammengehörige Verbindungsgerade in demselben Punkte, der Ort aller dieser Schnittpunkte ist eine Hyperbel.

2. Verbindet man A' mit C_m, B' mit A_m, C' mit B_m und teilt die Verbindungsstrecken in demselben Verhältniss, so schneiden sich ebenso je drei zusammengehörige Verbindungsgerade in demselben Punkte, und auch diese Punkte liegen auf einer Hyperbel.

3. Verbindet man endlich A' mit B_m, B' mit C_m, C' mit A_m durch Gerade, teilt diese Strecken in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte auf $A'B_m$ mit A, auf $B'C_m$ mit B, auf $C'A_m$ mit C, so schneiden sich wie vorhin je drei der Verbindungsgeraden in einem Punkte, und die verschiedenen so erhaltenen Schnittpunkte liegen auf einer dritten Hyperbel.

Der Beweis für diese Behauptungen, dessen Gang in den drei Fällen der nämliche ist, soll hier für den dritten derselben erbracht werden. Wir teilen die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ in dem Verhältniss $q:p$, nennen die Teilpunkte bzhw. T_a, T_b, T_c, und stellen zunächst die Ausdrücke für diese Teilpunkte fest. Nun ist aber

$$T_a = \frac{1}{p+q}\left(qB_m + p\,\frac{B+C}{2}\right)$$

also

$$T_a = \frac{1}{p+q}\left[q\,\frac{c^m A + b^m B + a^m C}{\Sigma} + p\,\frac{B+C}{2}\right]$$

oder

$$T_a \equiv 2qc^m A + (2qb^m + p\Sigma)\,B + (2qa^m + p\Sigma)\,C$$

Ebenso wird

$$T_b \equiv (2qb^m + p\Sigma)\,A + 2qa^m B + (2qc^m + p\Sigma)\,C$$
$$T_c \equiv (2qa^m + p\Sigma)\,A + (2qc^m + p\Sigma)\,B + 2qb^m C$$

In diesen Ausdrücken ist zur Abkürzung

$$\Sigma = a^m + b^m + c^m$$

gesetzt. Denkt man sich nun den ersten Punkt mit A, den zweiten mit B, den dritten mit C verbunden, so erhält für diesen Fall die Determinante (Formel 3) folgende Form

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} 0 & -(2qa^m+p\Sigma), & 2qb^m+p\Sigma \\ 2qc^m+p\Sigma, & 0 & -(2qb^m+p\Sigma) \\ -(2qc^m+p\Sigma), & 2qa^m+p\Sigma, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe verschwindet, wie man nach Addition der Reihen sofort erkennt, und lässt somit ersehen, dass in der Tat die drei Verbindungsgeraden durch denselben Punkt gehen.

Man erhält aus dieser Determinante das Verhältniss der Coordinaten eines Schnittpunktes:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (2qa^m+p\Sigma)(2qb^m+p\Sigma) : (2qb^m+p\Sigma)(2qc^m+p\Sigma) \\ : (2qc^m+p\Sigma)(2qa^m+p\Sigma)$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke, um einige Punkte näher kennen zu lernen, zunächst $p=0$, so wird der Schnittpunkt

$$Y_3 \equiv a^m b^m A + b^m c^m B + c^m a^m C$$

dies ist aber der Punkt O_m'. Setzen wir $q=0$, so wird

$$Y_3 \equiv A+B+C$$

dies ist der Punkt G_0. Setzen wir ferner $q=-p$, so wird

$$Y_3 \equiv \delta_a . \delta_b A + \delta_b . \delta_c B + \delta_c . \delta_a C$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$b^m+c^m-a^m = \delta_a, \quad a^m+c^m-b^m = \delta_b, \quad a^m+b^m-c^m = \delta_c$$

Dieser Punkt soll mit M_{m3}' bezeichnet werden. Setzen wir $p=-2q$, so wird

$$Y_3 \equiv (b^m+c^m)(a^m+c^m)A + (a^m+c^m)(a^m+b^m)B \\ + (a^m+b^m)(b^m+c^m)C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{a^m+b^m}A + \frac{1}{b^m+c^m}B + \frac{1}{a^m+c^m}C$$

dieser Punkt ist oben mit S_{m3}' bezeichnet worden. Setzen wir endlich $p=q$, so wird

$$Y \equiv (3a^m+b^m+c^m)(a^m+3b^m+c^m)A + (a^m+3b^m+c^m)(a^m+b^m+3c^m)B \\ + (a^m+b^m+3c^m)(3a^m+b^m+c^m)C$$

oder

$$Y = \frac{1}{a^m+b^m+3c^m}A + \frac{1}{3a^m+b^m+c^m}B + \frac{1}{a^m+3b^m+c^m}C$$

dieser Punkt soll mit R_{m3}' bezeichnet werden.

Digitized by Google

Aus dem Ausdrucke für den Schnittpunkt dreier hier in Betracht kommenden Geraden:

$$Y \equiv (2qa^m + p\Sigma)(2qb^m + p\Sigma)A + (2qb^m + p\Sigma)(2qc^m + p\Sigma)B$$
$$+ (2qc^m + p\Sigma)(2qa^m + p\Sigma)C$$

ersieht man, dass die für dasselbe m und verschiedene p und q erhaltenen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Dieser Kegelschnitt ist dem Coordinatendreieck ABC umschrieben. Um uns davon zu überzeugen, bestimmen wir mit Rücksicht darauf, dass auf dem Kegelschnitte die Punkte G_0 und O_m' liegen, die Constanten f, g und h. Wir erhalten zu diesem Zwecke die beiden Gleichungen

$$f + g + h = 0$$
$$c^m f + a^m g + b^m h = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (b^m - a^m) : (c^m - b^m) : (a^m - c^m)$$

Soll nun irgend ein anderer Schnittpunkt mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3 auf dem durch die fünf Punkte A, B, C, G_0 und O_m' bestimmten Kegelschnitte liegen, so muss wieder sein

$$\frac{f}{x_1} + \frac{g}{x_2} + \frac{h}{x_3} = 0$$

Im vorliegenden Falle erhält man aber

$$(b^m - a^m)(2qc^m + p\Sigma) + (c^m - b^m)(2qa^m + p\Sigma)$$
$$+ (a^m - c^m)(2qb^m + p\Sigma) = 0$$

was sofort ersichtlich ist, mithin liegen alle oben gekennzeichneten Schnittpunkte auf jenem Kegelschnitte.

Dieser Kegelschnitt kann nach einem früher angeführten Satze nur eine Hyperbel sein, da er ja durch die Punkte A, B, C und G_0 geht, G_0 aber immer innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Es seien die hieher gehörigen Hyperbeln mit $H_{\gamma 3}$ bezeichnet, dann sind die Ausdrücke für die Punkte auf $H_{\gamma 1}$ und $H_{\gamma 2}$ bzhw.

$$Y_1 \equiv \frac{1}{2qa^m + p\Sigma} A + \frac{1}{2qb^m + p\Sigma} B + \frac{1}{2qc^m + p\Sigma} C$$

$$Y_2 = \frac{1}{2qb^m + p\Sigma} A + \frac{1}{2qc^m + p\Sigma} B + \frac{1}{2qa^m + p\Sigma} C$$

Daraus ergibt sich für $p = 0$

$$Y_1 = G_{-m}, \quad Y_2 = O_m$$

Für $p = q$ erhält man

$$Y_1 = R_{m1}' \quad Y_2 = R_{m2}'$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_1 = M_{m1}', \quad Y_2 = M_{m2}'$$

Für $p + 2q = 0$ wird

$$Y_1 = S_{m1}', \quad Y_2 = S_{m2}'$$

III.

Bezeichnen A', B', C' bzhw. die Mitten der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC und ebenso A_m', B_m', C_m' die Mitten der Seiten $B_m C_m$, $C_m A_m$, $A_m B_m$ des Dreiecks $A_m B_m C_m$, so lassen sich folgende Sätze aussprechen:

1. Verbindet man A' mit A_m', B' mit B_m', C' mit C_m', teilt diese Strecken in demselben Verhältniss und verbindet den Teilpunkt auf $A'A_m'$ mit A, auf $B'B_m'$ mit B, auf $C'C_m'$ mit C, so schneiden sich je drei solcher Verbindungsgesaden in dem nämlichen Punkte, und die für das dasselbe m auf die angegebene Art erhaltenen Punkte liegen auf einer Hyperbel.

2. Teilt man die Strecke $A'C_m'$, $B'A_m'$, $C'B_m'$ in demselben Verhältniss und verbindet den Teilpunkt auf $A'C_m'$ mit A, auf $B'A_m'$ mit B, auf $C'B_m'$ mit C, so schneiden sich wieder je drei solcher Verbindungsgeraden in demselben Punkte und der Ort der Schnittpunkte ist eine Hyperbel.

3. Teilt man endlich die Strecken $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$ in demselben Verhältniss, verbindet den ersten Teilpunkt mit A, den zweiten mit B, den dritten mit C, so schneiden sich die drei Geraden in demselben Punkte, und alle so erhaltenen Schnittpunkte liegen auf einer Hyperbel.

Der Beweis, dessen Gang in den drei Fällen der nämliche ist, soll hier wieder für den dritten derselben erbracht werden.

Es ist

$$A' = \frac{B+C}{2}$$

und

$$B_m' = \frac{(a^m + b^m)A + (a^m + c^m)B + (b^m + c^m)C}{2\Sigma}$$

Teilt man nun die Strecke $A'B_m'$ im Verhältniss von $q:p$, so erhält man für den Teilpunkt

Digitized by Google

$$T_a = \frac{1}{p+q}\left[p\left(\frac{B+C}{2}\right) + \frac{q((a^m+b^m)A+(a^m+c^m)B+(b^m+c^m)C)}{2\Sigma}\right]$$

oder

$$T_a \equiv q(a^m+b^m)A + (p\Sigma + q(a^m+c^m))B + (p\Sigma + q(b^m+c^m))C$$

Ebenso erhält man für der Teilpunkt T_b der Strecke $B'C_m'$

$$T_b \equiv (p\Sigma + q(a^m+c^m))A + q(b^m+c^m)B + (p\Sigma + q(a^m+b^m))C$$

und endlich für den Teilpunkt T_c auf der Strecke $C'A_m'$

$$T_c = (p\Sigma + q(b^m+c^m))A + (p\Sigma + q(a^m+b^m))B + q(a^m+c^m)C$$

Da nun aber der erste Teilpunkt mit A, der zweite mit B, der dritte mit C verbunden wird, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -(p\Sigma+q(b^m+c^m)), & p\Sigma+q(a^m+c^m) \\ p\Sigma+q(a^m+b^m), & 0, & -(p\Sigma+q(a^m+c^m)) \\ -(p\Sigma+q(a^m+b^m)), & p\Sigma+q(b^m+c^m) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein, was in der Tat der Fall ist, wie nach Addition der Reihen sofort ersichtlich wird.

Für die Coordinaten eines solchen Schnittpunktes Y der Geraden AT_a, BT_b, CT_c erhält man aus der Determinante:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = {} & (p\Sigma+q(a^m+c^m))(p\Sigma+q(b^m+c^m)) \\ & : (p\Sigma+q(a^m+c^m))(p\Sigma+q(a^m+b^m)) \\ & : (p\Sigma+q(a^m+b^m))(p\Sigma+q(b^m+c^m)) \end{aligned}$$

Setzt man nun, um einige dieser Punkte näher kennen zu lernen, $q = 0$, so wird

$$Y_3 = \frac{A+B+C}{3}$$

dies ist aber der Schwerpunkt G_0, wie zu erwarten stand.

Setzt man $p = 0$, so wird

$$Y_3 = \frac{1}{a^m+b^m}A + \frac{1}{b^m+c^m}B + \frac{1}{a^m+c^m}C$$

Dies ist aber der Punkt, welcher oben mit S_{m3}' bezeichnet wurde, Es gehen also durch diesen Punkt die Geraden, welche die Ecken des Coordinatendreiecks mit den Seitenmitten des Dreiecks $A_mB_mC_m$ verbinden, d. i. die Geraden AB_m', BC_m', CA_m', wie wir soeben erkannten; in diesem Punkte schneiden sich noch drei Gerade, wie

Digitized by Google

schon früher dargetan wurde. Wenn man nämlich die Geraden $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ um ihre eigene Grösse nach entgegengesetzter Richtung verlängert und die so erhaltenen Punkte mit A, B, C bzhw. verbindet, so schneiden sich diese Geraden gleichfalls im Punkte S_{m3}'. Daraus wird ersichtlich, dass je zwei der genannten Geraden zusammenfallen, und dass also je vier der oben genannten Punkte in gerader Linie liegen, z. B. die Punkte B, S_{m3}', C_m' und der oben näher gezeichnete Punkt auf $B'C_m$.

Setzt man ferner $p = q$, so wird

$$\begin{aligned} Y \equiv & (2a^m + b^m + 2c^m)(a^m + 2b^m + 2c^m)A \\ & + (2a^m + b^m + 2c^m)(2a^m + 2b^m + c^m)B \\ & + (2a^m + 2b^m + c^m)(a^m + 2b^m + 2c^m)C \end{aligned}$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{2a^m + 2b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + 2b^m + 2c^m} B + \frac{1}{2a^m + b^m + 2c^m} C$$

dieser Punkt soll mit D_{m3}' bezeichnet werden.

Setzt man $q = -p$, so wird

$$Y_3 \equiv a^m b^m . A + b^m c^m . B + a^m c^m . C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

dies ist aber der Punkt O_m'. Es gehen also die Geraden, welche man durch die Eckpunkte A, B, C des Coordinatendreiecks parallel zieht bzhw. zu den Geraden $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$, durch den Punkt O_m'. Da aber auf der Geraden AO_m' auch der Punkt B_m, auf BO_m' auch C_m, auf CO_m' auch A_m liegt, so finden wir, dass $AB_m \parallel A'B_m'$, $BC_m \parallel B'C_m'$, $CA_m \parallel B'C_m$, $CA_m \parallel C'A_m'$ ist.

Setzt man ferner $q = -2p$, so wird

$$Y_3 \equiv \delta_a \delta_b A + \delta_b \delta_c B + \delta_c \delta_a C$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{\delta_c} A + \frac{1}{\delta_a} B + \frac{1}{\delta_b} C$$

wenn δ_a, δ_b, δ_c die früher gebrauchten Abkürzungen bezeichnen Dies ist aber der Punkt M_{m3}'. Wenn man also die Strecken $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$ über B_m', C_m', A_m' hinaus bzhw. je um die eigene Grösse verlängert und die betr. Punkte, welche mit $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_3$ bezeichnet werden mögen, mit A, B, C verbindet, so schneiden sich die letzten drei Verbindungslinien im Punkte M_{m3}'. Wir haben aber

Digitized by Google

früher gefunden, dass die Gerade $AM_{m3}' \parallel A'B_m$, $BM_{m3}' \parallel B'C_m$ und $CM_{m3}' \parallel C'A_m$, und soeben hatten wir erkannt, dass $AB_m \parallel A'B_m'$. Wir stossen also durch die Verlängerung von $A'B_m'$ um die eigene Grösse über B_m' hinaus auf den vierten Eckpunkt eines Parallelogrammes, dessen andere Ecken A, B_m und A' sind, und dessen eine Seite im Punkte B_m' halbirt erscheint. Ebenso sind die Figuren $BC_mB'\mathfrak{B}_3$ und $CA_mC'\mathfrak{C}_3$ Parallelogramme. Ferner ist ersichtlich, dass $A'B_m' = \frac{1}{2}AB_m$ und $B'C_m' = \frac{1}{2}BC_m$ und $C'A_m' = \frac{1}{2}CA_m$. Da ferner $A'\mathfrak{A}_3$ und A_mC_m sich in B_m' gegenseitig halbiren, so ist auch die Figur $A'A_m\mathfrak{A}_3C_m$ ein Parallelogramm, und aus dem gleichen Grunde sind auch die Vierecke $B'B_m\mathfrak{B}_3A_m$ und $C'C_m\mathfrak{C}_3B_m$ Parallelogramme.

Setzt man endlich $q = -\frac{2}{3}p$, so wird

$$\begin{aligned} Y_3 \equiv (3a^m + b^m + c^m)(a^m + 3b^m + c^m)A \\ + (a^m + 3b^m + c^m)(a^m + b^m + 3c^m)B \\ + (a^m + b^m + 3c^m)(3a^m + b^m + c^m)C \end{aligned}$$

oder

$$Y_3 \equiv \frac{1}{a^m + b^m + 3c^m}A + \frac{1}{3a^m + b^m + c^m}B + \frac{1}{a^m + 3b^m + c^m}C$$

Dies ist aber der Punkt, den wir oben mit R_{m3}' bezeichnet haben. Wir erkannten damals, dass in diesem Punkte die Geraden, welche von A nach der Mitte von $A'B_m$, von B nach der Mitte von $B'C_m$ und von C nach der Mitte von $C'A_m$ gezogen werden, sich treffen. Aus dem aber, was wir soeben fanden, ergibt sich, dass, wenn man die Geraden $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$ über A', B', C' hinaus um die zweifache Grösse dieser Strecken verlängert und die so erhaltenen Teilpunkte λ, μ, ν mit A, B, C bzhw. verbindet, diese Geraden ebenfalls durch den Punkt R_{m3}' gehen. Es liegen mithin auf auf der Geraden AR_{m3} die Mitte von $A'B_m$ und der Punkt λ der Gerade $A'B_m'$, ebenso liegen auf BR_{m3}' die Mitte von $B'C_m$ und der Punkt μ auf $B'C_m'$, endlich liegen auf CR_{m3}' die Mitte von $C'A_m$ und der Punkt ν auf $C'A_m'$.

Der Ausdruck für einen Schnittpunkt

$$\begin{aligned} Y_3 \equiv (p\Sigma + q(a^m + c^m))(p\Sigma + q(b^m + c^m))A \\ + (p\Sigma + q(a^m + c^m))(p\Sigma + q(a^m + b^m))B \\ + (p\Sigma + q(a^m + b^m))(p\Sigma + q(b^m + c^m))C \end{aligned}$$

lässt erkennen, dass alle für dasselbe m und variable p und q erhaltenen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Bedenken wir nun, dass auf diesem Kegelschnitte die Punkte G_0, O_m', S_{m3}' und R_{m3}' liegen, so ist ersichtlich, dass derselbe identisch sein muss mit der früher gefundenen Hyperbel $H_{\gamma 3}$, welche entsteht, wenn man

Digitized by Google

die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ in demselben Verhältniss teilt und die Teilpunkte mit A, B, C bzhw. verbindet. Dass dies in der Tat der Fall ist, ersehen wir auch aus der Gleichung

$$(b^m - a^m)(p\Sigma + q(a^m + b^m)) + (c^m - b^m)(p\Sigma + q(b^m + c^m)) \\ + (a^m - c^m)(p\Sigma + q(a^m + c^m)) = 0$$

Nun ist aber auch klar, dass die Eigenschaft, welche soeben von den Strahlen AR_{m3}', BR_{m3}', CR_{m3}' und früher von den Strahlen AS_{m3}', BS_{m3}', CS_{m3}' hervorgehoben wurde, von allen Strahlen gelten muss, welche irgend einen Punkt C der Hyperbel $H_{\gamma 3}$ mit den Ecken des Coordinatendreiecks verbinden. So sei der Punkt X der Hyperbel mit A, B und C verbunden, und es schneide AX die Gerade $A'B_m$ in λ und $A'B_m'$ in λ_1, ferner BX die Gerade $B'C_m$ in μ und $B'C_m'$ in μ_1, endlich CX die Gerade $C'A_m$ in ν und $C'A_m'$ in ν_1, dann hat man

$$A'\lambda : B_m\lambda = B\mu' : C_m\mu = C\nu' : A_m\nu$$

und

$$A'\lambda_1 : B_m'\lambda_1 = B\mu_1 : C_m'\mu_1 : C\nu_1' : A_m'\nu_1$$

Um nach dieser Richtung noch einen Fall besonders zu untersuchen, ziehen wir von A, B, C die Strahlen nach dem oben mit D_{m3}' bezeichneten Punkte. Diese Strahlen halbiren, wie oben erkannt wurde, die Geraden $A'B_m'$, $B'C_m'$, $C'A_m'$. Um nun zu erkennen, 'in welchem Verhältniss die Strecken $A'B_m'$, $B'C_m$, $C'A_m$ durch die Strahlen AD_{m3}' etc. geteilt werden, dürfen wir nur den Ausdruck

$$D_{m3}' \equiv \frac{1}{2a^m + 2b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + 2b^m + 2c^m} B + \frac{1}{2a^m + b^m + 2c^m} C$$

aus dem allgemeinen Ausdrucke, welcher sich für die Teilung der Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ nach demselben Verhältniss ergeben hatte, ableiten. Man muss aber in dem Ausdrucke

$$Y_3 \equiv \frac{1}{2qc^m + p\Sigma} A + \frac{1}{2qa^m + p\Sigma} B + \frac{1}{2qb^m + p\Sigma} C$$

$q = -\frac{1}{4}p$ setzen, um den Ausdruck für D_{m3}' zu erhalten. Mithin muss man die Strecken $A'B_m$, $B'C_m$, $C'A_m$ um ein Drittel der eigenen Grösse über A', B', C' bzhw. hinaus verlängern, dann fallen diese Teilpunkte bezüglich auf die Geraden AD_{m3}', BD_{m3}', CD_{m3}'.

Was den Mittelpunkt der fraglichen Hyperbel angeht, so findet sich derselbe auf dem schon mehrfach betretenen Wege aus den oben abgeleiteten Constanten. Bezeichnen wir denselben mit W_{m3}, so wird

Digitized by Google

$$W_{m3} \equiv (a^m - b^m)^2 A + (b^m - c^m)^2 B + (c^m - a^m)^2 C$$

Man erkennt sofort, dass dieser Punkt auf der Geraden $M_{m3} G_{2m3}$ liegt, denn es ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} (a^m - b^m)^2, & (b^m - c^m)^2, & ({}^m - a^m)^2 \\ c^{2m} - (a^m - b^m)^2, & a^{2m} - (b^m - c^m)^2, & b^{2m} - (c^m - a^m)^2 \\ c^{2m} & a^{2m} & b^{2m} \end{vmatrix} = 0$$

wie sich sofort ergibt, wenn man die zweite Reihe zur ersten addirt, die dritte davon subtrahirt.

Um nun an die vorstehenden Erörterungen noch einige weitere Bemerkungen knüpfen zu können, soll zunächst ein Satz, dessen Geltung für die Winkelgegenpunkte bekannt und für die Gegenpunkte im weiteren Sinne von mir anderwärts erwiesen wurde, hier noch eine weitere Ausdehnung erfahren.

Durchläuft nämlich ein Punkt eine gerade Linie, und man bildet die Coordinaten eines zweiten Punktes aus denen des ersten so, dass man die reciproken Werte der ersteren mit einem beliebigen Factor multiplicirt, so durchläuft der zweite Punkt einen Kegelschnitt, welcher dem Coordinatendreieck umschrieben ist.

Geht nämlich die Gerade, welche der erste Punkt durchläuft, durch die beiden Punkte

$$P_1 \equiv a_1 A + b_1 B + c_1 C$$

und

$$P_2 \equiv a_2 A + b_2 B + c_2 C$$

so müssen, wie wir wissen, die Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines dritten Punktes auf jener Geraden der Gleichung genügen

1) $$x_1 \alpha + x_2 \beta + x_3 \gamma = 0$$

worin α, β und γ selbstverständliche Abkürzungen bezeichnen. Soll ferner ein Punkt mit den Coordinaten x_1', x_2', x_3' auf einem Kegelschnitte liegen, welcher dem Coordinatendreieck umschrieben ist, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen:

2) $$\frac{f}{x_1'} + \frac{g}{x_2'} + \frac{h}{x_1'} = 0$$

worin f, g und h beliebig gewählt werden können. Bildet man nun jederzeit die x' aus den x so, dass man hat

Digitized by Google

3) $$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{s}{x_1} : \frac{t}{x_2} : \frac{u}{x_3}$$

und wählt man f, g und h so, dass man hat

$$f = s\alpha, \quad g = t\beta, \quad h = u\gamma$$

so geht nach Einsetzung dieser Werte in die linke Seite der Gleichung 2), diese in die linke Seite der Gleichung 1) über, und man hat

$$\frac{s\alpha x_1}{s} + \frac{t\beta x_2}{t} + \frac{u\gamma x_3}{u} = 0$$

so dass also in der Tat alle Punkte, deren Coordinaten x' in der oben angegebenen Weise gebildet sind, auf dem durch f, g und h bestimmten Kegelschnitte liegen.

Wählt man die Constanten des Kegelschnittes so, dass man hat

$$f : g : h = s : t : u$$

so geht die Gleichung 2) des Kegelschnittes über in

$$\frac{s}{x_1'} + \frac{t}{x_2'} + \frac{u}{x_3'} = 0$$

Bildet man nun aus den Coordinaten x' die Coordinaten x eines Punktes in der unter 3) angegebenen Weise, so geht die Gleichung 2) über in

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

dieser Punkt aber liegt im unendlichen. Es liegen daher alle Punkte, deren Coordinaten auf die gegebene Art aus den Coordinaten der Punkte, die auf dem Kegelschnitte mit den Constanten s, t, u liegen, gebildet sind, auf der unendlich entfernten Geraden. Diese Tatsache kann unter Umständen dazu dienen, sich über die Natur des der Geraden 1 entsprechenden Kegelschnittes mit den Constanten $s\alpha$, $t\beta$, $u\gamma$ näheren Aufschluss zu verschaffen. Wenn nämlich die Gerade 1 den Kegelschnitt

$$\frac{s}{x_1'} + \frac{t}{x_2'} + \frac{u}{x_3'} = 0$$

schneidet, so ist der Kegelschnitt

$$\frac{s\alpha}{x_1'} + \frac{t\beta}{x_2'} + \frac{u\gamma}{x_3'} = 0$$

eine Hyperbel; wenn jene Gerade den ersten Kegelschnitt berührt, ist der zweite eine Parabel; und wenn sie ausserhalb des ersten Kegelschnittes fällt, ist der zweite eine Ellipse. Das eben Gesagte

führt, wenn man den eingeschlagenen Weg noch einen Schritt weiter verfolgt, unmittelbar auf die oben angegebene Formel, welche für gewöhnlich über die Natur des Kegelschnittes Aufschluss bietet, deren Ableitung indes unterbleiben soll.

Wenn wir nun die gepflogene Erörterung auf den oben behandelten Kegelschnitt $H_{\gamma 3}$

$$\frac{a^m - b^m}{x_1} + \frac{b^m - c^m}{x_2} + \frac{c^m - a^m}{x_3} = 0$$

anwenden, so müssen zunächst die Punkte

$$G_{m3} \equiv c^m A + a^m B + b^m C$$
$$G_{2m3} \equiv c^{2m} A + a^{2m} B + b^{2m} C$$
$$S_{m3} = c^m(a^m + b^m) A + a^m(b^m + c^m) B + b^m(a^m + c^m) C$$
$$M_{m3} \equiv c^m(a^m + b^m - c^m) A + a^m(b^m + c^m - a^m) B + b^m(a^m - b^m + c^m) C$$
$$R_{m3} \equiv c^m(a^m + b^m + 3c^m) A + a^m(3a^m + b^m + c^m) B + b^m(a^m + 3b^m + c^m) C$$
$$D_{m3} \equiv c^m(2a^m + 2b^m + c^m) A + a^m(a^m + 2b^m + 2c^m) B + b^m(2a^m + b^m + 2c^m) C$$

in gerader Linie liegen, da die Coordinaten derselben die reciproken Werte der Coordinaten von Punkten, die auf dem betr. Kegelschnitte liegen, darstellen, jede gleichnamige derselben multiplicirt mit dem nämlichen Factor.

Es ist aber G_{m3} der Schnittpunkt der durch A_m, B_m und C_m bzhw. zu AB, BC und CA gezogenen Parallelen, ebenso G_{2m3} der Schnittpunkt der durch A_{2m}, B_{2m}, C_{2m} zu AB, BC und CA bzhw. gezogenen Parallelen. S_{m3} ist die Mitte von $G_{-m}O$; M_{m3} ist der Schnittpunkt der durch A', B', C' zu AM_{m3}', BM_{m3}', CM_{m3}' bzhw. gezogenen Parallelen. Die Richtigkeit der letzten Behauptung erkennt man daraus, dass die Determinannte [1])

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0, & -\delta_c\delta_a, & \delta_c\delta_b \\ (a^m - b^m)\delta_c, & c^m\delta_c, & -c^m\delta_c \end{vmatrix} = 0$$

ist, wovon man sich überzeugt, wenn man die dritte Reihe zur zweiten addirt Auf den Geraden $A'M_{m3}$, $B'M_{m3}$, $C'M_{m3}$ liegen auch bzhw. die Punkte B_m, C_m und A_m. Ausserdem liegt M_{m3} auch auf der Geraden $M_{m3}'G_0$ und wird die Gerade $M_{m3}M_{m3}'$ durch G_0 so geteilt, dass man hat

1) Progr. des k. Gymn. zu Kempten v. J. 1889. I 4 § 3.

Digitized by Google

$$M_{m3}G_0 : G_0 M_{m3}' = 1 : 2$$

Der Punkt G nämlich, welcher die Gerade $M_{m3}M_{m3}'$ im angegebenen Verhältniss teilt, ist gegeben durch

$$G = \frac{2M_{m3} + M_{m3}'}{3}$$

Da nun

$$M_{m3} = \frac{c^m \delta_c A + a^m \delta_a B + b^m \delta_b C}{K}$$

und

$$M_{m3}' = \frac{\delta_a \delta_b A + \delta_b \delta_c B + \delta_c \delta_a C}{K}$$

ist, wenn zur Abkürzung der Ausdruck

$$2(a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) - (a^{2m} + b^{2m} + c^{2m}) = K$$

gesetzt wird, so ist

$$G = \frac{KA + KB + KC}{3K} = G_0$$

Der Punkt M_{m3} ist auch, wie aus der Zusammensetzung seiner Coordinaten sogleich ersichtlich wird, der Mittelpunkt eines dem Coordinatendreieck umschriebenen Kegelschnittes, dessen Gleichung ist

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

Bildet man zu diesem Kegelschnitte in derselben Weise die reciproke Gerade, wie dies oben von der Geraden $M_{m3}G_{m3}$ und dem Kegelschnitte $H_{\gamma 3}$ angegeben wurde, so wird dieselbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Wir könnten also aus der Lage der Geraden $M_{m3}G_{m3}$ gegen den Kegelschnitt M_{m3} die Natur des Kegelschnittes $H_{\gamma 3}$ erkennen. Da wir uns aber auf anderem Wege überzeugten, dass jener Kegelschnitt eine Hyperbel ist, so können wir daraus den Schluss ziehen, dass die Gerade $G_{m3}M_{m3}$ den Kegelschnitt M_{m3} in zwei reellen Punkten trifft, wie dies auch die Auflösung der beiden Gleichungen

$$a^m b^m (a^m - b^m) x_1 + b^m c^m (b^m - c^m) x_2 + c^m a^m (c^m - a^m) y_3 = 0$$

und

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

deren erste die Gerade $G_{m3}M_{m3}$ darstellt, ergibt.

Digitized by Google

Der oben erwiesene Satz kann nun natürlich auch benutzt werden, um Punkte auf der Hyperbel $H_{\gamma 3}$, welche gewissen Punkten auf der Geraden $G_{m3}\,M_{m3}$ entsprechen, kennen zu lernen. Bestimmen wir zunächst den unendlich fernen Punkt U_{m3} jener Geraden, so erhalten wir dessen Coordinaten aus den beiden Gleichungen

$$a^m b^m (a^m - b^m)\,x_1 + b^m c^m (b^m - c^m)\,x_2 + c^m a^m (c^m - a^m)\,x_3 = 0$$

und

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Man erhält daraus

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = {} & c^m\left[a^m(c^m - a^m) - b^m(b^m - c^m)\right] \\ & : a^m\left[b^m(a^m - b^m) - c^m(c^m - a^m)\right] \\ & : b^m\left[c^m(b^m - c^m) - a^m(a^m - b^m)\right] \end{aligned}$$

Nun muss der entsprechende Punkt U_{m3}', dessen Coordinaten das Verhältniss

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = {} & \frac{1}{a^m(c^m - a^m) - b^m(b^m - c^m)} : \frac{1}{b^m(a^m - b^m) - c^m(c^m - a^m)} \\ & : \frac{1}{c^m(b^m - c^m) - a^m(a^m - b^m)} \end{aligned}$$

haben, sowohl auf der Hyperbel $H_{\gamma 3}$ als auch auf dem Kegelschnitte M_{m3} liegen, wovon man sich auch direct überzeugen kann.

Auf der Geraden $M_{m3}\,G_{m3}$ liegt auch der Punkt

$$\begin{aligned} Z_{m3} \equiv {} & c^m\left[a^m(b^m + c^m) + b^m(a^m + c^m) - c^{2m}\right] A \\ & + a^m\left[b^m(a^m + c^m) + c^m(a^m + b^m) - a^{2m}\right] B \\ & + b^m\left[c^m(a^m + b^m) + a^m(b^m + c^m) - b^{2m}\right] C \end{aligned}$$

und zwar halbirt derselbe die Strecke $M_{m3}\,G_{m3}$, mithin muss auch der Punkt

$$\begin{aligned} Z_{m3}' \equiv {} & \frac{1}{a^m(b^m + c^m) + b^m(a^m + c^m) - b^{2m}}\,A \\ & + \frac{1}{b^m(a^m + c^m) + c^m(a^m + b^m) - a^{2m}}\,B \\ & + \frac{1}{c^m(a^m + b^m) + a^m(b^m + c^m) - b^{2m}}\,C \end{aligned}$$

auf der Hyperbel $H_{\gamma 3}$ liegen, was sich wieder leicht verificiren lässt.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch erwähnt werden, dass für den eingangs unter 1. aufgeführten Fall an Stelle des auf der Hyperbel $H_{\gamma 3}$ liegenden Punktes O_m' der Punkt G_{-m}, im Falle 2. der Punkt O_m tritt, dass ferner der Punkt S_{m1} die Strecke $O_m O_m'$

Digitized by Google

und der Punkt S_{m2} die Strecke $G_{-m}O_m'$ halbirt. Ferner ist im Falle 1. und für $m=2$ die erwähnte Hyperbel identisch mit der sogenannten Hyperbel der neun Punkte, welche von Brocard als Hyperbel Γ bezeichnet wurde.

Wie man sieht, müssten, wenn man überhaupt, nachdem dieselbe als geometrischer Ort erkannt ist, noch besondere Punkte auf derselben hervorheben will, auch noch die beiden Punkte D_{21}' und R_{21}' erwähnt werden.

IV.

Zu jedem der in den beiden vorhergehenden Abschnitten behandelten Fällen ergeben sich Seitenstücke, wenn man die beiden Dreiecke ABC und $A_mB_mC_m$ vertauscht denkt. Wie dort, so wären auch hier wieder je drei Fälle zu unterscheiden. Es wird genügen nur je den ersten derselben zu berücksichtigen. Verbinden wir nämlich A mit A_m', B mit B_m', C mit C_m', teilen diese Strecken in demselben Verhältniss und verbinden den ersten Teilpunkt mit A_m, den zweiten mit B_m, den dritten mit C_m, so schneiden sich diese Geraden in demselben Punkte und der geometrische Ort aller für dasselbe m auf diese Weise erhaltenen Schnittpunkte ist eine Hyperbel, welche dem Dreieck $A_mB_mC_m$ umschrieben ist.

Es seien, um den Beweis zu führen, die Strecken AA_m' etc. im Verhältniss von $p:q$ geteilt, so erhält man für den Teilpunkt T_a auf der ersten Strecke

$$T_a = \frac{1}{p+q}\left(qA + p\frac{B_m+C_m}{2}\right)$$

oder, wenn für A_m und C_m die bekannten Werte gesetzt werden

$$T_a \equiv (2q\Sigma + p(b^m+c^m))\,A + p(a^m+b^m)\,B + p(a^m+c^m)\,C$$

Ebenso wird der Teilpunkt auf BB_m'

$$T_b \equiv p(a^m+b^m)\,A + (2q\Sigma + p(a^m+c^m))\,B + p(b^m+c^m)\,C$$

Endlich wird der Teilpunkt auf CC_m'

$$T_c \equiv p(a^m+c^m)\,A + p(b^m+c^m)\,B + (2q\Sigma + p(a^m+b^m))\,C$$

Sollen nun die drei Geraden, welche man erhält, wenn man den ersten Teilpunkt mit A_m, den zweiten mit B_m, den dritten mit C_m verbindet, durch denselben Punkt gehen, so muss die Determinante

Digitized by Google

$$\Sigma^3 \begin{vmatrix} p(c^m-b^m), & p(b^m-a^m)+2qb^m, & p(a^m-c^m)-2qc^m \\ p(b^m-a^m)-2qa^m, & p(a^m-c^m), & p(c^m-b^m)+2qc^m \\ p(a^m-c^m)+2qa^m, & p(c^m-b^m)-2qb^m, & p(b^m-a^m) \end{vmatrix} = 0$$

sein, was sich nach Addition der Reihen sofort ergibt.

Für die Coordinaten eines Schnittpunktes erhält man aus der Determinante den Ausdruck

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = & (4q^2 b^m c^m - 2pq(c^m - b^m)^2 + p^2 K) \\ & : (4q^2 a^m c^m - 2pq(a^m - c^m)^2 + p^2 K) \\ & : (4q^2 a^m b^m - 2pq(a^m - b^m)^2 + p^2 K) \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung den Ausdruck

$$a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m - a^{2m} - b^{2m} - c^{2m} = K$$

setzt.

Um einige dieser Schnittpunkte kennen zu lernen, setzen wir zunächst $q = 0$, dann wird der Schnittpunkt

$$Y \equiv A + B + C \equiv G_0$$

Setzen wir ferner $p = 0$, so wird

$$Y \equiv b^m c^m A + a^m c^m B + a^m b^m C$$

oder

$$Y \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv G_{-m}$$

Setzen wir weiter $p = -2q$, verlängern wir also die Strecken AA_m', BB_m', CC_m' um die eigene Grösse derselben über A_m', B_m', C_m' hinaus, und verbinden die so erhaltenen Teilpunkte mit A_m, B_m, C_m, so wird

$$Y \equiv a^m \delta_a A + b^m \delta_b B + c^m \delta_c C$$

dies ist aber der Punkt M_{m1}. Da aber die Geraden $A_m M_{m1}'$, $B_m M_{m1}$, $C_m M_{m1}$ auch durch die Punkte A', B', C' gehen, so sieht man, dass auf jeder dieser drei Geraden vier sich entprechende Punkte liegen.

Setzen wir $p = q$, verbinden wir also die Mitten der Strecken AA_m' etc. mit A_m etc., so wird

$$\begin{aligned} Y \equiv & (4b^m c^m - 2(c^m - b^m)^2 + K) A + (4a^m c^m - 2(a^m - c^m)^2 + K) B \\ & + (4a^m b^m - 2(a^m - b^m)^2 + K) C \end{aligned}$$

Dieser Punkt soll mit E_{m1} bezeichnet werden.

Digitized by Google

Um aber zu beweisen, dass die in der oben angegebenen Weise erhaltenen Schnittpunkte auf einer Hyperbel liegen, welche dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben ist, transformiren wir die Coordinaten in Bezug auf dieses Dreieck. Wie früher müssen wir dann setzen

$$A \equiv \alpha_m A + \beta_m B + \gamma_m C$$
$$B \equiv \beta_m A + \gamma_m B + \alpha_m C$$
$$C \equiv \gamma_m A + \alpha_m B + \beta_m C$$

wenn α_m, β_m, γ_m die früher gebrauchten Abkürzungen bezeichnen.

Statt aber den Ausdruck für Y zu transformiren, ist es bequemer, denselben direct abzuleiten. Nun wird der Ausdruck für T_a, wenn man A in der angegebenen Weise ersetzt und zur Abkürzung schreibt

$$S = \alpha_m + \beta_m + \gamma_m$$
$$T_a \equiv 2q\alpha_m A_m + (2q\beta_m + pS) B_m + (2q\gamma_m + pS) C_m$$

Ebenso erhält man

$$T_b \equiv (2q\beta_m + pS) A_m + 2q\gamma_m B_m + (2q\alpha_m + pS) C_m$$
$$T_c \equiv (2q\gamma_m + pS) A_m + (2q\alpha_m + pS) B_m + (2q\beta_m + pS) C_m$$

Man erhält daraus für den Schnittpunkt der Geraden $T_a A_m$, $T_b B_m$ und $T_c C_m$

$$Y \equiv (2q\beta_m + pS)(2q\gamma_m + pS) A_m + (2q\beta_m + pS)(2q\alpha_m + pS) B_m$$
$$+ (2q\alpha_m + pS)(2q\gamma_m + pS) C_m$$

Aus diesem Ausdrucke erhält man die Coordinaten der oben kennen gelernten Punkte im neuen Coordinatensystem

$$G_{-m} \equiv \beta_m \gamma_m A_m + \alpha_m \beta_m B_m + \alpha_m \gamma_m C_m$$
$$M_{m1} \equiv (\alpha_m + \gamma_m)(\alpha_m + \beta_m) A_m + (\alpha_m + \gamma_m)(\beta_m + \gamma_m) B_m$$
$$+ (\beta_m + \gamma_m)(\alpha_m + \beta_m) C_m$$
$$E_{m1} \equiv \frac{A_m}{3\alpha_m + \beta_m + \gamma_m} + \frac{B_m}{3\gamma_m + \alpha_m + \beta_m} + \frac{C_m}{3\beta_m + \alpha_m + \gamma_m}$$
$$K_{m1} \equiv \frac{1}{d_\alpha} A_m + \frac{1}{d_\beta} B_m + \frac{1}{d_\gamma} C_m$$

Zur Auffindung der Constanten eines Kegelschnittes, der durch die Punkte G_0 und G_{-m} geht, und dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben ist, hat man nun die beiden Gleichungen

$$f + g + h = 0$$
$$f\alpha_m + g\gamma_m + h\beta_m = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\beta_m - \gamma_m) : (\alpha_m - \beta_m) : (\gamma_m - \alpha_m)$$

oder unter Weglassung des überflüssigen Factors

Digitized by Google

$$f : g : h = (b^m - c^m) : (c^m - a^m) : (a^m - b_m)$$

Sollen nun die Punkte Y auf dem durch diese Constanten bestimmten Kegelschnitte liegen, so muss man haben:

$$(b^m - c^m)(2q\alpha_m + pS) + (c^m - a^m)(2q\gamma_m + pS) \\ + (a^m - b_m)(2q\beta_m + pS) = 0$$

Dies ist aber der Fall, denn das Product mit dem Factor p ist ersichtlich null, das Product mit dem Factor q aber verschwindet auf Grund der beiden aus

$$\Delta_m = a^m\alpha_m + c^m\beta_m + a^m\gamma_m$$

sich ergebenden Gleichungen

$$c^m\alpha_m + b^m\beta_m + a^m\gamma_m = 0$$
$$b^m\alpha_m + a^m\beta_m + c^m\gamma_m = 0$$

Der Mittelpunkt Φ_{m1} dieses Kegelschnittes, der, weil der Punkt G_0 innerhalb des Dreiecks $A_m B_m C_m$ liegt, immer eine Hyperbel ist, ergibt sich in Bezug auf dieses Dreieck auf bekannte Weise

$$\Phi_{m1} \equiv (b^m - c^m)^2 A_m + (c^m - a^m)^2 B_m + (a^m - b^m)^2 C_m$$

Die Hyperbel, welche wir soeben in Betracht gezogen, kann nun noch auf andere Weise entstanden gedacht werden. Teilt man nämlich die Geraden $A'A_m'$, $B'B_m'$, $C'C_m'$ in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte bezüglich mit A_m, B_m, C_m, so schneiden sich je drei dieser Geraden gleichfalls in einem Punkte, und der Ort dieser Schnittpunkte ist wieder die eben besprochene Hyperbel.

Wir führen den Beweis für diese Behauptung am bequemsten, indem wir sofort die auf das Dreieck $A_m B_m C_m$ transformirten Coordinaten zur Verwendung bringen. Nun ist, wenn man $A'A_m'$ im Verhältniss $p : q$ teilt, der Teilpunkt

$$T_a \equiv \frac{1}{p+q}\left(q\frac{B+C}{2} + p\,\frac{B_m + C_m}{2}\right)$$

also in transformirten Coordinaten

$$T_a \equiv q(\beta_m + \gamma_m) A_m + (q(\alpha_m + \gamma_m) + pS) B_m \\ + (q(\alpha_m + \beta_m) + pS) C_m$$

$$T_b \equiv (q(\alpha_m + \gamma_m) + pS)(A_m + q(\alpha_m + \beta_m) B_m \\ + (q(\beta_m + \gamma_m) + pS) C_m$$

$$T_c \equiv (q(\alpha_m + \beta_m) + pS) A_m + (q(\beta_m + \gamma_m) + pS) B_m \\ + q(\alpha_m + \gamma_m) C_m$$

Digitized by Google

Zieht man nun $T_a A_m$, $T_b B_m$, $T_c C_m$, so schneiden sich diese drei Geraden in demselben Punkte, denn es ist

$$\begin{vmatrix} 0, & -(q(\alpha_m+\beta_m)+pS), & q(\alpha_m+\gamma_m)+pS \\ q(\beta_m+\gamma_m)+pS, & 0, & -q(\alpha_m+\gamma_m)+pS \\ -(q(\beta_m+\gamma_m)+pS), & q(\alpha_m+\beta_m)+pS, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

wie sich aus der Addition der Reihen ergibt.

Für die Coordinaten des Schnittpunktes ergibt sich aus der Determinante

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = & (q(\alpha_m+\gamma_m)+pS)(q(\alpha_m+\beta_m)+pS) \\ & : (q(\alpha_m+\gamma_m)+pS)(q(\beta_m+\gamma_m)+pS) \\ & : (q(\beta_m+\gamma_m)+pS)(q(\alpha_m+\beta_m)+pS) \end{aligned}$$

Man erkennt aus diesem Ausdrucke sofort, dass zu der Schar dieser Schnittpunkte auch die Punkte G_0 und G_{-m} für $q = 0$ und für $q = -p$ gehören. Aus letzterem Umstande geht hervor, was übrigens schon aus früher Gesagtem erschlossen werden konnte, dass $A'A_m' \parallel A_m G_{-m}$ etc. ist. Aus der Tatsache aber, dass die beiden Punkte G_0 und G_{-m} auch hier wieder zu den Schnittpunkten gehören, ersieht man, dass der Kegelschnitt, welchem, wie sofort erwiesen wird, alle Schnittpunkte für dasselbe m angehören, nur wieder dieselbe Hyperbel sein kann, welche oben behandelt wurde, da ja die Constanten dieselben sein müssen, wie oben. Dass aber alle Schnittpunkte auf jener Hyperbel liegen, ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} (b^m - c^m)(q(\beta_m+\gamma_m)+pS) + (c^m - a^m)(q(\alpha_m+\beta_m)+pS) & \\ + (a^m - b^m)(q(\alpha_m+\gamma_m)+pS) & = 0 \end{aligned}$$

welche man mit Hülfe der beiden oben hingeschriebenen aus Δ_m sich ergebenden Gleichungen leicht als richtig erkennt.

Aus dieser Tatsache nun, dass die Hyperbel Φ_{m1} auf doppelte Art entstanden gedacht werden kann, ergibt sich derselbe Schluss, welcher oben in ähnlichem Falle gezogen wurde. Es liegen nämlich auf den von A_m, B_m, C_m bzhw. ausgehenden Strahlen je vier sich entsprechende Punkte, nämlich ausser dem Ausgangspunkte und dem Punkte der Hyperbel noch zwei Teilpunkte, von denen die auf AA_m' etc. liegenden den Index 1, die auf $A'A_m'$ den Index 2 erhalten mögen, und für welche man hat

$$AT_{a1} : T_{a1}A_m' = BT_{b1} : T_{b1}B_m' = CT_{c1} : T_{c1}C_m'$$

und

$$A'T_{a2} : T_{a2}A_m' = B'T_{b2} : T_{b2}B_m' = C'T_{c2} : T_{c2}C_m'$$

Von den Geraden $A_m M_{m1}$, $B_m M_{m1}$, $C_m M_{m1}$ ist dies bereits oben hervorgehoben und für die Geraden $A_m G_{-m}$ etc. ebenfalls ersichtlich. Der Endpunkt T_{a1} der um die eigene Grösse über A_m' hinaus verlängerten Strecke AA_m' fällt auf $A_m M_{m1}$ und bildet also die vierte Ecke des durch $B_m A C_m$ bestimmten Parallelogrammes. Ebenso fällt die Ecke T_{b1} des Parallelogramms $C_m B A_m T_{b1}$ auf $B_m M_{m1}$ und die Ecke T_{c1} des Parallelogramms $B_m C A_m T_{c1}$ auf $C_m M_{m1}$. Die Coordinaten des Punktes K_{m1} ergaben sich oben für $q = -p$, er ist also der Schnittpunkt der durch A_m etc. zu AA_m' etc. gezogenen Parallelen. Dieselben Coordinaten erhält man, wenn man im zweiten Falle $q = -2p$ setzt, d. i. die Strecke $A'A_m'$ etc. über A' etc. hinaus um die eigene Grösse verlängert und die Endpunkte mit A_m etc. verbindet, so dass man also mit Einschluss der unendlich fernen Punkte auch hier wieder je vier entsprechende Punkte auf den drei Geraden hat. Es ergibt sich wieder, dass $A'A_m' = \frac{1}{2}AA_m$, und dass der Teilpunkt T_{a2} auf $A_m K_{m1}$ den Parallelogrammen $A_m A A_m' T_{a2}$ und $BA_m'C T_{a2}$ als Eckpunkt zugehört. Der Punkt E_{m1} wurde oben erhalten für $p = q$, d. i. durch Halbirung der Strecken AA_m' etc. Man erhält den nämlichen Punkt, wenn man im zweiten Falle in dem Ausdruck für die Coordinaten des Schnittpunktes

$$p : q = 3 : -2$$

setzt, also die Geraden $A'A_m'$ etc. um das Doppelte der eigenen Länge über A_m' hinaus verlängert und mit A_m etc. verbindet. Halbirt man endlich die Strecken $A'A_m'$ etc. und verbindet die Teilpunkte mit A_m etc., so wird

$$Y \equiv \frac{1}{\alpha_m + 2\beta_m + 2\gamma_m} A_m + \frac{1}{2\alpha_m + 2\beta_m + \gamma_m} B_m + \frac{1}{2\alpha_m + \beta_m + 2\gamma_m} C_m$$

Man erhält denselben Punkt, welcher mit J_{m1} bezeichnet sein möge, wenn man im ersten Falle

$$p : q = 4 : -1$$

setzt, wenn man also die Strecken AA_m' etc. über A_m' etc. hinaus um das Drittel der eigenen Grösse verlängert.

Vergleicht man zum Schlusse die Constanten der Hyperbel mit dem Mittelpunkte Φ_{m1} mit denen der Hyperbel $H_{\gamma 1}$, so ersieht man, dass dieselben in beiden Fällen übereinstimmen. Die beiden Hyperbeln werden also für den Fall der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und $A_m B_m C_m$, denen dieselben umschrieben sind, und welche bekanntermassen für $m = 2$ statt hat, in gewissen Beziehungen zu einander stehen. Dies ergibt sich auch noch durch eine andere Erwägung. Construiren wir nämlich die Punkte A_μ, B_μ, C_μ so, dass

dieselben zu dem Dreieck $A_m B_m C_m$ in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte A_m, B_m, C_m zum Dreieck ABC, so sind für $m = \mu = 2$ die Dreiecke ABC und $A_m B_m C_m$, wie schon bemerkt, einander ähnlich, mithin das Verhältniss der Seiten für die beiden Dreiecke dasselbe. Bilden wir nun die Hyperbel Φ_{m1}, so ist diese dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $m = 2$ umschrieben, und ihre Constanten sind gegeben durch

$$f : g : h = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2)$$

Bilden wir aber in Bezug auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ und mit Rücksicht auf $A_\mu B_\mu C_\mu$ die Hyperbel Γ, so sind, die Seiten des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ mit a', b', c' bezeichnet, die Constanten derselben gegeben durch

$$f : g : h = (b'^2 - c'^2) : (c'^2 - a'^2) : (a'^2 - b'^2)$$

oder nach der obigen Bemerkung

$$f : g : h = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2)$$

und da diese Hyperbel ebenfalls dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ umschrieben ist, so müssen die letztgenannten Hyperbeln identisch sein. Man kann sich also die Hyperbel Γ in Bezug auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ auf vierfache Weise entstanden denken und es liegen auf den von A_2, B_2, C_2 ausgehenden Strahlen noch je zwei weitere sich entsprechende Punkte. Wegen der Identität der beiden Hyperbeln Φ_{21} in Bezug auf das Dreieck ABC und Γ in Bezug auf $A_2 B_2 C_2$ und wegen der Aehnlichkeit der beiden genannten Dreiecke muss auch die Hyperbel Γ, welche dem Dreieck ABC umschrieben ist, ähnlich sein mit der Hyperbel Φ_{21}, welche dem Dreieck $A_2 B_2 C_2$ umschrieben ist.

V.

1. Teilt man die Strecken AA_m, BB_m, CC_m in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte bzhw.

α) mit A', B', C'

β) mit A_m', B_m', C_m'

so schneiden sich diese Verbindungsgeraden in demselben Punkte, und der Ort dieser Schnittpunkte ist eine Hyperbel, welche

α) dem Dreieck $A'B'C'$

β) dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$

umschrieben ist.

Digitized by Google

2. Teilt man die Strecken AC_m, BA_m, CB_m in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte

α) mit A', B', C'

β) mit C_m', A_m', B_m'

so schneiden sich die Verbindungsgeraden in demselben Punkte und der Ort dieser Schnittpunkte ist eine Hyperbel, welche

α) dem Dreieck $A'B'C'$

β) dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$

umschrieben ist.

3. Teilt man die Strecken AB_m, BC_m, CA_m in demselben Verhältniss und verbindet die Teilpunkte

α) mit A', B', C'

β) mit B_m', C_m' A_m'

so schneiden sich die Verbindungsgeraden in demselben Punkte und alle diese Schnittpunkte liegen auf einer Hyperbel, welche

α) dem Dreieck $A'B'C'$

β) dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$

umschrieben ist.

Es wird auch hier wieder genügen, den Beweis auf den ersten Fall zu beschränken, da der Gang für die beiden andern der nämliche ist.

α) Teilt man die Strecke AA_m im Verhältniss von $q:p$, so erhält man für den Teilpunkt T_a den Ausdruck

$$T_a = \frac{pA + qA_m}{p+q}$$

oder

$$T_a \equiv (p\Sigma + qa^m)A + qc^m B + qb^m C$$

Ebenso erhält man

$$T_b \equiv qc^m A + (p\Sigma + qb^m)B + qa^m C$$

$$T_c \equiv qb^m A + qa^m B + (p\Sigma + qc^m)C$$

Verbindet man nun den ersten Teilpunkt mit A', den zweiten mit B', den dritten mit C', so wird die Determinante

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} q(b^m - c^m), & p\Sigma + qa^m, & -(p\Sigma + qa^m) \\ -(p\Sigma + qb^m), & q(c^m - a^m), & p\Sigma + qb^m \\ p\Sigma + qc^m, & -(p\Sigma + qc^m), & q(a^m - b^m) \end{vmatrix} = 0$$

wie man nach Addition der Reihen sofort ersieht. Man erkennt daraus, dass die Verbindungsgeraden in der Tat durch denselben Punkt gehen. Für die Coordinaten des Schnittpunktes erhält man aus der Determinante

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = & \left[q^2(a^m - b^m)(c^m - a^m) + (p\Sigma + qb^m)(p\Sigma + qc^m)\right] \\ & : \left[(p\Sigma + qc^m)(p\Sigma + qc^m) + (p\Sigma + qb^m)(qa^m - b^m)\right] \\ & : (p\Sigma + qc^m)\left[p\Sigma + q(a^m + b^m - c^m)\right] \\ = & (p\Sigma + qa^m)(p\Sigma + q\delta_a) : (p\Sigma + qb^m)(p\Sigma + q\delta_b) : (p\Sigma + qc^m)(p\Sigma + q\delta_c) \end{aligned}$$

wenn man wie früher zur Abkürzung setzt

$$b^m + c^m - a^m = \delta_a; \quad a^m + c^m - b^m = \delta_b; \quad a^m + b^m - c^m = \delta_c$$

Setzt man in diesem Ausdrucke, um einige Punkte näher kennen zu lernen, $p = 0$, so wird

$$Y_1 = a^m \delta_a A + b^m \delta_b B + c^m \delta_c C$$

dies ist aber der Punkt M_{m1}.

Setzt man $q = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv A + B + C$$

dies ist der Punkt G_0.

Setzt man $p = -q$, so wird

$$Y_1 \equiv a^m(b^m + c^m) A + b^m(c^m + a^m) B + c^m(a^m + b^m) C$$

oder

$$Y_1 \equiv \left(\frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}\right) A + \left(\frac{1}{c^m} + \frac{1}{a^m}\right) B + \left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m}\right) C$$

dies ist mithin der Punkt S_{m1}.

Für $p = q$ endlich wird

$$\begin{aligned} Y_1 \equiv (2a^m + b^m + c^m)(b^m + c^m) A + (a^m + 2b^m + c^m)(a^m + c^m) B \\ + (a^m + b^m + 2c^m)(a^m + b^m) C \end{aligned}$$

Die Lage dieses Punktes wird aus dem Folgenden erhellen.

Um nun zu zeigen, dass alle Schnittpunkte einer Hyperbel angehören, welche dem Dreieck $A'B'C'$ umschrieben ist, transformiren wir die Coordinaten auf eben dieses Dreieck. Wir haben dann zu setzen

Digitized by Google

$$A \equiv B' + C' - A'$$
$$B \equiv A' + C' - B'$$
$$C \equiv A' + B' - C'$$

Der Einfachheit halber machen wir diese Substitutionen in den Ausdrücken für T_a etc. Dann wird

$$T_a \equiv (p\Sigma + qa^m)(B' + C' - A') + qc^m(A' + C' - B') + qb^m(A' + B' - C')$$
$$\equiv (q\delta_a - p\Sigma)A' + (q\delta_c + p\Sigma)B' + (q\delta_b + p\Sigma)C'$$

$$T_b \equiv qc^m(B' + C' - A') + (p\Sigma + qb^m)(A' - B' + C') + qa^m(A' + B' - C')$$
$$\equiv (q\delta_c + p\Sigma)A' + (q\delta_b - p\Sigma)B' + (q\delta_a + p\Sigma)C'$$

$$T_c \equiv qb^m(B + C' - A') + qa^m(A' + C' - B) + (p\Sigma + qc^m)(A' + B' - C')$$
$$\equiv (q\delta_b + p\Sigma)A' + (q\delta_a + p\Sigma)B' + (q\delta_c - p\Sigma)C'$$

Da nun der erste Teilpunkt mit $A'(1, 0, 0)$, der zweite mit $B'(0, 1, 0)$, der dritte mit $C'(0, 0, 1)$ verbunden wird, so erhält man für den Schnittpunkt dieser drei Geraden

$$Y_1 \equiv (q\delta_b + p\Sigma)(q\delta_c + p\Sigma)A' + (q\delta_a + p\Sigma)(q\delta_c + p\Sigma)B' + (q\delta_a + p\Sigma)(q\delta_b + p\Sigma)C'$$

oder

$$Y_1 \equiv \frac{1}{q\delta_a + p\Sigma}A' + \frac{1}{q\delta_b + p\Sigma}B' + \frac{1}{q\delta_c + p\Sigma}C'$$

Setzt man nun in diesem Ausdsucke $p = 0$, so wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\delta_a}A' + \frac{1}{\delta_b}B' + \frac{1}{\delta_c}C'$$

Wie man sieht, stellt dieser Punkt, da das Verhältniss der Seiten in beiden Dreiecken das nämliche ist, im Dreiecke $A'B'C'$ den Punkt M_m' dar; in Bezug auf das Dreieck ABC aber ist dieses der Punkt M_m, was für $m = 2$ bekannt ist, da ja der Mittelpunkt des einem Dreieck umschriebenen Kreises zusammenfällt mit dem Schnittpunkt der Höhentransversalen des Dreieckes, dessen Ecken die Seitenmitten des ersten Dreiecks sind.

Für $q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv A' + B' + C' \equiv A + B + C \equiv G_0$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{a^m}A' + \frac{1}{b^m}B' + \frac{1}{c^m}C'$$

Dies ist aber für das Dreieck $A'B'C'$ der Punkt G_{-m}. Für ABC

Digitized by Google

stellt, wie wir gesehen, derselbe Punkt den mit S_{m1} bezeichneten dar. Diesen Umstand kann man benutzen, um für das Dreieck $A'B'C'$ die Punkte $A_{-m}\,B_{-m}\,C_{-m}$ zu construiren, indem man durch S_{m1} die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks zieht und auf diesen die Entfernung des Punktes S_{m1} von dem einen Endpunkte, vom anderen Endpunkte aus anträgt. Umgekehrt ergibt sich, dass die durch die Punkte $A_m\,B_m\,C_m$ des Dreiecks $A'B'C'$ zu den Dreiecksseiten gezogenen Parallelen sich im Punkte S_{m1} des Dreiecks ABC schneiden.

Für $p = q$ wird

$$Y \equiv \frac{1}{b^m + c^m} A' + \frac{1}{a^m + c^m} B' + \frac{1}{a^m + b^m} C'$$

Dies ist mithin für das Dreieck $A'B'C'$ der Punkt S_{m1}'. Construirt man also für das Dreieck ABC das Dreieck, welches in der Elementargeometrie zum Nachweis des Satzes dient, dass die Höhentransversalen des Dreiecks durch denselben Punkt gehen, und welches mit $A''B''C''$ bezeichnet werden möge, sucht für dieses Hülfsdreieck die Punkte $A_m\,B_m\,C_m$ und halbirt die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Eckpunkten des Hülfsdreiecks und verbindet diese Halbirungspunkte mit den Eckpunkten des Dreiecks ABC, so gehen auch diese Geraden durch den Punkt S_{m1} des Dreiecks ABC.

Um nunmehr nachzuweisen, dass alle durch den Ausdruck Y bestimmten Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, welcher dem Dreieck $A'B'C'$ umschrieben ist, bestimmen wir das Verhältniss der Constanten f, g, h des durch $A'B'C'$, $G_0\,M_{m1}$ (M_{m1}' in Bezug auf $A'B'C'$) gehenden Kegelschnittes. Wir haben zu diesem Behufe die beiden Gleichungen

$$f + g + h = 0$$

und

$$a^m f + b^m g + c^m h = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (c^m - b^m) : (a^m - c^m) : (b^m - a^m)$$

Da nun aber, wovon man sich leicht überzeugt, auch die Gleichung zu Recht besteht

$$(c^m - b^m)(q\delta_a + p\Sigma) + (a^m - c^m)(q\delta_b + p\Sigma) + (b^m - a^m)(q\delta_c + p\Sigma) = 0$$

so liegen alle oben bestimmten Punkte Y auf dem durch die Punkte $A'B'C'$ $G_0\,M_m$ bestimmten Kegelschnitte.

Für den Mittelpunkt dieser Curve, welche eine Hyperbel sein muss, da G_0 innerhalb des Dreiecks $A'B'C'$ liegt, ergibt sich

Digitized by Google

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m - c^m)^2 : (c^m - a^m)^2 : (a^m - b^m)^2$$

Dies ist aber derselbe Punkt, der oben in Bezug auf das Dreieck ABC mit W_{m1} bezeichnet wurde. Gehen wir, um die Lage des Punktes in Bezug auf das Dreieck ABC zu bestimmen, auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurück, so wird dieser Punkt, den wir vorübergehend mit w bezeichnen wollen, den Ausdruck erhalten

$$\begin{aligned} w &\equiv (b^m - c^m)^2 (B + C) + (c^m - a^m)^2 (A + C) + (a^m - b^m)^2 (A + B) \\ &\equiv ((a^m - b^m)^2 + (c^m - a^m)^2) A + ((b^m - c^m)^2 + (a^m - b^m)^2) B \\ &\qquad + ((c^m - a^m)^2 + (b^m - c^m)^2) C \\ &\equiv W_{m3} + W_{m2} \end{aligned}$$

Es halbirt also der Mittelpunkt der fraglichen Hyperbel die Verbindungslinie der beiden Punkte W_{m2} und W_{m3}.

Schon die Constanten, welche sich für die eben untersuchte Hyperbel ergaben, sowie der Umstand, dass auf derselben die in Bezug auf $A'B'C'$ mit G_{-m}, S_{m1}', M_{m1}' und G_0 zu bezeichnenden Punkte liegen, lässt erkennen, dass diese Hyperbel für das Dreieck $A'B'C'$ ganz dieselbe Bedeutung hat, wie die Hyperbel $H_{\gamma 1}$ für ABC. Da aber die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ immer ähnlich sind, so müssen auch die beiden Hyperbeln W_{m1} und w dieselbe Excentricität haben.

Noch eine andere Erwägung legt die eben besprochene Tatsache nahe. Wenn man nämlich wieder das oben schon erwähnte Dreieck $A''B''C''$ mit in Betracht zieht, so steht ja zu diesem das Dreieck ABC in demselben Verhältniss wie zu ABC das Dreieck $A'B'C'$. Dann ist die eben besprochene Hyperbel identisch mit der Hyperbel $H_{\gamma 1}$. Man kann also diese oben schon auf mehrfach verschiedene Weise in Bezug auf das Dreieck ABC construirte Hyperbel in Bezug auf eben dieses Dreieck auch dadurch erhalten, dass man zu dem Dreieck $A''B''C''$ die Punkte $A_m B_m C_m$ sucht, die Verbindungslinien dieser Punkte mit $A''B''C''$ in demselben Verhältniss teilt und die Teilpunkte mit ABC verbindet. Die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien bilden dann die Hyperbel $H_{\gamma 1}$ in Bezug auf ABC. Da nun auch hier, wie in den früheren Fällen, wo es sich um die Entstehung dieser Hyperbel handelte, die Strahlen von den Punkten A, B, C ausgehen und sich zu je dreien in je einem Punkte der Hyperbel schneiden, und da jeder dieser Strahlen auch durch einen Punkt T_a bzhw. T_b oder T_c geht, so sind auf den drei zusammengehörigen Strahlen drei weitere sich entsprechende Punkte zu verzeichnen.

Digitized by Google

β) Um nun zu dem Beweise der zweiten oben aufgestellten Behauptung überzugehen, ist es, da der Kegelschnitt dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$ umschrieben ist, notwendig, die Coordinaten auf dieses Dreieck zu transformiren. Denken wir uns nun die Transformation zunächst in Bezug auf $A_m B_m C_m$ gemacht, und gehen wir sodann auf $A_m'B_m'C_m'$ über, so hätten wir zunächst für A, B, C die schon mehrfach erwähnten Ausdrücke zu setzen, für A_m, B_m, C_m aber sodann, analog den früheren Fällen

$$A_m \equiv B_m' + C_m' - A_m'$$
$$B_m \equiv A_m' + C_m' - B_m'$$
$$C_m \equiv A_m' + B_m' - C_m'$$

so dass man also hat

$$A_m \equiv \alpha_m (B_m' + C_m' - A_m') + \beta_m (A_m' + C_m' - B_m') + \gamma_m (A_m' + B_m' - C_m')$$

oder

$$A \equiv d_\alpha A_m' + d_\beta B_m' + d_\gamma C_m'$$

falls man wie früher zur Abkürzung setzt

$$\beta + \gamma - \alpha = d_\alpha$$
$$\alpha + \gamma - \beta = d_\beta$$
$$\alpha + \beta - \gamma = d_\gamma$$

Ebenso erhält man

$$B \equiv d_\beta A_m' + d_\gamma B_m' + d_\alpha C_m'$$
$$C \equiv d_\gamma A_m' + d_\alpha B_m' + d_\beta C_m'$$

Nun haben wir unter α) für T_a den Ausdruck abgeleitet

$$T_a \equiv (p\Sigma + q a^m) A + q c^m B + q b^m C$$

In transformirten Coordinaten wird also

$$T_a \equiv (p\Sigma + q a^m)(d_\alpha A_m' + d_\beta B_m' + d_\gamma C_m') + q c^m (d_\beta A_m' + d_\gamma B_m' + d_\alpha C_m') + q b^m (d_\gamma A_m' + d_\alpha B_m' + d_\beta C_m')$$
$$\equiv (p\Sigma d_\alpha + q(a^m d_\alpha + c^m d_\beta + b^m d_\gamma)) A_m' + (p\Sigma d_\beta + (a^m d_\beta + b^m d_\alpha + c^m d_\gamma)) B_m' + p\Sigma d_\gamma + q(a^m d_\gamma + b^m d_\gamma + c^m d_\alpha) C_m'$$

Auf Grund der aus der Determinante Δ_m sich ergebenden Gleichungen

$$c^m \alpha^m + b^m \beta_m + a^m \gamma_m = 0$$

und

$$b^m \alpha^m + a^m \beta_m + c^m \gamma_m = 0$$

erhält man nach einigen Reductionen

$$T_a \equiv (p \Sigma d_\alpha - q \Delta_m) A_m' + (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) B_m' + (p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) C_m'$$

Ebenso erhält man für T_b und T_c nach vorgenommener Reduction die Ausdrücke

$$T_b \equiv (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) A_m' + (p \Sigma d_\gamma - q \Delta_m) B_m' + (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) C_m'$$
$$T_c \equiv (p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m) A_m' + (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) B_m' + (p \Sigma d_\beta - q \Delta_m) C_m'$$

Da nun T_a mit $A_m'(1, 0, 0)$, T_b mit $B_m'(0, 1, 0)$, T_c mit $C_m'(0, 0, 1)$ verbunden wird, so erkennt man, dass diese drei Verbindungsgeraden durch denselben Punkt gehen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & -(p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m), & p \Sigma d_\beta + q \Delta_m \\ p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m, & 0, & -(p \Sigma d_\beta + q \Delta_m) \\ -(p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m), & p \Sigma d_\gamma + g \Delta_m, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies ist aber in der Tat der Fall, wie man nach Addition der Reihen sofort erkennt.

Für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Schnittpunktes erhält man aus dieser Determinante

$$x_1 : x_1 : x_3 = (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m)(p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m)$$
$$: (p \Sigma d_\beta + q \Delta_m)(p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m) : (p \Sigma d_\alpha + q \Delta_m)(p \Sigma d_\gamma + q \Delta_m)$$

Um wieder einige Punkte näher kennen zu lernen, setzen wir $p = 0$, dann erhalten wir für den Schnittpunkt

$$Y \equiv A_m' + B_m' + C_m' \equiv G_0$$

Für $q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{d_\alpha} A_m' + \frac{1}{d_\gamma} B_m' + \frac{1}{d_\beta} C_m'$$

Für $p = q$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\Sigma d_\alpha + \Delta_m} A_m' + \frac{1}{\Sigma d_\gamma + \Delta_m} B_m' + \frac{1}{\Sigma d_\beta + \Delta_m} C_m'$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\Sigma d_\alpha - q \Delta_m} A_m' + \frac{1}{\Sigma d_\gamma - q \Delta_m} B_m' + \frac{1}{\Sigma d_\beta - q \Delta_m} C_m'$$

Digitized by Google

Für diesen Ausdruck erhält man auf Grund der aus der Determinante Δ_m sich ergebenden Gleichungen:

$$Y_1 \equiv \frac{1}{\alpha_m} A_m' + \frac{1}{\gamma_m} B_m' + \frac{1}{\beta_m} C_m'$$

Denkt man sich nun durch den letzten Punkt und G_0 einen Kegelschnitt gelegt, welcher dem Dreieck $A_m'B_m'C_m'$ umschrieben ist, so erhält man zur Berechnung der Constanten f, g, h des Kegelschnittes die Gleichungen:

$$f + g + h = 0$$
$$f\alpha_m + g\gamma_m + h\beta_m = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\beta_m - \gamma_m) : (\alpha_m - \beta_m) : (\gamma_m - \alpha_m)$$

oder

$$f : g : h = (b^m - c^m) : (c^m - a^m) : (a^m - b^m)$$

Sollen nun die Schnittpunkte, deren allgemeiner Ausdruck oben abgeleitet wurde, auf dem Kegelschnitte liegen, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$(b^m - c^m)(p\Sigma d_\beta + q\Delta_m) + (c^m - a^m)(p\Sigma d_\gamma + q\Delta_m) \\ + (a^m - b^m)(p\Sigma d_\beta + q\Delta_m) = 0$$

Nun ist sofort ersichtlich, dass die Glieder, welche den Coefficienten q gemeinsam haben, sich gegenseitig aufheben. Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$(b^m - c^m)\Sigma d_\alpha + (c^m - a^m)\Sigma d_\gamma + (a^m - b^m)\Sigma d_\beta = 0$$

Die linke Seite diser Gleichung lässt sich nun so umgestalten

$$c^{2m}(d_\gamma - d_\alpha) + b^{2m}(d_\alpha - d_\beta) + a^{2m}(d_\beta - d_\gamma) + a^m b^m(d_\alpha - d_\gamma) \\ + a^m c^m(d_\beta - d_\alpha) + b^m c^m(d_\gamma - d_\beta)$$
$$= (c^{2m} - a^m b^m)(d_\gamma - d_\alpha) + (b^{2m} - a^m c^m)(d_\alpha - d_\beta) + (a^{2m} - b^m c^m)(d_\beta - d_\gamma)$$
$$= \beta_m(\alpha_m - \gamma_m) + \gamma_m(\beta_m - \alpha_m) + \alpha_m(\gamma_m - \beta_m) = 0$$

Die Schnittpunkte liegen also in der Tat auf dem Kegelschnitte, welcher wieder eine Hyperbel ist. Der Mittelpunkt dieser Hyperbel ist gegeben durch den Ausdruck

$$u \equiv (b^m - c^m)^2 A_m' + (c_m - a^m)^2 B_m' + (a^m - b^m)^2 C_m'$$

Man erkennt auch hier wieder, dass für den Fall der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und $A_m B_m C_m$ die soeben besprochene Hyperbel für das Dreieck $A_m'B_m'C_m'$ diejenige ist, deren Mittelpunkt

Digitized by Google

für ABC mit W'_{m1} bezeichnet wurde. Da nun jene Aehnlichkeit für $m = 2$ immer statt hat, so bietet auch das unter β angegebene Verfahren ein Mittel zur Construction der Hyperbel Γ.

VI.

Eine nähere Betrachtung der im Vorhergehenden aufgestellten Formeln lässt erkennen, dass dieselben ihre Geltung behalten, wenn statt der Grössen a^m, b^m, c^m, für welche m beliebig war, $a:b:c$ aber das Verhältniss der Seiten des Coordinatendreiecks darstellte, ganz beliebige Grössen, etwa r, s und t gewählt werden, denn von dem gegenseitigen Verhältniss der Grössen a, b, c war nur bei dem Kegelschnitte H_a die Natur desselben abhängig. Die aufgestellten Sätze müssen also, von dem eben erwähnten Punkte abgesehen, auch Geltung haben, wenn man drei Punkte in Betracht zieht, welche durch folgende Ausdrücke bestimmt sind

$$Y_1 \equiv rA + sB + tC$$
$$Y_2 \equiv sA + tB + rC$$
$$Y_3 \equiv tA + rB + sC$$

Auf Punkte dieser Art sind wir aber bei jeder der vorher in Betracht gezogenen Kegelschnittscharen gestossen. So haben z. B. die auf H_{a1} gelegenen Punkte die Form Y_1, die auf H_{a2} jene von Y_2 und die auf H_{a3} jene von Y_3, und wir werden also für jedes m und p bzhw. q drei zusammengehörige Punkte Y erhalten, falls wir setzen:

$$a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pq a^m) = r$$
$$b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pq b^m) = s$$
$$c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pq c^m) = t$$

Je dreien solcher Punkte kommen mithin dieselben Eigenschaften zu, wie den Punkten A_m, B_m, C_m; mithin, um die Punkte, für welche sich die Ausdrücke am einfachsten gestalten, hervorzuheben, den Punkten G_{m1}, G_{m2}, G_{m3}, welche für $p+q=0$ auf den Kegelschnitten H_a erhalten wurden, den Punkten G_{-m}, O_m und O_m', für welche die anderweitig für dieselben gebrauchte Bezeichnungsweise auch in dieser Abhandlung beibehalten wurde, während sie eigentlich mit G_{-m1}, G_{-m2}, G_{-m3} zu bezeichnen wären, und welche für $p=0$ oder $q=0$ auf den Kegelschnitten H_a erhalten werden, den Punkten M_m, welche für $p=q$ sich ergaben, den Punkten M_m', S_m, S_m' etc. Da nach dem Gesagten die Sätze, welche von den Punkten Y_1, Y_2, Y_3 gelten müssen, leicht formulirt werden können, und da die Beweise für diese Sätze aus den oben geführten sich ergeben, wenn

Digitized by Google

man in den betr. Formeln statt der Grössen a^m, c^m, b^m bzhw. r, s, t setzt, so ist es nicht nötig, hier weiter auf jene Sätze und Beweise einzugehen. Dagegen sollen die wichtigsten Punkte, auf welche man stösst, wenn man in den oben geführten Untersuchungen an Stelle der A_m, B_m, C_m die Punkte G_m, G_{-m}, S_m etc. treten lässt, noch vorgeführt werden, wenn auch dabei in einzelnen Fällen Wege, welche vorher in dem einen Sinne zurückgelegt wurden, nun im entgegengesetzten durchwandert werden.

Unter allen Umständen werden wir uns dadurch neuerdings von der Richtigkeit dessen überzeugen, was schon vorher über die gegenseitige Lage der betr. Punkte und Linien gesagt wurde.

Gehen wir von drei Punkten, deren Coordinaten bzhw. r, s, t; s, t, r; t, r, s sind, aus, so ist ein Punkt auf den Kegelschnitten H_a, welche sich an diese Punkte knüpfen, gegeben durch

$$Z_1 \equiv r(p^2s+q^2t-pqr)A+t(p^2r+q^2s-pqt)B+s(p^2t+q^2r-pqs)C$$
$$Z_2 \equiv t(p^2r+q^2s-pqt)A+s(p^2t+q^2r-pqs)B+r(p^2s+q^2t-pqr)C$$
$$Z_3 \equiv s(p^2t+q^2r-pqs)A+r(p^2s+q^2t-pqr)B+t(p^2r+q^2s-pqt)C$$

Für $p = 0$ wird daraus

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s}A+\frac{1}{r}B+\frac{1}{t}C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{r}A+\frac{1}{t}B+\frac{1}{s}C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{t}A+\frac{1}{s}B+\frac{1}{r}C$$

Für $q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{t}A+\frac{1}{s}B+\frac{1}{r}C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{s}A+\frac{1}{r}B+\frac{1}{t}C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{r}A+\frac{1}{t}B+\frac{1}{s}C$$

Für $p+q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv rA+tB+sC$$
$$Z_2 \equiv tA+sB+rC$$
$$Z_3 \equiv sA+rB+tC$$

Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv r\delta_r A + t\delta_t B + s\delta_s C$$
$$Z_2 \equiv t\delta_t A + s\delta_s B + r\delta_r C$$
$$Z_3 \equiv s\delta_s A + r\delta_r B + t\delta_t C$$

Hat man nun die Punkte G_m im Auge, so ist in diesen Formeln zu setzen

$$r = a^m, \quad s = b^m, \quad t = c^m$$

Für $p = 0$ wird demnach

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{c^m} C \equiv C_{-m}$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{b^m} C \equiv A_{-m}$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{a^m} C \equiv B_{-m}$$

Diese Punkte stehen also zu den Punkten G_{-m} in demselben Verhältniss, wie die Punkte A_m etc. zu den Punkten G_m.

Für $q = 0$ ergeben sich natürlich dieselben Punkte, nur in anderer Reihenfolge.

Für $p + q = 0$ muss man selbstverständlich auf die Punkte A_m, B_m, C_m stossen.

Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv a^m \delta_a A + c^m \delta_c B + b^m \delta_b C$$
$$Z_2 \equiv c^m \delta_c A + b^m \delta_b B + a^m \delta_a C$$
$$Z_3 \equiv b^m \delta_b A + a^m \delta_a B + c^m \delta_c C$$

Diese Punkte verhalten sich also in Bezug auf die Punkte M_m genau so wie die Punkte A_m, B_m, C_m zu den Punkten G_m, es muss also beispielsweise die durch Z_1 und M_{m1} gezogene Gerade parallel sein zu BC.

Für die Punkte G_{-m}, O_m und O_m', für welche

$$r = \frac{1}{a^m}, \quad s = \frac{1}{b^m}, \quad t = \frac{1}{c^m}$$

ist, erhält man für $p = 0$ und $q = 0$ die Punkte A_m, B_m, C_m, für $p + q = 0$ die Punkte A_{-m}, B_{-m}, C_{-m}. Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m} \vartheta_a A + \frac{1}{c^m} \vartheta_c B + \frac{1}{b^m} \vartheta_b C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{c^m} \vartheta_c A + \frac{1}{b^m} \vartheta_b B + \frac{1}{a^m} \vartheta_a C$$

Digitized by Google

$$Z_3 \equiv \frac{1}{b^m} \vartheta_b A + \frac{1}{a^m} \vartheta_a B + \frac{1}{c^m} \vartheta_c C$$

falls man zur Abkürzung setzt

$$\vartheta_a = a^m b^m + a^m c^m - b^m c^m, \quad \vartheta_b = a^m b^m + b^m c^m - a^m c^m$$
$$\vartheta_c = a^m c^m + b^m c^m - a^m b^m$$

Für die Punkte S_m ist

$$r = a^m(b^m + c^m), \quad s = b^m(a^m + c^m), \quad t = c_m(a^m + b^m)$$

Setzt man diese Werte in die Ausdrücke für Z ein, so erhält man für $p = 0$ und $q = 0$

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m(a^m + c^m)} A + \frac{1}{a^m(b^m + c^m)} B + \frac{1}{c^m(a^m + b^m)} C$$

Man erhält also die drei Punkte, welche zu den reciproken Punkten der S_m in demselben Verhältniss stehen, wie die A_m zu den G_m, wenn man unter reciproken Punkten solche mit reciproken Coordinaten versteht. Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv (b^m + c^m) A + (a^m + b^m) B + (a^m + c^m) C$$

Dieser Punkt stellt nun die Mitte der Seite $B_m C_m$ dar, so dass also unter Berücksichtigung der drei Punkte Z sich ergibt, dass, wenn man die drei Seitenmitten des Coordinatendreiecks mit irgend einer der Mitten der Seiten des Dreiecks $G_{-m} O_m O_m'$ verbindet, jede dieser neun Geraden auch durch eine der Seitenmitten des Dreiecks $A_m B_m C_m$ geht. Für $p + q = 0$ ergeben sich auch hier wieder die Punkte, welche zu den S_m in der nämlichen Beziehung stehen, wie die A_m, B_m, C_m zu den G_m.

Für die Punkte S_m' ist

$$r = \frac{1}{b^m + c^m}, \quad s = \frac{1}{a^m + c^m}, \quad t = \frac{1}{a^m + b^m}$$

Es wird also für $p = 0$

$$Z_1 \equiv (a^m + c^m) A + (b^m + c^m) B + (a^m + b^m) C$$

Die Verbindungslinien von S_{m1}' mit C, A und B gehen also durch die Punkte A_m', B_m', C_m', ähnliches gilt von den Punkten S_{m2}' und S_{m3}'.

Für $p = q$ wird

$$Z_1 = \frac{1}{b^m + c^m}(b^{2m} + c^{2m} - a^{2m} + a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) A$$

Digitized by Google

$$+\frac{1}{a^m+b^m}(a^{2m}+b^{2m}-c^{2m}+a^m b^m+b^m c^m+a^m c_m)\,B$$

$$+\frac{1}{a^m+c^m}(a^{2m}+c^{2m}-b^{2m}+a^m b^m+a^m c^m+b^m c^m)\,C$$

Für $p+q=0$ wird

$$Z_1\equiv\frac{1}{b^m+c^m}A+\frac{1}{a^m+b^m}B+\frac{1}{a^m+c^m}C$$

Dies ist aber der zu A_m' reciproke Punkt. Zieht man also durch die Punkte S_m' Parallelen zu den Seiten des Dreiecks ABC, so schneiden sich je drei zusammengehörige derselben in einem Punkte. Wird nun ein solcher Punkt z. B. Z_1 und der zu ihm reciproke A_m' mit den drei Ecken des Dreiecks ABC verbunden, so treffen diese Verbindungslinien die Gegenseiten in Punkten, welche von den Seitenmitten gleichweit abstehen.

Für die Punkte M_m ist

$$r=a^m\delta_a,\quad s=b^m\delta_b,\quad t=c^m\delta_c$$

Für $p=0$ wird mithin

$$Z_1\equiv\frac{1}{b^m\delta_b}A+\frac{1}{a^m\delta_a}B+\frac{1}{c^m\delta_c}C$$

Diese Punkte stehen zu den reciproken Punkten von M_m in derselben Beziehung wie die A_m zu den G_m.

Für $p=q$ wird nach vorgenommener Reduction

$$Z_1\equiv a^mA+c^mB+b^mC$$

was nach früher Gesagtem zu erwarten stand.

Für $p+q=0$ wird

$$Z_1\equiv a^m\delta_aA+c^m\delta_cB+b^m\delta_bC$$

d. h. man erhält die Punkte, welche zu den M_m in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte A_m etc. zu den G_m.

Für die Punkte M_m' ist

$$r=\frac{1}{\delta_a},\quad s=\frac{1}{\delta_b},\quad t=\frac{1}{\delta_c}$$

Für $p=0$ wird also

$$Z_1=\delta_aA+\delta_cB+\delta_bC$$

Digitized by Google

Diese Punkte stehen also zu den reciproken Punkten der M_m' in demselben Verhältniss wie die A_m etc. zu den G_m.

Für $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{\delta_a}\left(\frac{1}{\delta_b} + \frac{1}{\delta_c} - \frac{1}{\delta_a}\right) A + \frac{1}{\delta_c}\left(\frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{\delta_b} - \frac{1}{\delta_c}\right) B$$
$$+ \frac{1}{\delta_b}\left(\frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{\delta_b} - \frac{1}{\delta_c}\right) C$$

Für $p+q=0$ endlich erhält man jene Punkte, welche zu den M_m' in derselben Beziehung stehen, wie die A_m zu den G_m.

Bilden wir des weiteren von drei Punkten, deren Coordinaten durch die Grössen r, s, t bestimmt sind, ausgehend, die Kegelschnitte H_β, so sind die Punkte auf drei zusammengehörigen Hyperbeln durch die Ausdrücke gegeben:

$$Z_1 \equiv \frac{1}{ps+qt} A + \frac{1}{pr+qs} B + \frac{1}{pt+qr} C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{pr+qs} A + \frac{1}{pt+qr} B + \frac{1}{ps+qt} C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{ps+qr} A + \frac{1}{ps+qt} B + \frac{1}{pr+qs} C$$

Für $p=0$ und $q=0$ führen diese Ausdrücke, wie es sein muss, auf Punkte, welche oben schon aufgeführt sind. Es sollen also nur die Fälle $p=q$ und $p+q=0$ weiter berücksichtigt werden.

Im ersten Falle wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s+t} A + \frac{1}{r+s} B + \frac{1}{t+r} C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{r+s} A + \frac{1}{t+r} B + \frac{1}{r+t} C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{t+r} A + \frac{1}{s+t} B + \frac{1}{r+s} C$$

Im zweiten Falle ist

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s-t} A + \frac{1}{r-s} B + \frac{1}{t-r} C$$

$$Z_2 \equiv \frac{1}{r-s} A + \frac{1}{t-r} B + \frac{1}{s-t} C$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{t-r} A + \frac{1}{s-t} B + \frac{1}{r-s} C$$

Digitized by Google

Verbinden wir nun die Mitten der G_m mit den Punkten A, B, C, so wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m + c^m} A + \frac{1}{a^m + b^m} B + \frac{1}{c^m + a^m} C$$

Diese Punkte stehen zu den S_m' in demselben Verhältniss, wie die A_m etc. zu den G_m und sind reciprok zu den Punkten A_m', B_m', C_m'.

Zieht man ferner durch die Punkte A, B, C die Parallelen zu den G_m, so wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m - c^m} A + \frac{1}{a^m - b^m} B + \frac{1}{c^m - a^m} C$$

Diese Punkte stehen zu den P_m, welche auf H_β und zugleich auf den dem Coordinatendreieck umschriebenen Kegelschnitten mit den Mittelpunkten M_m liegen, in demselben Verhältniss, wie die A_m etc. zu den G_m.

Für die Punkte G_{-m}, O_m, O_m' und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m + c^m)} A + \frac{1}{c^m(a^m + b^m)} B + \frac{1}{b^m(a^m + c^m)} C$$

Diese Punkte stehen zu den reciproken Punkten der S_m in derselben Beziehung wie die A_m etc. zu den G_m.

Für die G_{-m} etc. und $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(c^m - b^m)} A + \frac{1}{c^m(b^m - a^m)} B + \frac{1}{b^m(a^m - c^m)} C$$

Für die Punkte S_m und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m + c^m) + 2b^m c^m} A + \frac{1}{c^m(a^m + b^m) + 2a^m b^m} B + \frac{1}{b^m(a^m + c^m) + 2a^m c^m} C$$

Für $p + q = 0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m - c^m)} A + \frac{1}{c^m(a^m - b^m)} B + \frac{1}{b^m(c^m - a^m)} C$$

Für die Punkte S_m' und $p = q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{(b^m + c^m)(2a^m + b^m + c^m)} A + \frac{1}{(a^m + b^m)(2c^m + a^m + b^m)} B + \frac{1}{(a^m + c^m)(2b^m + a^m + c^m)} C$$

Digitized by Google

Für $p+q=0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^{2m}-c^{2m}} A + \frac{1}{a^{2m}-b^{2m}} B + \frac{1}{c^{2m}-a^{2m}} C$$

Für die Punkte M_m und $p=q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{b^m \delta_b + c^m \delta_c} A + \frac{1}{a^m \delta_a + b^m \delta_b} B + \frac{1}{c^m \delta_c + a^m \delta_a} C$$

Für $p+q=0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{(b^m-c^m)\,\delta_a} A + \frac{1}{(a^m-b^m)\,\delta_c} B + \frac{1}{(c^m-a^m)\,\delta_b} C$$

Für die Punkte M_m' und $p=q$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m\,\delta_a} A + \frac{1}{c^m\,\delta_c} B + \frac{1}{b^m\,\delta_b} C$$

Für $p+q=0$ wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{(b^m-c^m)\,\delta_a} A + \frac{1}{(a^m-b^m)\delta_c} B + \frac{1}{(c^m-a^m)\,\delta_b} C$$

Der eben gefundene Punkt stimmt mit demjenigen überein, welchen wir bei den Punkten M_m für $p+q=0$ erhalten haben, mithin müssen die Geraden, welche man durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC parallel zu den Geraden M_{m1}, M_{m2} etc. zieht, identisch sein mit denjenigen, welche durch dieselben Eckpunkte gehen und parallel zu den Geraden M_{m1}', M_{m2}' etc. sind, d. h. die durch die Punkte M_m gezogenen Geraden sind parallel zu denjenigen, welche die Punkte M_m' verbinden.

Von den Punkten endlich, welche man erhält, wenn man zu den Punkten Y mit den Coordinaten r, s, t die Hyperbeln H_γ bildet, sollen nur noch einige, welche zu bereits erwähnten Punkten oder Linien in Beziehung stehen, hervorgehoben werden. Denkt man sich zunächst A' mit Y' etc. verbunden, so erhält man für den Schnittpunkt

$$Z_1 \equiv \frac{1}{2qr+p\Sigma} A + \frac{1}{2qt+p\Sigma} B + \frac{1}{2qs+p\Sigma} C$$

Im Falle $p+q=0$ wird daraus

$$Z_1 \equiv \frac{1}{\delta_r} A + \frac{1}{\delta_t} B + \frac{1}{\delta_s} C$$

Treten nun die Punkte G_m an die Stelle der Y, so erhält man

Digitized by Google

im gegebenen Falle diejenigen Punkte, welche zu dem M_m' in derselben Beziehung stehen, wie die A_m etc. zu den G_m.

Für die Punkte S_m erhält man nach vorgenommener Reduction

$$Z_1' \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

Dies ist aber der Punkt A_m, so dass also die durch ABC zu den Geraden $A'S_{m1}$, $B'S_{m2}$, $C'R_{m3}$ gezogenen Parallelen sich in A_m schneiden und also auch

$$A'S_{m1} \parallel AA_m, \quad B'S_{m1} \parallel BB_m, \quad C'S_{m1} \parallel CC_m$$

ferner

$$A'S_{m2} \parallel AC_m, \quad B'S_{m2} \parallel BA_m, \quad C'S_{m2} \parallel CB_m$$

endlich

$$A'S_{m3} \parallel AB_m, \quad B'S_{m3} \parallel BC_m \quad \text{und} \quad C'S_{m3} \parallel CA_m \quad \text{ist.}$$

Für die Punkte M_m wird nach vorgenommener Reduction

$$Z_1 \equiv \delta_a A + \delta_c B + \delta_b C$$

Dies sind die reciproken Punkte zu denjenigen, welche wir für die Punkte G_m im eben behandelten Falle erhielten.

Setzt man in der oben angegebenen allgemeinen Formel für Z

$$p + 2q = 0$$

so wird

$$Z_1 \equiv \frac{1}{s+t} A + \frac{1}{r+s} B + \frac{1}{r+t} C$$

Diese Formel stimmt nun mit derjenigen überein, welche oben für den allgemeinen Fall H_β für $p = q$ sich ergab. Verbindet man also die Mitten dreier beliebiger zusammengehöriger Punkte Y mit den Ecken des Coordinatendreiecks, so liegen auf diesen drei in einem Punkte sich schneidenden Geraden auch die Punkte, welche man erhält, wenn man die Y mit den entsprechenden Seitenmitten des Coordinatendreiecks verbindet und diese Strecken um ihre eigene Grösse über die Seitenmitten hinaus verlängert.

Denkt man sich des weitern die A' etc. mit den Y_1' etc. verbunden, wenn Y_1' etc. die Mitten der Strecken $Y_2 Y_3$ etc. bezeichnen, und die Teilpunkte dieser Strecken mit A, B, C verbunden, so wird der Schnittpunkt

$$Z_1 \equiv \frac{1}{p\Sigma + q(s+t)} A + \frac{1}{p\Sigma + q(r+s)} B + \frac{1}{p\Sigma + q(r+t)} C$$

Für $p + q = 0$ wird demnach

$$Z_1 \equiv \frac{1}{r} A + \frac{1}{t} B + \frac{1}{s} C$$

Für die Punkte G_m hat man also

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

Dies ist nun der Punkt A_{-m} und da man für Z_2 den Punkt B_{-m}, für Z_3 den Punkt C_{-m} erhält, so sieht man, dass von den Ecken des Dreiecks ABC neun Gerade auslaufen, von denen je drei in den Punkten A_{-m}, B_{-m}, C_{-m} sich schneiden. Zu diesen sind bzhw. parallel neun andere Gerade, von denen je drei durch eine Seitenmitte des Dreiecks ABC gehen und die sich zu je dreien in den Seitenmitten des Dreiecks $G_{m1} G_{m2} G_{m3}$ treffen. Man sieht ferner sofort, dass der eben ausgesprochene Satz für alle Punkte Y Geltung haben muss, wobei natürlich die A_{-m} mit den Y sich ändern.

Für die Punkte G_{-m} erhält man im vorwürfigen Falle

$$Z_1 \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

Da dieses der Punkt A_m ist, so ersieht man, dass in dem eben angeführten Satze die A_m etc. an die Stelle der A_{-m} treten, wenn man statt der G_m die G_{-m} in Betracht zieht.

Für die Punkte S_m ergibt sich

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m(b^m + c^m)} A + \frac{1}{c^m(a^m + b^m)} B + \frac{1}{b^m(a^m + c^m)} C$$

ein Punkt, dessen Beziehung zu den reciproken Punkten der S schon mehrfach erwähnt wurde.

Für die Punkte S_m' wird

$$Z_2 = (b^m + c^m) A + (a^m + b^m) B + (a^m + c^m) C$$

Die Z stellen also in diesem Falle die Mitten der Seiten des Dreiecks $A_m B_m C_m$ vor.

Für die Punkte M_m und M_m' erhält man

$$Z_1 \equiv \frac{1}{a^m \delta_a} A + \frac{1}{c^m \delta_c} B + \frac{1}{b^m \delta_b} C$$

und

Digitized by Google

$$Z_1 \equiv \delta_a A + \delta_b B + \delta_c C$$

deren Beziehung zu den reciproken Punkten der M_m bzhw. M_m' schon hervorgehoben wurde.

Da aus dem allgemeinen Ausdrucke von Z für $2p + 3q = 0$ sich ergibt

$$Z_1 = \frac{1}{3r + s + t} A + \frac{1}{3t + r + s} B + \frac{1}{3s + r + t} C$$

und da derselbe Ausdruck sich für $p = q$ aus dem allgemeinen Ausdruck

$$Z_1 \equiv \frac{1}{2qr + p\Sigma} A + \frac{1}{2qt + p\Sigma} B + \frac{1}{2qs + p\Sigma} C$$

welcher oben für die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks ABC mit entsprechenden Teilpunkten auf $A'Y_1$ etc. gefunden wurde, übereinstimmt, so ersieht man, dass die früher (unter III.) im besonderen Falle an diese Erscheinung geknüpfte Erörterung ebenfalls allgemeine Geltung hat.

Zum Schlusse mögen noch einige Punkte hervorgehoben werden, welche erhalten werden, wenn man sich H_γ für den allgemeinen Fall in Bezug auf $A'B'C'$ gebildet denkt. Es werden zu dem Zwecke die Verbindungslinien AY_1 etc. geteilt und die Teilpunkte mit A' verbunden. Der Ausdruck für den Schnittpunkt solcher Verbindungslinien ist

$$Z_1 \equiv (p\Sigma + qr)(p\Sigma + q\delta_r) A + (p\Sigma + qt)(p\Sigma + q\delta_t) B + (p\Sigma + qs)(p\Sigma + q\delta_s) C$$

Für $p + q = 0$ wird daraus

$$Z_1 \equiv r(s + t) A + t(r + s) B + s(r + t) C$$

Für G_m und G_{-m} erhält man demnach

$$Z_1 \equiv a^m(b^m + c_m) A + c^m(a^m + b^m) B + b^m(a^m + c^m) C$$

und

$$Z_1 \equiv (b^m + c^m) A + (a^m + b^m) B + (a^m + c^m) C$$

Ersteres ist der Punkt A_{-m}', letzteres der Punkt A_m'.

Es gehen also die zu den neun Verbindungslinien der Ecken A, B, C mit den Punkten G_m bzhw. G_{-m} durch die Punkte A', B', C' gezogenen Parallelen zu je dreien durch die Mitten der Geraden

Digitized by Google

$B_{-m}C_{-m}$ etc. bzhw. B_mC_m etc Der Vergleich der Coordinaten A_{-m} mit denen der S_m lässt, nebenbei bemerkt, erkennen, dass

$$A_{-m}'S_{m1} \parallel BC, \quad B_{-m}'S_{m1} \parallel CA, \quad C_{-m}'S_{m1} \parallel AB \text{ etc. ist.}$$

Für S_m' wird nach einigen Reductionen

$$Z_1 = (2a^m + b^m + c^m)A + (2c^m + b^m + a^m)B + (2b^m + a^m + c^m)C$$

Man erhält also hier als Werte der drei Z die Mitten der Geraden $B_m'C_m'$, $C_m'A_m'$, $A_m'B_m'$.

Für die Punkte M_m' endlich wird nach einigen Reductionen

$$Z_1 \equiv a^mA + c^mB + b^mC$$

Die Z stimmen also hier mit den Punkten A_m, B_m, C_m überein.

Digitized by Google

IV.

Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials.

Von

P. Molenbroek.

---

§ 1. Die Fälle der Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit, welche einer mathematischen Behandlung zugänglich sind, haben in den letzten vierzig Jahren durch die schönen Arbeiten G. R. Kirchhoff's und H. von Helmholtz eine beträchtliche Ausdehnung bekommen. Man denke nur an die Bewegungen, welche mit Hülfe der elliptischen Coordinaten beschrieben werden können, an die Bewegung einer oder mehrerer Kugeln, eines Ellipsoids und eines Ringes in einer Flüssigkeit, an die Wirbelbewegungen und die Flüssigkeitsstrahlen, Probleme, welche in ziemlicher Allgemeinheit Lösungen gestatten.

Ganz anders jedoch verhalten sich die Bewegungen der Gase unseren mathematischen Hülfsmitteln gegenüber. Zur Beschreibung dieser bedarf man nämlich ausser den schon bei den Vorigen angenommenen Hypothesen noch diejenige, welche eine Relation zwischen Druck und Dichtigkeit in einem Punkte einer solchen Flüssigkeit darstellt und die Resultaten sind wesentlich von dieser Annahme beeinflusst. Die Zugrundelegung des Boyleschen Gesetzes hat bekanntlich mehrere Jahre der theoretischen Begründung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles geschadet, und G. R. Kirchhoff hat im

Digitized by Google

Jahre 1868 [1]) noch den Versuch gemacht, die Abweichungen, welche die experimentell unter verschiedenen äusseren Bedingungen bestimmte Schallgeschwindigkeit von der theoretisch mit Hülfe des Poissonschen Gesetzes hergeleiteten zeigt, durch eine neue auf Grund der mechanischen Wärmetheorie einzuführende Relation zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur zu erklären. Wie Kirchhoff dabei hervorhebt, hat er nur die Wärmeleitung, nicht die Strahlung in Betracht gezogen. Aus diesem Grunde schon kann man nicht erwarten, dass seine Resultate mit den experimentellen Daten genau übereinstimmen werden, wie auch durch die Erfahrung bestätigt wird. Die Einführung der oben genannten Beziehung zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur ist also nicht ganz einwurfsfrei.

Ausserdem aber wird man finden, dass das Problem in der von Kirchhoff gegebenen Gestalt nur deshalb einfache Lösungen gestattet, weil die Voraussetzung unendlich kleiner Bewegungen eingeführt ist. Sobald man diese Voraussetzung fallen lässt, erscheint das Problem in einer sehr verwickelten Gestalt.

Dasselbe gilt im allgemeinen von jeder Gasbewegung, wodurch sich erklären lässt, dass bisher nur noch solche Bewegungen untersucht worden sind, die mit sehr kleiner Geschwindigkeit stattfinden.

Im Folgenden habe ich versucht endliche Bewegungen eines Gases mathematisch zu beschreiben, wenn man entweder dem Boyleschen oder dem Poissonschen Gesetze strenge Gültigkeit beilegt, und zwar sind nur solche Bewegungen in Betracht gezogen, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt. Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass zwei Fälle der Bewegung eines Gases einer mathematischen Behandlung fähig sind, nämlich erstens derjenige, bei welchen die Bewegung nur von einer Coordinate und von der Zeit abhängt, und zweitens der Fall stationärer Flüssigkeitsstrahlen. Es sind bei dieser Mitteilung hauptsächlich die Transformationsmethoden hervorgehoben worden; nur die einfachsten Lösungen sind vorläufig untersucht, und ausnahmsweise ist beim ersten Falle eine complicirtere Lösung hergeleitet worden. In einer nächsten Abhandlung hoffe ich auf einige Lösungen, welche weniger unmittelbar ans Licht treten, weiter einzugehen.

Eine mehr allgemeine Behandlung des Problems der Gasbewegung auf Grundlage der mechanischen Wärmetheorie lässt sich allerdings erwarten; dieselbe wird die hier betrachteten Fälle als

---

1) Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung; Pogg. Ann. Bd. 134. 1868.

Digitized by Google

besondere einschliessen. Wir wenden uns zunächst zur Untersuchung der Möglichkeit einer Gasbewegung mit einem Geschwindigkeitspotential.

§ 2. Im Folgenden seien u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, V das Potential der äusseren Kräfte pro Masseneinheit, p der Druck, μ die Dichtigkeit, alle im Punkte x, y, z des Gases genommen. Nach unseren speciellen Annahmen ist μ als Function der Grösse p darstellbar; man setze deshalb:

$$\int \frac{dp}{\mu} = P \tag{1}$$

so nehmen die Bewegungsgleichungen des Gases folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial (V-P)}{\partial x}\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial (V-P)}{\partial y}\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial (V-P)}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Durch Differentiation der dritten dieser Gleichungen nach y, der zweiten nach z und Subtraction der Resultaten erhält man, indem man die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit im Punkte xyz mittelst der Gleichungen:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

einführt und noch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta$$

setzt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \theta\xi\\
\frac{d\eta}{dt} &= \zeta\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z} - \theta\eta\\
\frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} - \theta\zeta
\end{aligned}$$

Es erhellt aus diesen Gleichungen, dass sobald ein Teilchen einmal keine Rotationsgeschwindigkeit hat, es diese niemals bekommen kann. Ist die Flüssigkeitsbewegung somit aus einem rotationslosen Zustande hervorgegangen, so wird sie fortwährend rotationslos

Digitized by Google

bleiben müssen; es können deshalb wirklich Bewegungen mit einem Geschwindigkeitspotential existiren.

§ 3. Wir bezeichnen dasselbe durch φ, sodass

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

wird, und führen die Function φ in die Gleichungen (2) ein.

Es ergeben sich sodann drei Gleichungen, aus denen diese einzige:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - V + P = T \tag{3}$$

hervorgeht. Hierin bedeutet T eine willkürliche Function von t, welche aus der Integration entspringt. Die beliebigen Constanten, welche die Grössen V und P ihrer Bedeutung nach enthalten, denken wir in T aufgenommen. Setzen wir sodann

$$\varphi = \psi + \int T dt$$

so genügt ψ der Gleichung (3), wenn darin T durch Null ersetzt ist. Weil aber in der Potentialfunction eine willkürliche additive Function von t begriffen gedacht werden kann, so können wir auch das vorige $\varphi - \int T dt$ oder ψ als die Potentialfunction betrachten, und indem man dieselbe wieder durch φ bezeichnet, genügt sie sodann der Gleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - V + P = 0 \tag{4}$$

bei welcher keine aus der Integration hervorgehenden Functionen oder Constanten mehr vorkommen.

Wenn die Bewegung stationär ist, so werden in (3) $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ und T der Null gleich. Wenn man in V und P keine beliebigen Constanten enthalten denkt, so soll das Integral der Bewegungsgleichungen in diesem Falle lauten:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} - V + P = C \tag{5}$$

Die Continuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} \tag{6}$$

Die Function P kann zwei Werte annehmen.

Digitized by Google

1⁰. Es gelte das Boylesche Gesetz:

$$p = \frac{p_0}{\mu_0}\mu$$

das ist

$$P = \frac{p_0}{\mu_0}\log\mu$$

wobei p_0, μ_0 Druck und Dichtigkeit in einem bestimmten Augenblick bezeichnen.

2⁰. Es gelte das Poissonsche Gesetz:

$$p = \frac{p_0}{\mu_0^{\,k}}\mu^k$$

worin k bekanntlich den Wert 1,408 hat. In diesem Falle ist

$$P = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\mu_0^{\,k}}\mu^{k-1}$$

Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, so hat V den Wert null. Führen wir der Kürze halber noch die Bezeichnungen

$$\varDelta\varphi \quad \text{statt} \quad \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$$

und

$$\varDelta^2\varphi \quad \text{statt} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

ein, so können wir die Gleichungen (4) und (6) in die folgende Gestalt schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\varDelta\varphi &= -\frac{p_0}{\mu_0}\log\mu && (7)\\ \varDelta^2\varphi &= -\frac{d\log\mu}{dt} && (8)\end{aligned}\right\}$$

bei Annahme des Boyleschen Gesetzes, während

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\varDelta\varphi = -\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\mu_0^{\,k}}\mu^{k-1} \qquad (9)$$

an die Stelle der Gleichung (7) tritt, wenn man die Gültigkeit der Poissonschen Formel annimmt.

Zwischen den Gleichungen (7) oder (9) und (8) kann die Grösse μ leicht eliminirt werden. Man erhält dadurch:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\varDelta\varphi\right] = \frac{p_0}{\mu_0}\varDelta^2\varphi \qquad (10)$$

bzhw.

Digitized by Google

$$\frac{d}{dt}\log\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\tfrac{1}{2}\Delta\varphi\right]=-(k-1)\Delta^2\varphi \tag{11}$$

zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials φ. Nach (9) ist die Grösse $-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta\varphi$ eine wesentlich positive Grösse.

Wenn die Bewegung stationär ist, tritt die Gleichung (5) an die Stelle von (4), d. h. es tritt $-C$ an die Stelle von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. In diesem Falle gehen (10) und (11) über in

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\tfrac{1}{2}\Delta\varphi-C\right]=\frac{p_0}{\mu_0}\Delta^2\varphi \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\log\left[C-\tfrac{1}{2}\Delta\varphi\right]=-(k-1)\Delta^2\varphi \tag{13}$$

worin wieder $C-\frac{1}{2}\Delta\varphi$ nur positiv sein kann.

Unsere Aufgabe kommt also darauf hinaus, die Gleichungen (10) (11) oder (12) (13) zu lösen, und die Lösungen besonderen Bedingungen anzupassen. Bei völliger Allgemeinheit aber gelingt es sogar nicht besondere Lösungen dieser Gleichungen anzugeben. Wir führen deshalb einige vereinfachenden Voraussetzungen ein, indem wir specielle Fälle der Gasbewegung betrachten. Der erste sei, dass dieselbe nur parallel einer bestimmten Richtung erfolgen kann und für alle in einer zu dieser Richtung senkrechten Ebene gelegenen Punkte dieselbe sei. Wir bezeichnen diese Bewegung als

Fortschreitung eines ebenen Bewegungszustandes.

§ 4. Die Z-achse des Coordinatensystems legen wir parallel der Richtung der Luftbewegung; es werden sodann $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ gleich null, $\Delta\varphi$ kann durch $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$ und $\Delta^2\varphi$ durch $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ ersetzt werden; die Operation $\frac{d}{dt}$ geht in $\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$ über. Setzt man noch

$$\frac{p_0}{\mu_0}=a^2 \tag{14}$$

so geht die Gleichung (10) über in

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z}+\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-a^2\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{15}$$

und die Gleichung (11) wird

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left[\tfrac{1}{2}(k+1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+(k-1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=0 \quad (16)$$

§ 5. Durch geeignete Transformationen wollen wir diese beiden Gleichungen vereinfachen und dazu ein bekanntes Theorem aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen anwenden [1]). Dasselbe lautet:

Wenn in einer partiellen Differentialgleichung mit einer abhängigen (z) und zwei unabhängigen Veränderlichen (x und y) die Substitution:

$$x=\frac{\partial Z}{\partial X},\quad y=\frac{\partial Z}{\partial Y},\quad z=xX+yY-Z \quad (17)$$

vorgenommen wird, wobei man von den drei neu eingeführten Grössen XYZ die zwei erstern als unabhängige, die dritte als abhängige Veränderliche betrachtet, so bestehen die reciproken Relationen:

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad Z=Xx+Yy-z \quad (18)$$

Die Functionen XYZ genügen sodann der Differentialgleichung, welche aus der gegebenen hervorgeht, wenn man darin die Substitution (13) ausführt und, falls auch zweite Differentialquotienten sich vorfinden, ausserdem $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ durch $\frac{1}{N}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ durch $-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ durch $\frac{1}{N}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$ ersetzt, wobei N der Kürze halber statt $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}-\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\right)^2$ geschrieben ist.

Wenn es demnach möglich ist von dieser neu gewonnenen Differentialgleichung eine Lösung (besondere oder allgemeine) anzugeben z. B. $Z=\Psi(X, Y)$, so kann man durch die Elimination von XYZ zwischen der letzteren Gleichung und (17) eine Relation zwischen xyz herleiten, welche in die Gestalt $z=\psi(xy)$ gebracht, eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung sein soll.

§ 6. Wir wenden zunächst dieses Theorem nur auf die Gleichung (15) an und benutzen dazu die Substitutionen:

$$t=\frac{\partial f}{\partial\tau},\quad z=\frac{\partial f}{\partial\zeta},\quad \varphi=t\tau+z\zeta-f \quad (19)$$

aus denen hervorgeht

---

1) Man sehe u. A.: Boole, A treatise on diff. equat., 4th. ed., p. 378.

Digitized by Google

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad f = \tau t + \zeta z - \varphi \tag{20}$$

während übrigens

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial z} = -\frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta\, \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}$$

$$\left(N = \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \zeta}\right)^2\right)$$

wird. Dadurch wird das Problem auf die Auflösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial^2 f}{\partial \tau\, \partial \zeta} + (\zeta^2 - a^2)\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 0 \tag{21}$$

gelenkt, welche wieder durch die Substitution

$$\tau + \tfrac{1}{2}\zeta^2 = a^2 \xi, \quad \zeta = a\eta \tag{22}$$

indem man ξ und η als die neuen unabhängigen Veränderlichen betrachtet, in die einfache Gestalt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{23}$$

gerät.

§ 7. Es handelt sich jetzt darum, die Gleichung (23) zu lösen und die Lösung besonderen Bedingungen anzupassen. Die erstere Aufgabe zu vollbringen, kann man der Gleichung (23) noch eine andere einfachere Gestalt erteilen und zwar durch die Substitution:

$$\xi = 2(\mu + \nu), \quad \eta = 2(\mu - \nu), \quad f = e^{\mu + \nu} g$$

Dadurch findet man nämlich anstatt (23):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \mu\, \partial \nu} = g \tag{24}$$

eine Gleichung, welche von Poisson[1]) mit einiger Ausführlichkeit besprochen worden ist. Derselbe gibt als allgemeine Lösung der Gleichung (24):

$$= \frac{2}{\pi} A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}\left[2\sqrt{(\mu - k)(h - \nu)}\,\mathrm{Sin}^2 \alpha\right] d\alpha$$

1) Théorie mathématique de la chaleur p. 146.

Digitized by Google

$$+ \frac{2}{\pi} \int_k^\mu \varphi(\omega)\, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}\left[2\sqrt{(\mu-\omega)(h-\nu)}\,\mathrm{Sin}^2\alpha\right] d\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_h^\nu \psi(\omega)\, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}\left[2\sqrt{(k-\mu)(\nu-\omega)}\,\mathrm{Sin}^2\alpha\right] d\alpha$$

in welcher A, h, k willkürliche Constanten, $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ willkürliche Functionen einer von μ, ν unabhängigen Veränderlichen ω bezeichnen.

Die allgemeine Lösung enthält somit Doppelintegrale und wird deshalb nur sehr schwer besonderen Bedingungen angepasst werden können. Ueber diese letzteren wollen wir erst Einiges erörtern.

§ 8. Denken wir uns, das bewegende Gas sei in einer cylindrischen Röhre enthalten und darin mittelst zweier beweglicher Stempel abgesperrt. Die Bewegung des Gases soll natürlich vollkommen bestimmt sein, wenn der Anfangszustand und die Bewegung der Stempel gegeben sind. Der Anfangszustand ist bekannt, sobald für $t = 0$ überall die Werte von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ gegeben sind, oder auch den Gleichungen (7) und (9) zufolge eine dieser beiden Grössen und der Wert von p oder μ in jedem Punkte. Die Bewegung der Stempel ist durch zwei Bedingungen jede von der Form:

$$\text{Für } z = F(t) \text{ soll } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F'(t) \text{ sein —}$$

bestimmt, wenn hierin unter F' die Derivirte von F nach dem Argument t verstanden wird.

Führt man in diese Bedingungen die neuen Veränderlichen τ und ζ nebst f ein, so gehen dieselben über in folgende:

Für $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ sollen ζ und τ als Functionen von $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ gegeben sein,

und für $\frac{\partial f}{\partial \zeta} = F\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)$ soll $\zeta = F'\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)$ sein.

Ist der Anfangszustand auch Gleichgewichtszustand, so ist, für $t = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{Constant}$. In den neuen Veränderlichen heisst dies:

Digitized by Google

$$\text{Für } \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \text{ soll } \zeta = 0 \text{ und } \tau = C \text{ werden.}$$

Ist ausserdem einer der beiden Stempel fest, so geht eine der hierauf bezüglichen Bedingungen über in folgende:

$$\text{Für } \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \text{Constant soll } \zeta \text{ verschwinden.}$$

Lässt man vorläufig die Bewegung des zweiten Stempels unbestimmt, so findet man nach Einführung der Grösse η in die Bedingungen, dass Lösungen der Gleichung (23), welche folgende Eigenschaften besitzen

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \text{ soll } \eta = 0 \text{ und } \xi = \text{Const. werden} \\ \text{Für } \frac{\partial f}{\partial \eta} = \text{Constant soll } \eta \text{ verschwinden [1])} \end{array}\right\} \quad (25)$$

Bewegungen eines Gases darstellen in einer cylindrischen Röhre enthalten und darin mittelst einem festen und einem beweglichen Stempel abgesperrt, während diese Bewegungen aus einem Gleichgewichtszustande hervorgegangen sind.

Wegen der besonderen Einfachheit der Gleichung (24) könnte man auch versuchen die Grössen μ, ν in die Bedingungen einzuführen, doch nehmen dieselben dabei eine verwickelte Gestalt an. Wir ziehen deshalb für die Anwendung auf specielle Fälle die Gleichung (23) der einfachern (24) vor.

§ 9. Wir wollen jetzt einige besondere Lösungen der Gleichung (23) näher ins Auge fassen. Die Gleichung ist linear, doch gilt

---

1) Diese Gleichung lautet ursprünglich:

$$\text{Für } \frac{\partial f}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial f}{\partial \xi} = \text{Const. soll } \eta \text{ verschwinden.}$$

Weil aber

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = a^2 \frac{\partial f}{\partial z} = a^2 t$$

so kann $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ nur unendlich werden für $t = \infty$, nicht aber für $\eta = 0$; sobald η verschwindet ist deshalb auch $\eta \frac{\partial f}{\partial \xi}$ der Null gleich. Dadurch wird die ursprüngliche Form der Bedingung auf jene der zweiten der Gleichungen (25) reducirt.

Digitized by Google

desbalb nicht das Princip der Superposition bei diesen Bewegungen. Sind nämlich

$$f = f_1(\xi\eta) \quad \text{und} \quad f = f_2(\xi\eta)$$

zwei Lösungen, so leitet man aus diesen und den Gleichungen (19) durch Elimination von $t\xi$ zwei Relationen

$$\varphi = \varphi_1(tz), \quad \varphi = \varphi_2(tz)$$

her. Es wird sodann aber im allgemeinen nicht

$$\varphi = \varphi_1(tz) + \varphi_2(tz)$$

das Eliminationsresultat sein aus (19) und der Lösung

$$f = f_1(tz) + f_2(tz)$$

Setzen wir in (23):

$$f = e^{m\xi + n\eta}$$

so wird derselben genügt, falls

$$m^2 - n^2 = m \quad \text{oder} \quad n = \pm\sqrt{m^2 - m}$$

Bei reellen Werten von m ist n reell, wenn $\infty > m > +1$ oder $m < 0$ ist. Es wird also:

$$f = e^{m\xi \pm \eta\sqrt{m^2 - m}}$$

oder auch

$$f = e^{m\xi}\left[Ae^{\eta\sqrt{m^2 - m}} + Be^{-\eta\sqrt{m^2 - m}}\right]$$

eine Lösung sein. Wählen wir $B = A$, so wird

$$f = Ae^{m\xi}\left[e^{\eta\sqrt{m^2 - m}} + e^{-\eta\sqrt{m^2 - m}}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = mAe^{m\xi}\left[e^{\eta\sqrt{m^2 - m}} + e^{-\eta\sqrt{m^2 - m}}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = A\sqrt{m^2 - m}\, e^{m\xi}\left[e^{\eta\sqrt{m^2 - m}} - e^{-\eta\sqrt{m^2 - m}}\right]$$

und hieraus folgt durch Division:

$$2\eta\sqrt{m^2 - m} = \log \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}\sqrt{1 - \frac{1}{m}} + \frac{\partial f}{\partial \eta}}{\frac{\partial f}{\partial \xi}\sqrt{1 - \frac{1}{m}} - \frac{\partial f}{\partial \eta}}$$

und weiter

Digitized by Google

$$2m\xi = \log \frac{1}{4A^2}\left[\frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 - \frac{1}{m^2-m}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

Für $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$ wird demnach η verschwinden; nach Gleichung (25) bedeutet dies, dass an der Stelle $z = 0$ eine feste Wand gedacht werden kann. Nach Einführung von ζ und τ wird:

$$f = Ae^{\frac{m}{a^2}(\tau + \frac{1}{2}\zeta^2)}\left[e^{\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}} + e^{-\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}}\right]$$

$$z = \frac{\partial f}{\partial \zeta} = Ae^{\frac{m}{a^2}(\tau + \frac{1}{2}\zeta^2)}\left[\frac{\sqrt{m^2-m}}{a}\left\{e^{\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}} - e^{-\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}}\right\} + \frac{m\zeta}{a^2}\left\{e^{\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}} + e^{-\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}}\right\}\right]$$

$$t = \frac{\partial f}{\partial \tau} = A\frac{m}{a^2}e^{\frac{m}{a^2}(\tau + \frac{1}{2}\zeta^2)}\left[e^{\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}} + e^{-\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2-m}}\right]$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen ergibt eine andere, welche sich in die Gestalt

$$\zeta = F\left(\frac{z}{t}\right)$$

bringen lässt; sobald also $\frac{z}{t}$ denselben Wert erreicht, wird auch stets ζ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ den nämlichen Wert bekommen. Es seien $P_1 P_2 P_3 \ldots$ Punkte, deren Abstände vom verschlossenen Ende O der Röhre eine arithmetische Reihe bilden. Wenn innerhalb einer Secunde nach dem Anfang der Bewewegung die Geschwindigkeit in P_1 die Grösse v erreicht hat, so wird nach 2, 3 ... Secunden dieselbe Geschwindigkeit v in den Punkten $P_2 P_3 \ldots$ bestehen. Man kann hierbei also gewissermaassen von einem gleichmässig fortschreitenden Bewegungszustande des Gases in einer an einem Ende verschlossenen cylindrischen Röhre reden.

Wenn $0 < m < 1$, so wird

$$f = Ae^{m\xi}\left[e^{i\eta\sqrt{m-m^2}} \pm e^{-i\eta\sqrt{m-m^2}}\right]$$

oder

$$f = A e^{m\xi} \operatorname{Cos}\left[\eta \sqrt{m - m^2} + \alpha\right]$$

wo α eine beliebige Constante bedeutet, eine Lösung sein. Weit interessanter ist jedoch der der Gleichung (23) ebenfalls genügende Ausdruck:

$$f = e^{\frac{1}{2}\xi} \operatorname{Sin}(m\xi + \alpha) \operatorname{Sin}\left(\eta\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} + \beta\right) \tag{26}$$

(Hierin können m, α, β beliebig gewählt werden). Derselbe eignet sich nämlich sehr gut um eine den drei gestellten in den Gleichungen (25) ausgesprochenen Forderungen genügende Lösung zu bilden.

Setzen wir nämlich:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \log\operatorname{tg}\frac{1}{2m} - cm, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

wo c wieder eine beliebige Constante bedeutet, so wird

$$f = e^{\frac{1}{2}\xi} \operatorname{Cos}\left[m(\xi - c) + \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right] \operatorname{Cos} \eta\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}}$$

der Differentialgleichung (23) genügen, und ausserdem kann für

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

η verschwinden, und für

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

$\xi = c$ werden, so dass zwei Bedingungen erfüllt sind. Dieselben Eigenschaften besitzt auch die Function:

$$f = e^{\frac{1}{2}\xi} \int_{m_1}^{m_2} \operatorname{Cos}\left[m(\xi - c) + \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right] \operatorname{Cos} \eta\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}}\, \psi(m)\, dm \tag{27}$$

wenn durch $\psi(m)$ eine ganz willkürliche Function von m bezeichnet ist, während m_1 und m_2 zwei beliebige Werte von m bedeuten.

Es folgt hieraus:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -e^{\frac{1}{2}\xi} \int_{m_1}^{m_2} \operatorname{Sin}\left[m(\xi - c)\right] \operatorname{Cos} \eta\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} \cdot \psi(m)\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}}\, dm$$

Für $\eta = 0$ soll weiter dieser Ausdruck sich annulliren für jedes beliebige ξ, was darauf hinauskommt, dass für jedes beliebige ξ

Digitized by Google

$$\int_{m_1}^{m_2} \operatorname{Sin} m(\xi - c) \, . \, \psi(m) \sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} \, dm$$

verschwinden soll. Dasselbe wird aber stattfinden können bei verschiedenen Annahmen über $m_1 m_2$ und $\varphi(m)$. Es sind z. B.

$$\int_0^\infty \operatorname{Sin}(mx^2) \operatorname{Sin} nx \, dx = 0 = \int_0^\infty \operatorname{Cos}(mx^2) \operatorname{Sin} nx \, dx$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Sin}(m\sqrt{x}) \operatorname{Sin} nx \, dx = 0 = \int_0^\infty \operatorname{Cos}(m\sqrt{x}) \operatorname{Sin} nx \, dx$$

bekannte Formeln der Integralrechnung [1]), in denen man m und n jeden beliebigen Wert beilegen kann ausgenommen $m = 0$. Setzen wir daher

$$\psi(m) \, . \, \sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} = \operatorname{Sin} pm^2, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = \infty$$

wo p noch beliebig gewählt werden kann, so stellt die Function

(28)

$$f = e^{\frac{1}{2}\xi} \int_0^\infty \operatorname{Cos}\left[m(\xi - c) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2m}\right] \operatorname{Cos}_\eta \sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} \cdot \frac{\operatorname{Sin} pm^2}{\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}}} \, dm$$

eine Gasbewegung in einer cylindrischen Röhre dar, bei welcher die Teilchen in der Ebene $z = 0$ in dem Ruhezustande verharren, während die Bewegung aus einem Gleichgewichtszustande im Augenblick $t = 0$ entstanden ist.

Dieselbe Eigenschaften besitzt die aus (28) durch Aenderung von $\operatorname{Sin} pm^2$ in $\operatorname{Sin} p\sqrt{m}$ hervorgehende Function f.

Aus (28) findet man nach Einführung von ζ, τ:

$$z = -\frac{1}{a} e^{\frac{1}{2a^2}(\tau + \frac{1}{2}\zeta^2)} \int_0^\infty \operatorname{Sin} pm^2 \left[\frac{\zeta}{a} \operatorname{Cos}\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} \operatorname{Sin}\frac{m}{a^2}(\tau + \tfrac{1}{2}\zeta^2 - a^2 c)\right.$$
$$\left. + \operatorname{Sin}\frac{\zeta}{a}\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{4}} \operatorname{Cos}\left\{\frac{m}{a^2}(\tau + \tfrac{1}{2}\zeta^2 - a^2 c) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2m}\right\}\right] dm$$

---

1) Man sehe z. B. D. Bierens de Haan, Exposé de la théorie etc. des intégrales définies, p. 443.

Digitized by Google

$$t = -\frac{1}{a^2} e^{\frac{1}{2a^2}(\tau+\frac{1}{2}\zeta^2)} \int_0^\infty \operatorname{Sin} pm^2 \operatorname{Cos} \frac{\zeta}{a} \sqrt{m^2+\tfrac{1}{4}} \operatorname{Sin} \frac{m}{a^2}(\tau+\tfrac{1}{2}\zeta^2 - a^2 c)\, dm$$

Es lassen sich aber hieraus ζ und τ nicht als Functionen von z und t darstellen. Es erhellt aus diesen Werten, dass die Annahme $\zeta = 0$ nur für $z = 0$ möglich ist, dass also alle nicht an dem festen Stempel liegenden Teilchen fortwährend in Bewegung sind. Die weitere Untersuchung dieser Bewegung ist schwer und kann nur bei numerischer Berechnung stattfinden.

§ 10. Die in den Paragraphen 6 – 8 durchgeführten Betrachtungen wollen wir weiter auch auf den Fall anwenden, dass das Poissonsche Gesetz zur Geltung kommt. Wir benutzen dazu auch in der Gleichung (16) die Substitutionen (19) und (20). Dieselbe wird dadurch:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial f}{\partial \tau \, \partial \zeta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\left[(k-1)\tau + \frac{k+1}{2}\zeta^2\right] = 0 \qquad (29)$$

Setzen wir noch:

$$2\sqrt{\frac{-\tau - \frac{1}{2}\zeta^2}{k-1}} = \theta \qquad (30)$$

wobei θ eine stets reelle Grösse ist, weil nach Gleichung (9) $-\tau - \frac{1}{2}\zeta^2$ wesentlich positiv ist, und führen wir ζ und θ als unabhängige Veränderliche ein, so geht (29) über in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{a}{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad (31)$$

wo der Kürze halber

$$\frac{3-k}{k-1} = a$$

gesetzt ist. Diese Grösse hat also den Wert 3,902.

Sehen wir zu, welche Gestalt die Nebenbedingungen des Problems (für die wir die beim vorigen Problem durch die Gleichungen (25) ausgesprochenen auch hier wählen wollen), annehmen bei Einführung der Veränderlichen ζ und θ. Es stellt sich dann heraus, dass

für $\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \text{Constant}$, ζ verschwinden

und (32) [1])

Digitized by Google

$$\text{für } \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \quad \zeta = 0 \text{ und } \theta = \text{Constant werden muss.} \qquad (32)$$ [1]

Der Wert der ersten Constante kann null angenommen werden es findet dann keine Bewegung an der Stelle $z = 0$ statt. Der Wert der zweiten Constante hängt mit dem gegebenen Anfangszustande zusammen. Wie man leicht nachweist, ist dieselbe

$$\frac{2}{k-1}\sqrt{k\frac{p_0}{\mu_0}} = \frac{2}{k-1}v$$

wenn v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in dem betrachteten Gase bedeutet.

§ 11. Die allgemeine Lösung der Gleichung (31) ist leicht anzugeben. Dieselbe ist von Boole[2]) bei einer von der obigen wenig abweichenden Gleichung ausführlich behandelt worden. Indem man die dort befolgte Methode auch hier anwendet und dabei beachtet, dass a in der Gleichung (31) der Wert 3,902 zukommt, (die Lösung ist nämlich je nach dem Werte von a verschieden), findet man das allgemeine Integral:

---

1) Ursprünglich haben diese Bedingungen wieder eine mehr verwickelte Form; die erste lautet nämlich:

$$\text{für } \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{1}{k-1}\frac{\zeta}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \text{Constant muss } \zeta \text{ verschwinden.}$$

Es ist aber

$$t = -\frac{2}{k-1}\frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

und diese Grösse wird also nur unendlich für $t = \infty$, so dass für den Wert null von ζ, ausgenommen bei $t = \infty$, auch $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ allein constant sein muss.

Die zweite ist ebenso ursprünglich:

$$\text{für } \frac{2}{k-1}\frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \text{ muss } \zeta = 0 \text{ und } \mu = \mu_0$$

also

$$\tau + \tfrac{1}{2}\zeta^2 = -\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\mu_0}$$

d. h.

$$\theta^2 = \frac{4k}{(k-1)^2}\frac{p_0}{\mu_0}$$

werden.

2) l. c. p. 476.

Digitized by Google

$$f = \theta^{1-a}\int_0^\pi [\theta \operatorname{Cos} u F'(\zeta + \theta \operatorname{Cos} u) + (3-a) F(\zeta + \theta \operatorname{Cos} u)] \operatorname{Sin}^{3-a} u\, du$$
$$+ \int_0^\pi F_1(\zeta + \theta \operatorname{Cos} u) \operatorname{Sin}^{a-1} u\, du$$

wo F eine willkürliche Function von $\zeta + \theta \operatorname{Cos} u$, F' die Derivirte derselben nach dem Argumente $\zeta + \theta \operatorname{Cos} u$ und F_1 eine zweite beliebige Function bezeichnet; u ist eine unabhängige Veränderliche. Wie man aber ersieht, ist dieses Integral zu verwickelt um den besonderen Bedingungen angepasst zu werden können.

§ 12. Wir wollen zum Schlusse dieser Abteilung noch eine besondere Lösung der Gleichung (31) betrachten; nämlich die, welche die Form hat:

$$f = F(\theta) e^{m\zeta}$$

Die Function F soll sodann der Differentialgleichung genügen:

$$\theta \frac{d^2 F}{d\theta^2} + a \frac{dF}{d\theta} - m^2 \theta F = 0 \tag{33}$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$F = C_1 \int_0^\pi e^{m\theta \operatorname{Cos} u} (m\theta \operatorname{Cos} u + 3 - a)\, \theta^{1-a} (\operatorname{Sin} u)^{3-a} du$$
$$+ C_2 \int_0^\pi e^{m\theta \operatorname{Cos} u} (\operatorname{Sin} u)^{a-1} du$$

Indem man hierin m einen imaginären Wert erteilt, findet man dass

$$f = C_1 \operatorname{Cos} m \int_0^\pi [(3-a) \operatorname{Cos}(m\theta \operatorname{Cos} u + \alpha)$$
$$- m\theta \operatorname{Cos} u \operatorname{Sin}(m\theta \operatorname{Cos} u + \alpha)]\, \theta^{1-a} \operatorname{Sin}^{3-a} u\, du$$
$$+ C_2 \operatorname{Cos} m\zeta \int_0^\pi \operatorname{Cos}(m\theta \operatorname{Cos} u + \beta) \operatorname{Sin}^{a-1} u\, du$$

eine Lösung des Problems ist. $C_1\, C_2\, \alpha\, \beta$ sind willkürlich [1]).

---

1) Man kann leicht die Function von θ in convergente Reihen entwickeln, zu denen man übrigens wohl am leichtesten auf folgende Weise gelangt. Man setze in (33):

Dieselbe hat die Eigenschaft, dass für

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0$$

ζ verschwindet. Man kann weiter auch die Constanten C_1 und C_2 oder vielmehr deren Verhältniss stets derart bestimmen, dass für

$$\theta = \sqrt{k \frac{p_0}{\mu_0}}$$

$\frac{\partial f}{\partial \theta}$ verschwindet, so dass dadurch eine Lösung erhalten wird, welche zweien der drei Bedingungen (32) genügt. Es gelingt aber nicht daraus eine andere herzuleiten, welche auch der dritten Bewegung Genüge leistet. Es bietet deshalb die betrachtete besondere Lösung wenig Interessantes dar.

§ 13. Nach der Erledigung der Transformationen, welche dazu dienen können die Bewegungsgleichung eines Gases, dessen Teilchen nur parallel einer bestimmten Richtung sich bewegen, zu vereinfachen, wollen wir uns jetzt dem Problem der Strahlbildung bei den Gasen zuwenden. Wir bezeichnen daher das Folgende als

Stationären Ausfluss eines Gases mit Strahlbildung.

Die Bedeutung dieses Ausdrucks nehmen wir in dem von Helmholtz und Kirchhoff angegebenen Sinne [1]). Mit der Voraussetzung des stationären Bewegungszustandes verknüpfen wir die, dass die Bewegung nur von zwei Coordinaten abhängig sei, welche auch bei

---

$$F = A_k \theta^k + A_{k+1} \theta^{k+1} + A_{k+2} \theta^{k+2} + A_{k+3} \theta^{k+3} + \ldots$$

so findet man, dass die folgenden Relationen stattfinden sollen:

$$k = 0 \text{ oder } k = 1 - a, \quad A_{k+1} = 0$$

und allgemein:

$$A_{k+l+2} = -A_{k+l} \frac{m^2}{(k+l+2)(k+l+1+a)}$$

Es wird somit

$$f = \left\{ C_1 \left[1 - \frac{m^2 \theta^2}{2(1+a)} + \frac{m^4 \theta^4}{2.4.(1+a)(3+a)} - \ldots \right] \right.$$
$$\left. + C_2 \theta^{1-a} \left[1 - \frac{m^2 \theta^2}{2(3-a)} + \frac{m^4 \theta^4}{2.4.(3-a)(5-a)} - \ldots \right] \right\} \operatorname{Cos} m\zeta$$

eine andere Gestalt der Lösung sein. Für alle endlichen Werte von θ sind die beiden zwischen Klammern stehenden Reihen convergent.

1) Man sehe u. A. Kirchhoff, Vorl. über math. Phys., Mech. 22te Vorl.

Digitized by Google

incompressiblen Flüssigkeiten notwendig war, um zu Lösungen des Problems zu gelangen. Es kommt demnach darauf an eine Function φ zu bestimmen, welche einer gewissen näher zu bezeichnenden partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, und welche derart ist, dass für alle Punkte einer Oberfläche mit der Gleichung

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}} = \text{Constant} = k$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ verschwindet, wo n die Richtung der Normale in einem Punkte jener Oberfläche bedeutet.

Wir wenden uns im Folgenden zunächst dem Falle zu, wo das Boylesche Gesetz angenommen werden kann.

§ 14. Die Differentialgleichung, welcher das Geschwindigkeitspotential φ bei stationärer Bewegung genügen soll, ist schon in § 3. hergeleitet. Führen wir noch die Unabhängigkeit der Bewegung von z Coordinaten ein, so findet man, indem man noch die Gleichung (14) zur Geltung bringt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \tag{34}$$

Mit dieser Gleichung wollen wir ähnliche Transformationen vornehmen, wie in dem Falle der Strahlbildung bei incompressiblen Flüssigkeiten [1]) ausgeführt sind. Man setze also:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = aq\,\mathrm{Cos}\,\mu,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = aq\,\mathrm{Sin}\,\mu \tag{35}$$

und führe nachher q und μ als unabhängige Veränderliche ein. Es bedeutet also aq die Grösse der Geschwindigkeit in einem Punkte und μ den Winkel, welchen dieselbe mit der X-achse bildet.

Es wird alsdann:

(36)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = a\left(\frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{Cos}\,\mu - q\frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{Sin}\,\mu\right) = a\left(\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{Sin}\,\mu + q\frac{\partial\mu}{\partial x}\mathrm{Cos}\,\mu\right)$$

und

$$(q^2-1)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{Cos}\,\mu + \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{Sin}\,\mu\right) = q\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{Cos}\,\mu - \frac{\partial\mu}{\partial x}\mathrm{Sin}\,\mu\right)$$

---

1) Molenbroek, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, Wied. Ann. Bd. XXXV. 1888.

Digitized by Google

Die Bedingung, welche in der freien Oberfläche des Strahles erfüllt werden soll, lautet:

$$\text{Für } q = \frac{k}{a} \text{ soll } \frac{\partial q}{\partial x}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial q}{\partial y}\operatorname{Sin}\mu = 0 \text{ werden.} \tag{37}$$

Verwechseln wir in den Gleichungen (36) die abhängigen und die unabhängigen Veränderlichen [1]), so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial x}{\partial q}\operatorname{Sin}\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\operatorname{Cos}\mu &= \frac{1}{q}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu\right) \\ \frac{\partial x}{\partial q}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\operatorname{Sin}\mu &= \frac{q^2-1}{q}\left(-\frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu\right) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

während die Bedingung (37) dabei übergeht in folgende:

(39)

$$\text{Für } q = \frac{k}{a} = \text{constant soll } -\frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu \text{ verschwinden.}$$

Setzt man nunmehr

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu &= \frac{1}{q}e^{\frac{1}{2}q^2}u \\ \frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu &= \frac{1}{q}v \end{aligned}\right\}$$

so wird weiter:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial x}{\partial q}\operatorname{Sin}\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\operatorname{Cos}\mu &= \frac{1}{q^2}v \\ \frac{\partial x}{\partial q}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\operatorname{Sin}\mu &= \frac{q^2-1}{q^2}e^{\frac{1}{2}q^2}u \end{aligned}\right\}$$

und aus diesen vier Gleichungen folgt durch Auflösung:

(40)

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{1}{q}\left(-e^{\frac{1}{2}q^2}u\operatorname{Sin}\mu + v\operatorname{Cos}\mu\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{1}{q}\left(e^{\frac{1}{2}q^2}u\operatorname{Cos}\mu + v\operatorname{Sin}\mu\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{1}{q^2}\left[(q^2-1)e^{\frac{1}{2}q^2}u\operatorname{Cos}\mu - v\operatorname{Sin}\mu\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{1}{q^2}\left[(q^2-1)e^{\frac{1}{2}q^2}u\operatorname{Sin}\mu + v\operatorname{Cos}\mu\right]$$

---

1) Man vergleiche die citirte Abhandlung.

Digitized by Google

Berechnet man hieraus die Werte von $\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial q}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial\mu\,\partial q}$, so ergeben sich daraus zwei Gleichungen, welche in die folgenden umgestaltet werden können:

$$\frac{\partial v}{\partial q} = e^{\frac{1}{2}q^2}\,\frac{q^2-1}{q}\,\frac{\partial u}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \mu} = e^{\frac{1}{2}q^2}\,q\,\frac{\partial u}{\partial q} \tag{41}$$

Aus diesen beiden kann die Function v leicht eliminirt werden, und man findet eine Gleichung, der die Function u genügen soll. Dieselbe lautet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \frac{1+q^2}{q}\,\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1-q^2}{q^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = 0 \tag{42}$$

Die Bedingung (39) endlich nimmt bei Einführung von u und v die Gestalt an:

$$\text{Für } q = \text{Const. soll } u \text{ verschwinden.} \tag{43}$$

§ 15. Es ist hiermit das Problem in eine ziemlich einfache Form geraten; es bleibt aber noch fraglich, wie sich die Gleichung der festen Begrenzung des Gases oder des Gefässes ermitteln lässt. Ich folge dabei derselben Methode, welche dazu in der schon citirten Abhandlung gedient hat, und welche hier keine wesentliche Aenderung erfährt. Sobald eine Function $\psi(xy)$ sich finden lässt, derart, dass für alle Punkte der Oberfläche $\psi(xy) = $ Constant

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\text{Cos}\,\mu + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\text{Sin}\,\mu$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial q}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\,\text{Cos}\,\mu - \frac{\partial x}{\partial \mu}\,\text{Sin}\,\mu\right) - \frac{\partial \psi}{\partial \mu}\left(\frac{\partial y}{\partial q}\,\text{Cos}\,\mu - \frac{\partial x}{\partial q}\,\text{Sin}\,\mu\right)$$

oder schliesslich

$$\frac{\partial \psi}{\partial q}\,q e^{\frac{1}{2}q^2}\,u - \frac{\partial \psi}{\partial \mu}\,v$$

null wird, so kann man die Oberfläche mit der Gleichung

$$\psi(q\mu) = \text{Const.} \tag{44}$$

ganz oder teilweise als feste Wand betrachten. Eine dieser Bedingung genügende Function ψ lässt sich aber sehr leicht angeben. Setzt man nämlich:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{1}{q}\,e^{-\frac{1}{2}q^2}\,v, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = u \tag{45}$$

Digitized by Google

welche beiden Gleichungen nach einer der beiden Relationen (41) mit einander verträglich sind, so ist die dadurch definirte Function ψ die gesuchte.

Die Wand ist eine Ebene mit der Gleichung $\mu =$ Constant, sobald für diesen Wert von μ die Function v den Wert null annimmt, weil alsdann μ der Bedingung für die Function v genügt.

Nach allem diesem sei es uns gestattet das in Betracht kommende Problem in seiner neuen Form kurz auszusprechen:

Eine Function u zu bestimmen, welche der partiellen Differentialgleichung (42) und der Bedingung (43) genügt.

Mit Hülfe der Gleichungen (41) kann man sodann die Function v und nachher aus (45) ψ d. h. die Gleichung der festen Wand bestimmen. Wenn für irgend einen Wert von μ v verschwindet, so hat man es mit einer Ausströmung aus ebener Wand zu tun.

Man kann sehr leicht die Bedeutung der Functionen μ und v angeben. Nach den Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mu}$$

findet man nämlich unmittelbar:

$$u = \frac{q}{a}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}q^2}}{q^2-1}\,\frac{\partial \varphi}{\partial q}, \qquad v = \frac{1}{a}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \tag{46}$$

u und v hangen also auf einfache Weise mit dem Potential zusammen.

§ 16. Die allgemeine Lösung der Gleichung (42) zu finden setzen wir symbolisch:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = m$$

und betrachten zunächst die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dq^2} + \frac{1+q^2}{q}\,\frac{du}{dq} + m^2\,\frac{1-q^2}{q^2}\,u = 0 \tag{47}$$

Man nehme

$$q^2 = \xi \quad \text{und} \quad u = \xi^{\pm \frac{mi}{2}}\,w$$

so geht die Gleichung (47) über in

Digitized by Google

$$4\xi \frac{d^2w}{d\xi^2} + 2\frac{dw}{d\xi}[2(\pm mi+1)+\xi]+(\pm mi - m^2)w = 0$$

deren allgemeine Lösung bekannt ist [1]). Es wird demnach

$$u = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-q^2t}\left(\frac{2t-1}{t}\right)^{\frac{m^2}{2}}\left[C_1\{q^2t(2t-1)\}^{\frac{im}{2}} + C_2\{q^2t(2t-1)\}^{-\frac{im}{2}}\right]\frac{dt}{t}$$

wo t eine willkürliche unabhängige Veränderliche bedeutet, das allgemeine Integral der Gleichung (41) sein. Auch können wir diesen Ausdruck als die allgemeine symbolische Lösung der Gleichung (42) betrachten [2]). Indem man die Symbole in die gewöhnliche Schreibweise überträgt, findet man, wenn mit $F_1'(\alpha)$, $F_2'(\alpha)$ zwei beliebige Functionen von dem Argument α, mit $F_1'(\alpha)$, $F_2'(\alpha)$, deren erste Differentialquotienten nach diesem Argument u. s w. bezeichnet werden, die folgende allgemeine Lösung von (42):

$$u = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-q^2t}\frac{dt}{t}\left[F_1\left\{\mu+\frac{i}{2}\log q^2t(2t-1)\right\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{2t-1}{t}.F_1'' + \frac{1}{1.2}\frac{1}{2^2}\log^2\frac{2t-1}{t}.F_1^{IV}+\ldots\right]$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-q^2t}\frac{dt}{t}\left[F_2\left\{\mu-\frac{i}{2}\log q^2t(2t-1)\right\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{2t-1}{t}.F_2'' + \frac{1}{1.2}\frac{1}{2^2}\log^2\frac{2t-1}{t}.F_2^{IV}+\ldots\right]$$

wo der Kürze halber die Argumente bei den Differentialquotienten fortgelassen sind. Das Anpassen dieser Lösung an die Bedingung (43) kann aber im allgemeinen nicht auf einfache Weise stattfinden.

§ 17. Betrachten wir näher diejenigen Lösungen, welche von der Form

$$u = Q \operatorname{Cos} \alpha\mu$$

sind. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung, welcher die

1) Man vergleiche u. A. Spitzer, Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen.

2) Boole l. c. Ch. XVI u. folg.

Grösse Q, welche nur von q abhängig ist, genügt, ist verschieden je nach dem Werte, welchen wir α erteilen. Wir wenden uns deshalb zur Reihenentwickelung und setzen in

$$\frac{d^2Q}{dq^2}+\frac{1+q^2}{q}\frac{dQ}{dq}-\alpha^2\frac{1-q^2}{q^2}Q=0$$

$$Q=A_k q^k+A_{k+1}q^{k+1}+A_{k+2}q^{k+2}+A_{k+3}q^{k+3}+\ldots$$

Es ergeben sich sodann die nachfolgenden Relationen:

$$k^2-\alpha^2=0,\quad A_{k+1}=0$$

und weiter allgemein:

$$A_{k+l}=-\frac{k+l-2+\alpha^2}{(k+l)^2-\alpha^2}A_{k+l-2}$$

Zwei Reihen für Q genügen deshalb der vorgelegten Gleichung, nämlich:

$$Q_1=q^\alpha\left[1-q^2\frac{\alpha}{4}+q^4\frac{\alpha}{4}\frac{\alpha^2+\alpha+2}{8(\alpha+2)}-q^6\frac{\alpha}{4}\frac{\alpha^2+\alpha+2}{8(\alpha+2)}\times\frac{\alpha^2+\alpha+4}{12(\alpha+3)}+\ldots\right]$$

$$Q_2=q^{-\alpha}\left[1+q^2\frac{\alpha}{4}+q^4\frac{\alpha}{4}\frac{\alpha^2-\alpha+2}{8(\alpha-2)}+q^6\frac{\alpha}{4}\frac{\alpha^2-\alpha+2}{8(\alpha-2)}\times\frac{\alpha^2-\alpha+4}{12(\alpha-3)}+\ldots\right]$$

welche jede mit einer beliebigen Constante multiplicirt werden kann.

Für die zwei Reihen findet man, indem man die Bedingung der Convergenz anwendet:

$$\text{Lim}\frac{t_{n+1}}{t_n}=\text{Lim}-q^2\frac{\alpha^2+\alpha+2n-2}{4n(\alpha+n)}$$

oder

$$\text{Lim}+q^2\frac{\alpha^2-\alpha+2n-2}{4n(\alpha-n)}\text{ bzhw.}$$

Bei wachsendem n nähern die beiden Grenzen sich der Null, so lange q endlich bleibt. Beide Reihen sind somit convergent für endliche Werte von q. Wir setzen:

$$Q=C_1Q_1+C_2Q_2$$

so wird

$$u=(C_1Q_1+C_2Q_2)\operatorname{Cos}\alpha\mu$$

Digitized by Google

die betrachtete Lösung. Dieselbe soll der Bedingung genügen, dass für irgend einen constanten Wert von q u verschwindet. Wir wollen dazu den Wert

$$q = \frac{1}{a}$$

wählen; die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Strahles wird dadurch der Einheit gleich. Bezeichnen wir die Werte, welche Q_1, Q_2 für

$$q = \frac{1}{a}$$

annehmen durch A_1, A_2 bzhw., so wird

$$u = (A_2 Q_1 - A_1 Q_2) \operatorname{Cos} \alpha \mu \tag{48}$$

eine der gestellten Bedingung genügende Lösung des Problems sein.

Indem man die Derivirten von Q_1 und Q_2 nach q durch hinzugefügte Accente andeutet, findet man aus (41):

$$v = \frac{1}{\alpha} (A_2 Q_1' - A_1 Q_2') e^{\frac{1}{2} q^2} q \operatorname{Sin} \alpha \mu$$

Für $\mu = 0$ wird v der Null gleich. Die durch die Function u charakterisirte Bewegung kann somit als bei einem Gefässe mit ebener Wand vorkommend, betrachtet werden.

Bestimmen wir noch die Gestalt des Strahles und die Breite der Gefässöffnung. Wählen wir die X-Achse als feste Wand (dieselbe hat die Gleichung

$$\operatorname{Sin} \alpha \mu = 0$$

welche wir specialisiren zu $\mu = 0$, und soll deshalb der X-achse parallel sein oder mit derselben zusammenfallen), so wird die Breite des Strahles an irgend einer Stelle gefunden, indem man die Schnittpunkte bestimmt der Geraden $y = h$, wo h eine willkürliche Constante bedeutet, mit der Oberfläche des Strahles, welche die Gleichung

$$q = \frac{1}{a}$$

hat. Für $h = 0$ findet man sodann, wo der Strahl die feste Wand trifft oder aus derselben hervortritt. Die Distanz zwischen zwei solchen Schnittpunkten liefert demnach die Breite der Ausflussöffnung.

Die Ausführung dieser Bestimmung erfordert somit, dass man entweder x und y als Functionen von q und μ oder umgekehrt be-

Digitized by Google

stimmen kann. Wir wenden uns dem ersteren Problem zu, weil die Gleichungen (40) uns unmittelbar dazu in den Stand setzen. **Man** findet daraus:

(49)

$$x = \frac{1}{2\alpha}\,\frac{e^{\frac{1}{2}q^2}}{q}\left[\frac{\alpha(A_2 Q_1 - A_1 Q_2) - q(A_2 Q_1' - A_1 Q_2')}{\alpha+1}\operatorname{Cos}(\alpha+1)\mu - \frac{\alpha(A_2 Q_1 - A_1 Q_2) + q(A_2 Q_1' - A_1 Q_2')}{\alpha-1}\operatorname{Cos}(\alpha-1)\mu\right]$$

$$y = \frac{1}{2\alpha}\,\frac{e^{\frac{1}{2}q^2}}{q}\left[\frac{\alpha(A_2 Q_1 - A_1 Q_2) - q(A_2 Q_1' - A_1 Q_2')}{\alpha+1}\operatorname{Sin}(\alpha+1)\mu) + \frac{\alpha(A_2 Q_1 - A_1 Q_2) + q(A_2 Q_1' - A_1 Q_2')}{\alpha-1}\operatorname{Sin}(\alpha-1)\mu\right]$$

Für die Oberfläche des Strahles hat man hierin

$$q = \frac{1}{a}$$

zu setzen. Deutet man die Werte, welche Q_1' und Q_2' dadurch erhalten durch A_1' bzhw. A_2' an, so wird dafür:

(50)

$$x = \frac{1}{2\alpha}\,e^{\frac{1}{2a^2}}(A_1 A_2' - A_2 A_1')\left[\frac{1}{\alpha+1}\operatorname{Cos}(\alpha+1)\mu + \frac{1}{\alpha-1}\operatorname{Cos}(\alpha-1)\mu\right]$$

$$y = \frac{1}{2\alpha}\,e^{\frac{1}{2a^2}}(A_1 A_2' - A_2 A_1')\left[\frac{1}{\alpha+1}\operatorname{Sin}(\alpha+1)\mu - \frac{1}{\alpha-1}\operatorname{Sin}(\alpha-1)\mu\right]$$

Bevor wir weiter gehen, wollen wir Einiges über die zulässigen Werte von α erörtern. Die Reihen Q_1 und Q_2 gehen im allgemeinen bis ins Unendliche fort. Man kann zwar jede derselben bei einem beliebigen Gliede abbrechen; indessen soll α dazu einen complexen Wert bekommen, und bei weiterer Durchführung dieses Wertes und Trennung der reellen und imaginären Teile der Lösung ergibt sich, dass die so erhaltenen Functionen nicht mehr der Forderung für die Oberfläche des Strahles genügen. Rein imaginäre Werte von α sind indessen nicht ganz auszuschliessen; untersucht man nämlich, ob Lösungen von der Form

$$u = Q(e^{\alpha\mu} + e^{-\alpha\mu})$$

möglich sind, so findet man zur Bestimmung von Q die Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{d^2Q}{dq^2} + \frac{1+q^2}{q}\frac{dQ}{dq} + \alpha^2 \frac{1-q^2}{q^2} Q = 0$$

Es wird weiter für v gefunden

$$v = \frac{1}{\alpha} q e^{\frac{1}{2}q^2} \frac{dQ}{dq} (e^{\alpha\mu} - e^{-\alpha\mu})$$

und dies v verschwindet für $\mu = 0$; es wird hierdurch also eine Bewegung desselben Typus gefunden. Untersucht man dieselbe weiter, so findet man diesen hauptsächlichen Unterschied mit der oben bei reellem α betrachteten Bewegung, dass bei dieser, für keinen Wert von μ, x oder y unendlich werden können, während dasselbe bei der zuletzt beschriebenen sehr gut möglich ist. Wir wollen aber den Fall eines rein imaginären α nicht weiter untersuchen, und kehren zu den Reihen Q_1 und Q_2 zurück. Für ganze positive oder negative Werte von α wird die Lösung (48) unbrauchbar, weil sodann die einzelnen Glieder der einen dieser Reihen unendlich werden. α ist somit auf gebrochene oder irrationale positive oder negative Werte beschränkt. Nur eine Ausnahme scheint der Wert $\alpha = 1$ zu machen; die Reihen Q_1 und Q_2 nehmen dabei die einfachen Werte an:

$$Q_1 = \frac{2}{q}\left(1 - e^{-\frac{q^2}{2}}\right), \quad Q_2 = \frac{1}{2q}\left(3 - e^{-\frac{q^2}{2}}\right)$$

Man wird jedoch finden, dass die hierher gehörigen Bewegungen keine Strahlen im eigentlichen Sinne bilden.

Kehren wir jetzt zur näheren Betrachtung der Gleichungen (50) zurück. Setzen wir dabei der Einfachheit wegen:

$$\frac{1}{2\alpha} e^{\frac{1}{2\alpha^2}} (A_1 A_2' - A_2 A_1') = C$$

Die Schnittpunkte des Strahles mit der Geraden $y = h$ zu bestimmen, braucht man die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{\alpha+1} \operatorname{Sin}(\alpha+1)\mu - \frac{1}{\alpha-1} \operatorname{Sin}(\alpha-1)\mu = \frac{h}{C}$$

Dieselben sind die Werte von μ, welche zu den Schnittpunkten gehören von zwei Curven mit den Gleichungen:

$$y = \frac{h}{C} + \frac{1}{\alpha+1} \operatorname{Sin}(\alpha+1)\mu, \quad y = \frac{1}{\alpha-1} \operatorname{Sin}(\alpha-1)\mu$$

Digitized by Google

wenn dabei μ als Abscisse betrachtet wird. Es gibt im allgemeinen eine unendliche Zahl solcher Schnittpunkte, doch gehört zu diesen nicht stets auch eine unendliche Zahl verschiedener Werte von x. Dies hängt damit zusammen, ob α gebrochen oder irrationell ist.

Weil x und y für keinen Wert von μ unendlich werden können, kann der Strahl nicht ins Unendliche fortgehen; derselbe soll also entweder in sich selbst oder in das Gefäss zurückkehren. Die hierdurch mathematisch beschriebenen Bewegungen könnte man also gewissermaassen eine Art Springbrunnen nennen.

Wir legen speciell α den Wert $\frac{1}{2}$ bei. Der Wert der Constante C beeinflusst nur insofern die Gestalt des Strahles, als die Dimensionen desselben in demselben Maasse vergrössert erscheinen, in dem C wächst. Der Einfachheit halber wollen wir $C = 1$ setzen. Die Gleichungen (49) gehen dadurch über in:

$$x = {}^2/_3 \operatorname{Cos} {}^3/_2 \mu - 2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu, \quad y = {}^2/_3 \operatorname{Sin} {}^3/_2 \mu - 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\mu = -{}^8/_3 \operatorname{Sin}^3 \tfrac{1}{2}\mu$$

Die Gleichung der festen Wand wird aus (45) gefunden und ist

$$\frac{1}{\alpha}(A_2 Q_1 - A_1 Q_2) \operatorname{Sin} \alpha\mu = \text{Constant}$$

Indem wir specialisiren, geht dieselbe über in

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\mu = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = 2n\pi$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Ziehen wir nur solche Werte von μ in Betracht, welche zwischen 0 und 2π liegen; in der Oberfläche des Srahles wird für $\mu = 0$

$$x = -1\tfrac{1}{3}, \quad y = 0$$

für $\mu = 2\pi$ dagegen

$$x = +1\tfrac{1}{3}, \quad y = 0$$

und auch allgemein ist für $\mu = 0$ und $\mu = 2\pi$

$$y = 0$$

x aber willkürlich. Es geht hieraus hervor, dass man die feste Wand der X-achse entlang sich denken kann, an der negativen Seite bis $x = -{}^4/_3$, an der positiven von $x = +{}^4/_3$ an sich erstreckend. Die Strecke zwischen $x = -{}^4/_3$ und $x = +{}^4/_3$ ist die Ausflussöffnung, deren Breite also ${}^8/_3$ beträgt.

Die Gleichung der freien Oberfläche des Strahles wird:

$$y^2 = 3[{}^1/_4(x^2 + y^2) - {}^4/_9]^3$$

Digitized by Google

also eine Curve sechsten Grades. Dieselbe ist in der Figur I. vorgestellt. Man ersieht aus derselben, dass bei diesem Strahle nicht allein keine Contraction, sondern sogar eine Erweiterung eintritt, indem die grösste Breite des Strahles besteht in einer Distanz $= {}^2/_3\sqrt{2}$ gerechnet von der Ausflussöffnung; die Breite daselbst beträgt ${}^8/_3\sqrt{2}$; es ist also der Erweiterungscoefficient $= \sqrt{2}$ zu setzen, wenn überhaupt von einem solchen hier die Rede sein kann. Die grösste Distanz, zu welcher das Gas sich von der Ausflussöffnung entfernt, beträgt nicht mehr als ${}^8/_3$. Die hinzugefügten Pfeile deuten die Richtung des Stromes an der betreffenden Stelle an.

Wir wollen noch einen zweiten Fall näher ins Auge fassen, nämlich den, wobei $\alpha = {}^5/_3$. Die Gleichung der festen Wand wird bei dieser Voraussetzung, wieder specialisirend:

$$\mathrm{Sin}\,{}^5/_3\mu = 0, \quad \text{also} \quad \mu = {}^3/_5 k\pi$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist. Wir wollen dazu die Werte von μ wählen, welche zu $k = 2$ und $k = 3$ gehören; es sind dann zwei feste Wände anwesend, für die $\mu = {}^6/_5\pi$ und ${}^9/_5\pi$ bzhw. Setzt man diese Werte in (49), so findet man für die Coordinaten der Punkte des Gefässes:

$$x = \frac{3}{2\alpha}\,\frac{e^{\frac{1}{2}q^2}}{q}\,\frac{-5(A_2Q_1 - A_1Q_2) + 3q(A_2Q_1' - A_1Q_2')}{8}\,\mathrm{Cos}\,{}^6/_5\pi \ (\text{bzhw. } {}^4/_5\pi)$$

$$y = \frac{3}{2\alpha}\,\frac{e^{\frac{1}{2}q^2}}{q}\,\frac{-5(A_2Q_1 - A_1Q_2) + 3q(A_2Q_2' - A_1Q_2')}{8}\,\mathrm{Sin}\,{}^6/_5\pi \ (\text{bzhw. } {}^4/_5\pi)$$

woraus folgt:

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,{}^6/_5\pi \quad \text{oder} \quad \mathrm{tg}\,{}^4/_5\pi \ \text{bzhw.}$$

sodass das Gefäss von zwei Geraden begrenzt wird, welche beide mit der X-achse oder deren Verlängerung einen Winkel von 36° bilden. Für die Oberfläche des Strahles ist:

$$x = C({}^3/_8\,\mathrm{Cos}\,{}^8/_3\mu + {}^3/_2\,\mathrm{Cos}\,{}^2/_3\mu)$$
$$y = C({}^3/_8\,\mathrm{Sin}\,{}^8/_3\mu - {}^3/_2\,\mathrm{Sin}\,{}^2/_3\mu)$$

wo C die vorher angegebene Bedeutung hat. Setzt man auch in diesen Gleichungen

$$\mu = {}^6/_5\pi \quad \text{und} \quad \mu = {}^9/_5\pi$$

so erhält man:

$$\text{Für } \mu = {}^6/_5\pi \quad x = -C.\,{}^{15}/_8\,\mathrm{Cos}\,36^0, \quad y = -C.\,{}^{15}/_8\,\mathrm{Sin}\,36^0$$
$$\text{,,} \quad \mu = {}^9/_5\pi \quad x = -C.\,{}^{15}/_8\,\mathrm{Cos}\,36^0, \quad y = +C.\,{}^{15}/_8\,\mathrm{Sin}\,36^0$$

Diese beiden Punkte sind in der Figur II. mit A bzhw. B bezeichnet. Es ist zu diesem Zwecke der Einfachheit wegen $C = {}^8/_{15}$ gesetzt.

Wir wählen die feste Begrenzung, wie dort angegeben, durch die Geraden AC, BD. AEB ist die Oberfläche des Strahles, welcher sich nur sehr wenig von der Oeffnung AB entfernt, sodass man nicht von einem Strahle im Sinne des Sprachgebrauchs reden kann.

§ 17. Es giebt noch eine zweite Methode, die in den vorigen Paragraphen betrachteten Bewegungen in eine einfache lösungsfähige Form zu bringen, welche besteht in der Anwendung der im Anfang dieser Abhandlung benutzten Transformation; es geht daraus hervor, dass dieselbe bei manchem Problem der Hydrodynamik mit Vorteil angewandt werden kann. Merkwürdig ist dabei, dass die auf beiden Wegen erhaltenen Gestalten nur wenig von einander verschieden sind, obgleich die Bedeutung der in Betracht kommenden Functionen zum Teil einen wesentlichen Unterschied zeigt.

§ 18. Wir kehren zurück zu dem Standpunkte, wo wir im Anfang des § 14. waren, wo die ursprüngliche Form des Problems der Gasstrahle auseinander gesetzt ist. In dieser Gleichung (34) und der damit verbundenen Nebenbedingung wollen wir die nachfolgende Transformation anwenden. Es sei:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \eta, \quad \varphi = \xi x + \eta y - f \tag{51}$$

Wie vorher erwähnt, muss dadurch $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ in $\frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$ in $-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ in $\frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ übergehen, wenn

$$N = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)^2$$

gesetzt wird. Die Gleichung (34) oder

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = a^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)$$

wird zu der folgenden

$$\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2\xi\eta\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta} + \eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)$$

umgestaltet. In dieser wollen wir endlich noch

Digitized by Google

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -alr$$

sein. Die X-achse wird als ebene Wand betrachtet werden können, wenn für

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Sin θ verschwindet. Es hat sich das Problem also folgendermaassen gestaltet:

Eine Function f zu bestimmen, welche der partiellen Differentialgleichung (53) genügt, und welche der Bedingung genügt, dass für irgend einen constanten Wert von r (ausgenommen $r = 1$) $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ verschwindet. Wenn sodann noch für

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Sin θ null wird, so handelt es sich um einen Ausfluss aus ebener Wand (der X-achse); im entgegengesetzten Falle aber bestimmt man die Gleichung der festen Wand aus (54).

Hat man es mit einer ebenen Wand zu tun z. B. parallel der X-achse, so kann man von der Breite des Strahles in verschiedenen Punkten reden. Dieselbe zu finden, bezeichnen wir durch λ den Wert von r, welcher $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ der Null gleich macht. Setzt man dieselbe in $y =$ Constant $= h$ oder $\frac{\partial f}{\partial \eta} = h$ oder endlich

$$\frac{\partial f}{\partial r} \operatorname{Sin} \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \operatorname{Cos} \theta = ha$$

so ergeben sich ein oder mehrere Werte von θ, welche dazu gehören. Substituirt man sodann diese Werte von θ und $r = \lambda$ in x oder

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ oder } \frac{1}{a}\left(\frac{\partial f}{\partial r} \operatorname{Cos} \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \operatorname{Sin} \theta\right)$$

so findet man die zu $y = h$ gehörigen Werte von x, und es ist ein leichtes daraus die Breite des Strahles in der betreffenden Distanz vom Gefäss zu be[illegible]en. Die Breite der Ausflussöffnung wird auf [illegible]elbe Weise f[illegible] gefunden.

Auf d[illegible]eschriebene Weise kann man einen [illegible]das [illegible]gral der Gleichung (53) herleiten,

Digitized by Google

Die Gleichung der festen Wand

$$\psi(xy) = C$$

welche in allen ihren Punkten der Relation

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

genügen soll, ist also auch der nachfolgenden Bedingung unterworfen

$$\xi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) + \eta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) = 0$$

oder endlich:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta}\right) = 0$$

Eine derartige Function wird durch die Gleichungen (54) bestimmt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = e^{-\frac{1}{2}r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right),\quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = e^{-\frac{1}{2}r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial f}{\partial r}\right) \qquad (54)$$

welche beiden Gleichungen der Differentialgleichung (53) zufolge mit einander im Einklang sind. Die so bestimmte Function ψ einer Constanten gleich gesetzt, stellt eine Oberfläche dar, welche ganz oder teilweise als feste Wand zu betrachten ist.

Dieselbe ist eine Ebene mit der Gleichung:

$$x\,\mathrm{Cos}\,\alpha + y\,\mathrm{Sin}\,\alpha = l$$

falls für alle dieser Gleichung genügenden Punkte:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{Sin}\,\alpha = 0$$

wird, also wenn für alle Werte von r und θ, welche der Relation

$$\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{Cos}(\theta-\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathrm{Sin}(\theta-\alpha) = al$$

genügen, $\mathrm{Cos}(\theta-\alpha)$ verschwindet, d. h.

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

wird. Es muss deshalb auch hier

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -a l r$$

sein. Die X-achse wird als ebene Wand betrachtet werden können, wenn für

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

$\operatorname{Sin}\theta$ verschwindet. Es hat sich das Problem also folgendermaassen gestaltet:

Eine Function f zu bestimmen, welche der partiellen Differentialgleichung (53) genügt, und welche der Bedingung genügt, dass für irgend einen constanten Wert von r (ausgenommen $r = 1$) $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ verschwindet. Wenn sodann noch für

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

$\operatorname{Sin}\theta$ null wird, so handelt es sich um einen Ausfluss aus ebener Wand (der X-achse); im entgegengesetzten Falle aber bestimmt man die Gleichung der festen Wand aus (54).

Hat man es mit einer ebenen Wand zu tun z. B. parallel der X-achse, so kann man von der Breite des Strahles in verschiedenen Punkten reden. Dieselbe zu finden, bezeichnen wir durch λ den Wert von r, welcher $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ der Null gleich macht. Setzt man dieselbe in $y =$ Constant $= h$ oder $\frac{\partial f}{\partial \eta} = h$ oder endlich

$$\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{Sin}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\operatorname{Cos}\theta = ha$$

so ergeben sich ein oder mehrere Werte von θ, welche dazu gehören. Substituirt man sodann diese Werte von θ und $r = \lambda$ in x oder

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ oder } \frac{1}{a}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{Cos}\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\operatorname{Sin}\theta\right)$$

so findet man die zu $y = h$ gehörigen Werte von x, und es ist ein leichtes daraus die Breite des Strahles in der betreffenden Distanz vom Gefäss zu berechnen. Die Breite der Ausflussöffnung wird auf dieselbe Weise für $h = 0$ gefunden.

§ 19. Auf die in § 16. beschriebene Weise kann man einen Ausdruck für das allgemeine Integral der Gleichung (53) herleiten,

Digitized by Google

welches dem in obigem Paragraphen für u gegebenen ganz ähnlich ist. Die Mitteilung desselben sei hier deshalb unterlassen.

Ebenfalls ergibt sich bei der Untersuchung von Lösungen von der Form $R \operatorname{Cos} \alpha\theta$, wo R nur von r abhängt, dass R als die Summe zweier Reihen dargestellt werden kann, nämlich:

$$R_1 = C_1 r^\alpha \Big[1 - r^2 \frac{\alpha^2 - \alpha}{4(\alpha+1)} + r^4 \frac{\alpha^2 - \alpha}{4(\alpha+1)} \frac{\alpha^2 - \alpha - 2}{8(\alpha+2)}$$
$$- r^6 \frac{\alpha^2 - \alpha}{4(\alpha+1)} \frac{\alpha^2 - \alpha - 2}{8(\alpha+2)} \frac{\alpha^2 - \alpha - 4}{12(\alpha+3)} + \ldots \Big]$$

$$R_2 = C_2 r^{-\alpha} \Big[1 + r^2 \frac{\alpha^2 + \alpha}{4(\alpha-1)} + r^4 \frac{\alpha^2 + \alpha}{4(\alpha-1)} \frac{\alpha^2 + \alpha - 2}{8(\alpha-2)}$$
$$+ r^6 \frac{\alpha^2 + \alpha}{4(\alpha-1)} \frac{\alpha^2 + \alpha - 2}{8(\alpha-2)} \frac{\alpha^2 + \alpha - 4}{12(\alpha-3)} + \ldots \Big]$$

welche nur dadurch von den vorher durch Q_1 und Q_2 bezeichneten abweichen, dass diese für alle reellen Werte von α bis ins Unendliche fortgiengen, R_1 und R_2 jedoch bei jedem beliebigen Gliede für einen reellen Wert von α abgebrochen werden können. So wird z. B.

für $\alpha = 2$: $\quad R_1 = C_1 r^2 (1 - {}^1/_6 r^2)$
„ $\alpha = 3$: $\quad R_1 = C_1 r^3 (1 - {}^3/_8 r^2 + {}^3/_{80} r^4 - {}^1/_{960} r^6)$ u. s. w.

Hieraus folgt sodann:

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} = 2C_1(1 - r^2) \quad \text{oder} \quad = C_1 r \left(6 - \frac{15}{2} r^2 + \frac{63}{40} r^4 - \frac{3}{40} r^6 \right)$$

Dieselben verschwinden beide für $r = 1$; es wird dafür also $\frac{r^2}{1 - r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ unbestimmt, und nach der bekannten Methode leitet man her, das dieser Ausdruck in den betrachteten Fällen für $r = 1$ die Werte $2C$, $4{,}575 C_1$ annimmt. An der Oberfläche des Strahles kann deshalb nicht $r = 1$ sein. Der Wert $\alpha = 2$ muss deshalb ganz fortfallen; für $\alpha = 3$ wird man jedoch finden, dass

$$r = \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ der Null gleich macht.

Indem man die Untersuchung fortführt, zeigt sich, dass durch den betreffenden Ausdruck Bewegungen der schon betrachteten Art vorgestellt werden, doch wollen wir nicht näher darauf eingehen

Digitized by Google

§ 20. Es bleibt uns noch übrig, solche Gasstrahlen in Betracht zu ziehen, bei denen das Poissonsche Gesetz zur Geltung kommt. In diesem Falle genügt die Potentialfunction bei stationärer, nur von zwei Coordinaten abhängiger Bewegung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$
$$= (k-1)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\left[C - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{55}$$

welche aus (13) hervorgeht, indem darin die Unabhängigkeit der Bewegung von Z-Coordinaten eingeführt wird.

Es sei nun:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = q\,\mathrm{Cos}\,\mu, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = q\,\mathrm{Sin}\,\mu \tag{56}$$

so wird

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{Cos}\,\mu - q\frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{Sin}\,\mu = \frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{Sin}\,\mu + q\frac{\partial\mu}{\partial x}\mathrm{Cos}\,\mu$$

und

$$q^2\left(\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{Cos}\,\mu + \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{Sin}\,\mu\right) = (k-1)(C - \tfrac{1}{2}q)\left[\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{Cos}\,\mu + \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{Sin}\,\mu\right.$$
$$\left. - q\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\mathrm{Sin}\,\mu - \frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{Cos}\,\mu\right)\right]$$

oder

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{Cos}\,\mu + \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{Sin}\,\mu\right)\left[\frac{k+1}{2}q^2 - (k-1)C\right]$$
$$= -(k-1)q(C - \tfrac{1}{2}q^2)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\mathrm{Sin}\,\mu - \frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{Cos}\,\mu\right)$$

Verwechselt man die abhängigen und die unabhängigen Veränderlichen, und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2C} = a, \quad \frac{k+1}{k-1}\,\frac{1}{2C} = b \tag{57}$$

so wird:

$$\frac{\partial x}{\partial\mu}\mathrm{Cos}\,\mu + \frac{\partial y}{\partial\mu}\mathrm{Sin}\,\mu = q\left(-\frac{\partial x}{\partial q}\mathrm{Sin}\,\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\mathrm{Cos}\,\mu\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial\mu}\mathrm{Sin}\,\mu - \frac{\partial y}{\partial\mu}\mathrm{Cos}\,\mu = \frac{1-aq^2}{1-bq^2}\,q\left(\frac{\partial x}{\partial q}\mathrm{Cos}\,\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\mathrm{Sin}\,\mu\right)$$

Wir setzen weiter:

Digitized by Google

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu = \frac{u}{q}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}\operatorname{Sin}\mu - \frac{\partial y}{\partial \mu}\operatorname{Cos}\mu = \frac{v}{q}(1 - aq^2)^{\frac{a-b}{2a}}$$

woraus folgt:

$$-\frac{\partial x}{\partial q}\operatorname{Sin}\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\operatorname{Cos}\mu = \frac{u}{q^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\operatorname{Cos}\mu + \frac{\partial y}{\partial q}\operatorname{Sin}\mu = \frac{v}{q^2}(1 - aq^2)^{-\frac{a+b}{2a}}(1 - bq^2)$$

und finden durch Auflösung:

(58)

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{1}{q}\left[u\operatorname{Cos}\mu + v(1 - aq^2)^{\frac{a-b}{2a}}\operatorname{Sin}\mu\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{1}{q}\left[u\operatorname{Sin}\mu - v(1 - aq^2)^{\frac{a-b}{2a}}\operatorname{Cos}\mu\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{1}{q^2}\left[-u\operatorname{Sin}\mu + v(1 - aq^2)^{-\frac{a+b}{2a}}(1 - bq^2)\operatorname{Cos}\mu\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{1}{q^2}\left[u\operatorname{Cos}\mu + v(1 - aq^2)^{-\frac{a+b}{2a}}(1 - bq^2)\operatorname{Sin}\mu\right]$$

Indem aus je zwei Gleichungen $\frac{\partial^2 x}{\partial \mu\, \partial q}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial \mu\, \partial q}$ bestimmt, und die zwei für jede dieser Grössen so erhaltenen Resultate einander gleichgesetzt werden, leitet man leicht die nachstehenden Relationen ab:

(59)

$$\frac{\partial u}{\partial q} = (1 - aq^2)^{-\frac{a-b}{2a}}\frac{1 - bq^2}{q}\frac{\partial v}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = -(1 - aq^2)^{\frac{a-b}{2a}}\, q\,\frac{\partial v}{\partial q}$$

Digitized by Google

Zwischen diesen Gleichungen kann leicht u eliminirt werden. Das Eliminationsresultat ist eine die Function v bestimmende Gleichung, welche am einfachsten wird, wenn noch

$$2a - b = \frac{k-3}{2C(k-1)} = -\varepsilon \tag{60}$$

gesetzt wird. Dieselbe lautet sodann:

$$q^2(1-aq^2)\frac{\partial^2 v}{\partial q^2} + q(1+\varepsilon q^2)\frac{\partial v}{\partial q} + (1-bq^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} = 0 \tag{61}$$

Jede der Constanten a, b, ε ist positiv.

Die Gleichung der festen Wand

$$\psi(xy) = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \psi(q\mu) = \text{Const.}$$

wird nach dem vorher angegebenen Verfahren [1]) bestimmt durch die Integration der Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{u}{q}(1-aq^2)^{-\frac{a-b}{2a}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = v \tag{62}$$

welche beiden wieder nach (59) mit einander verträglich sind.

Sobald für irgend einen constanten Wert von μ die Grösse u verschwindet, kann eine feste feste Wand parallel der dadurch bezeichneten Richtung angebracht werden.

Für die freie Oberfläche des Strahles wird wieder die Bedingung gefunden, dass für $q =$ Const. v verschwinden soll.

Die die Bewegung charakterisirende Constante C kann jeden positiven Wert haben; der Wert null, welcher die Gleichung (61) bedeutend vereinfachen würde, ist aber ausgeschlossen, weil sodann gar keine Bewegung stattfände.

§ 21. Indem man, wie vorher schon angewandt, die Operation $\frac{\partial}{\partial \mu}$ durch einen symbolischen Factor m ersetzt, gelangt man zur Gleichung:

$$q^2(1-aq^2)\frac{\partial^2 v}{\partial q^2} + q(1+\varepsilon q^2)\frac{\partial v}{\partial q} + (1-bq^2)m^2 v = 0$$

---

1) § 15. dieser Abhandlung.

Digitized by Google

welche wieder zu den ausführlich von Spitzer [1]) besprochenen Gleichungen gehört. Die allgemeine Lösung ist jedoch so verwickelt, dass dieselbe als symbolischer Ausdruck des allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichung (61) gar keine Anwendung mehr finden kann.

Die Entwickelung in Reihen gibt aber wieder leicht Lösungen von der Form:

$$v = Q \operatorname{Cos} m\mu$$

Die zwei für Q geltenden Reihen sind:

$$Q_1 = q^m \left[1 + q^2 \frac{m\{(m-1)a - \varepsilon\} - bm^2}{2(2+2m)} + q^4 \frac{m\{(m-1)a - \varepsilon\} - bm^2}{2(2+2m)} \frac{(m+2)\{(m+1)a - \varepsilon\} - bm^2}{4(4+2m)} + \dots\right]$$

$$Q_2 = q^{-m} \left[1 + q^2 \frac{m\{(m+1)a + \varepsilon\} - bm^2}{2(2-2m)} + q^4 \frac{m\{(m+1)a + \varepsilon\} - bm^2}{2(2-2m)} \frac{(m-2)\{(m-1)a + \varepsilon\} - bm^2}{4(4-2m)} + \dots\right]$$

Dieselben sind nicht, wie die bei den vorigen Fällen in Anwendung gekommenen Reihen, unbedingt convergent. Das Verhältniss eines Gliedes zum vorigen nähert sich nämlich der Grenze aq^2; so lange also $aq^2 < 1$, werden die Reihen Q_1 und Q_2 convergiren. Man findet so, dass die Ungleichheit:

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < q < +\frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{oder} \quad -\sqrt{2C} < q < +\sqrt{2C}$$

bestehen soll. Dies findet aber § 3. zufolge stets statt; nach derselben ist nämlich:

$$C = \tfrac{1}{2}q^2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\mu_0{}^k} \mu^{k-1}$$

Weil die in dem zweiten Gliede vorkommenden Grössen wesentlich positiv sind, so ist $q^2 < 2C$, was mit obiger Bedingung übereinstimmt. Die Reihen Q_1 und Q_2 sind deshalb bei allen in Betracht kommenden Werten von q convergent.

Aus der Aehnlichkeit der hier und in den Paragraphen 14.—16. entwickelten Formeln schliesst man, dass die beiden an diesem Orte ins Auge gefassten Bewegungen nicht wesentlich verschieden sein können. Die Substituirung des Poissonschen Gesetzes an der Stelle des Boyleschen hat also in den vorliegenden Fällen keinen beträchtlichen Unterschied in's Leben gerufen.

Digitized by Google

§ 22. Versuchte man auch die zweite beim vorigen Problem uns zu Gebote stehende Methode hier durchzuführen, so würde man finden, dass dieselbe dem jetzigen Problem eine wesentlich verwickeltere Gestalt erteilt als die im vorigen § hergeleiteten. Wir wollen deshalb auf die Mitteilung der Transformation verzichten.

Nach Angabe einiger Transformationsmethoden für das Problem der stationären Gasstrahle, wird es vielleicht nicht unnütz sein zum Schlusse zu bemerken, dass darauss hervorgeht, dass zwischen der Behandlung der hieher gehörigen Probleme bei incompressiblen Flüssigkeiten und bei Gasen kein wesentlicher Unterschied besteht. Der alleinige Unterschied liegt in der schliesslich zur Lösung vorgelegten partiellen Differentialgleichung; die Nebenbedingung jedoch und die Bestimmung der bei der Bewegung in Betracht kommenden Grössen finden sich bei beiden Fällen vollkommen gleich. Eine eingehendere Untersuchung der hier vorgeführten partiellen Differentialgleichungen wird also die Anzahl der bekannten Gasbewegungen beträchtlich erweitern.

Amersfoort, 27. Februar 1889.

Digitized by Google

X.

Tangentenconstructionen für Fusspunktcurven.

Von

Eduard Janisch.

Es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, dass die Aufgaben: die Tangente in einem Punkte einer ersten positiven Fusspunktcurve zu construiren und den Berührungspunkt auf einer Tangente einer ersten negativen Fusspunktcurve anzugeben — leicht auf mehrfache Art gelöst werden können. Wir erlauben uns daher im Folgenden eine Zusammenstellung von zur Lösung dieser Aufgaben dienlichen Constructionsmethoden zu geben, und zwar wollen wir zunächst diejenigen (bekannten) anführen, welche zu ihrer Herleitung keinerlei Aufwand an Hilfssätzen etc. verursachen.

I.

In Fig. 1. ist bezeichnet mit C irgend eine Curve einfacher Krümmung, ferner mit F ein Fixpunkt ihrer Ebene und endlich mit P_1 derjenige Punkt ihrer ersten positiven Fusspunktcurve C_2 bezüglich F, welcher der Tangente t in dem beliebig gewählten Punkte P entspricht. — Wir haben nun die Aufgabe die Tangente t_1 in P_1 zu ermitteln. — Um zu einer hiezu dienlichen Construction zu gelangen infoımieren wir uns über die Natur und die Eigenschaften der auf F bezogenen ersten negativen Fusspunktcurve dieser Tangente t_1. — Wir wissen, dass die erste negative Fusspunktcurve einer beliebigen Geraden bezüglich irgend eines Punktes eine Parabel ist, welche diesen Punkt zum Brennpunkt und jene Gerade zur Scheiteltangente hat. Ferner ist leicht einzusehen, dass, falls zwei

Digitized by Google

in derselben Ebene gelegene Curven (speciell eine Gerade und eine Curve) sich berühren, auch deren auf ein und denselben Punkt bezogenen, ersten negativen Fusspunktcurven eine Berührung eingehen und zwar in jenem Punkte, welcher dem gemeinsamen Berührungspunkt der gegebenen Curven (resp. dem Berührungspunkt der gegebenen, tangierenden Geraden) entspricht. Daher in unserem Falle die erste negative Fusspunktcurve der zu findenden t_1 bezüglich F jene Parabel, die diese t_1 zur Scheiteltangente, ferner F zum Brennpunkt hat und endlich die Curve C in P berührt. Letzteres wird klar, wenn man bedenkt, dass die C ja die erste negative Fusspunktcurve der C_1 bezüglich F ist, und da C_1 von der t_1 in P_1 berührt wird, so muss nach dem Vorigen C die bewusste Parabel in dem P_1 entsprechenden Punkte P berühren. Auf Grund dessen und mit Rücksicht auf bekannte Parabeleigenschaften haben wir mithin die folgende, einfache Construction der t_1. Man verlängere FP_1 über P_1 hinaus um sich selbst bis M, fälle sodann durch P_1 zu MP die Senkrechte t_1.

Anm.: Aus dieser Construction können wir sofort durch Umkehrung eine andre gewinnen, die uns in den Stand setzt auf einer beliebigen Tangente einer ersten negativen Fusspunktcurve den Berührungspunkt anzugeben. — Es liegt diese Aufgabe offenbar vor, wenn statt C die C_1 gegeben erscheint und etwa auf t mit Hilfe von F_1 und t_1 der Berührungspunkt P gefunden werden soll, was dem Obigen gemäss auf folgende Art geschehen kann: Man verlängere wieder FP_1 über P_1 hinaus um sich selbst bis M, und fälle von M die Senkrechte auf t_1, welche t in P trifft. — Im folgenden Abschnitte wollen wir für diese Aufgabe aber auch eine directe Lösung geben.

II.

Es sei in Fig. 2. bezeichnet mit C wieder irgend eine einfach gekrümmte Curve und mit F ein gegebener Fixpunkt in ihrer Ebene, ferner mit t_{-1} jene Tangente der ersten negativen Fusspunktcurve C_{-1} der C bezüglich F, welche der in P berührenden Tangente t der C entspricht. — Es handelt sich nun darum, den Berührungspunkt P_{-1} der t_{-1} anzugeben. — Eine hiezu sich eignende Construction fliesst aus der Bemerkung, dass die erste positive, auf F bezogene Fusspunktcurve des Strahlenbüschels S mit dem Mittelpunkte P_{-1}, das ist nämlich der über FP_{-1} als Durchmesser stehende Kreis K, die C in P berührt, was sofort klar wird mit Rücksicht auf den oben angeführten Satz: Wenn zwei Curven (C und K) sich berühren, so gehen auch ihre ersten negativen Fusspunktcurven (C_{-1} und S) eine Berührung ein etc. — Demgemäss haben wir, um P_1 zu er-

Digitized by Google

halten blos den leicht zu ermittelnden Mittelpunkt ω des Kreises K mit F zu verbinden und diese Verbindungslinie mit t_{-1} zum Schnitt zu bringen.

Anm.: Ebenso wie aus der in I. gegebenen Tangentenconstruction eine Berührungspunktconstruction abgeleitet werden konnte, kann aus der hier vorgeführten Berührungspunktconstruction umgekehrt eine Tangentenconstruction gefolgert werden.

Ist nämlich anstatt C die C_{-1} gegeben und soll in den P_{-1} und t_{-1} zugeordnetem Punkte P der C die Tangente t verzeichnet werden, so braucht man nur ω als Halbirungspunkt von FP_{-1} zu bestimmen und in P die Senkrechte t zu ωP errichten.

Wir bemerken endlich noch, dass trotz der unabhängigen Deductionen der vier, bereits vorliegenden Constructionen gleichwohl ein inniger Zusammenhang zwischen denselben stattfindet, so dass es möglich ist aus einer derselben mit Zuhilfenahme höchst einfacher, planimetrischer Sätze die übrigen abzuleiten, was dem freundlichen Leser leicht gelingen wird.

III.

Die nunmehr noch vorzuführenden Constructionsmethoden werden wir durch den vorausgehenden ähnliche Betrachtungen gewinnen, die wir über Curven anstellen wollen, für welche wir die Namen: Tangenten- und Punktspiegelungscurven vorschlagen. Die Identität derselben mit den positiven resp. negativen Fusspunktcurven werden wir in einem der folgenden Abschnitte nachweisen. Zuvördest müssen wir jedoch eine Definition dessen geben, was unter Tangenten- beziehungsweise Punktspiegelungscurve zu verstehen ist.

Tangentenspiegelungscurve einer einfach gekrümmten C bezüglich zweier festen Geraden g_1 und g_2 ihrer Ebene wollen wir jene stetige Folge von Punkten nennen, die zu Stande kommt durch die Schnittpunkte der von den (als spiegelnd vorausgesetzten) Geraden g_1 und g_2 herrührenden Paare von Spiegelbildern sämtlicher Tangenten der C. — Ist demnach t eine Tangente der C, t_1 und t_2 die von g_1 resp. g_2 erzeugten Spiegelbilder derselben, so ist der Schnittpunkt π der t_1 mit der t_2 ein Punkt der Tangentenspiegelungscurve.

Unter Punktspiegelungscurve einer einfach gekrümmten C bezüglich zweier festen Geraden g_1 und g_2 ihrer Ebene wollen wir hingegen die Enveloppe der Verbindungslinien der Paare von Spiegelbildern ihrer sämtlichen Punkte verstehen, wofern wieder die beiden festen Geraden als spiegelnd angesehen werden. Daher ist,

Digitized by Google

wenn P_1 und P_2 die von g_1 resp. g_2 herrührenden Spiegelbilder des Punktes P der C sind, die P_1 und P_2 verbindende Gerade τ Tangente der Punktspiegelungscurve.

Sollen diese beiden Definitionen nicht illusorisch werden, so ist von vornherein ausgeschlossen, das 1. $g_1 \parallel g_2$ und 2. $g_1 \perp g_2$ ist. Im letzteren Falle resultiert nämlich, wie leicht nachzuweisen, als Tangentenspiegelungscurve stets die unendlich ferne Gerade und als Punktspiegelungscurve stets der Schnittpunkt der beiden festen Geraden. — Zu bemerken wäre noch, dass Tangenten- und Punktspiegelungscurven einander so gegenüber stehen, wie positive und negative Fusspunktcurven. Es ist in der Tat, falls C' Tangentenspiegelungscurve der C ist, umgekehrt C Punktspiegelungscurve der C'.

IV.

Da wir zu unseren weiteren Untersuchungen der Kenntnis der Tangentenspiegelungscurve des einfachsten Tangentengebildes, des Strahlenbüschels, und ebenso der Punktspiegelungscurve des einfachsten Punktgebildes, der geradlinigen Punktreihe, bedürfen, so wollen wir in dem Abschnitte diese Angelegenheit erledigen.

Was zunächst die Tangentenspiegelungscurve des Strahlenbüschels betrifft, so ist sofort klar, dass dieselbe im Sinne der neueren Geometrie aufgefasst werden kann als ein Erzeugnis jener beiden, congruenten, einstimmig verlaufenden Strahlenbüschel, welche die von g_1 und g_2 herrührenden Spiegelbilder des gegeben sind. Mithin ist sie ein Kreis und zwar, wenn bezeichnet werden: mit F der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2, mit A_1 und A_2 die Schnittpunkte der durch den Mittelpunkt M des Strahlenbüschels gehenden Normalen zu g_2 resp. g_1 mit g_1 resp. g_2, derjenige Kreis, welcher dem Dreieck A_1A_2F umschrieben ist, denn A_1, A_2 und F sind folgeweise die Schnitte der von g_1 und g_2 erzeugten Spiegelbilder der Strahlen: A_1M, A_2M und FM.

Anm.: Wie man sieht, ist M der Höhenpunkt des Dreiecks A_1A_2F und, da ihm gegenüber keine der drei Seiten dieses Dreiecks eine ausgezeichnete Stellung einnimmt, so drängt sich die Vermutung auf, dass auch dass von A_1A_2 herrührende Spiegelbild eines beliebigen Strahles durch M den Kreis in dem Punkte begegnet, in dem sich die beiden übrigen Spiegelbilder treffen; und das ist auch so, wie sich leicht zeigen lässt. Hieraus folgt aber, dass, falls mit S der dem Strahle s entsprechende Kreispunkt bezeichnet ist, die demselben zugeordnete Simpsonsche Gerade σ zu s parallel ist und von ihr ebenso weit absteht wie von S.

Digitized by Google

Wir wenden uns nunmehr der Untersuchung der Punktspiegelungscurve der Geraden zu.

Wenn man den Weg verfolgt, welcher der obigen Definition gemäss einzuschlagen ist, um einzelne Tangenten dieser Curve zu erhalten, so wird man sogleich bemerken, dass dieselben als Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier congruenter Punktreihen zu Stande kommen, deren Träger, die von g_1 und g_2 erzeugten Spiegelbilder der gegebenen Geraden sind. Sie ist also eine Parabel Bezüglich der Elemente derselben, als da sind Axe, Brennpunkt, Scheiteltangente walten einfache Beziehungen ob, die wir hier anschliessend darlegen möchten.

In Fig. 3. sind g_1 und g_2 die beiden festen, in F sich schneidenden, spiegelnden Geraden und γ ist diejenige Gerade, deren Punktspiegelungsgerade untersucht werden soll. Sie schneidet g_1 in M ung g_2 in N. Ihre von diesen beiden fixen Geraden herrührenden Spiegelbilder heissen γ_1 und γ_2. Deren Schnittpunkt S coincidirt mit den Spiegelbildern A_2 des Punktes A von g_2 und B_1 des Punktes B von g_1. Schliesslich ist noch ersichtlich, dass A_1 und B_2 die von g_1 resp. g_2 herrührenden Spiegelbilder derselben Punkte sind.

Zwei Tangenten der Parabel sind bereits vorhanden, nämlich γ_1 und γ_2, die Träger der dieselbe erzeugenden, congruenten Punktreihen. Die erstere ist dem Punkte A zugeordnet und die letztere dem Punkte B. Man kennt auch die Berührungspunkte derselben: A_1 ist der der γ_1 und B_2 der der γ_2, weil der $A_1(B_2)$ entsprechende Punkt $A_2(B_1)$ der $\gamma_2(\gamma_1)$-Reihe mit dem Schnitte S der Träger zusammenfällt. — Der Figur lässt sich sofort entnehmen, dass

$$A_1 B_1 = A_2 B_2, \quad FS = FA_1 = FB_2$$

ferner

$$\text{Wkl. } (\gamma_1, FS) = \text{Wkl. } (\gamma_2, FS)$$

ist. Es sind also die beiden von S aus an die Parabel gezogenen Tangenten SA_1, SB_2 gleich lang, woraus hervorgeht, dass S auf der Axe derselben liegt, und weil diese auf $A_1 B_2$ senkrecht stehen muss, so ist es in unserem Falle die SF. — Wir bemerken jetzt auch, dass F, wegen

$$FS = FA_1 = FB_2$$

der Brennpunkt ist, und es erübrigt jetzt nur noch bezüglich der Scheiteltangente Einiges zu constatiren. — Wir behaupten, dass dieselbe als Verbindungslinie der Spiegelbilder Φ_1, Φ_2 jenes Punktes Φ der γ sich ergibt, der so gelegen ist, dass ΦF senkrecht auf γ steht. Dies wird offenbar dann bewiesen sein, wenn es gelingt zu zeigen,

Digitized by Google

dass $\Phi_1 \Phi_2$ senkrecht auf SF wird. Das letztere kann etwa auf folgende Weise geschehen: Das Dreieck ABF ist gleichschenklig und hat $F\Phi$ zur Höhe, daher ist

$$A\Phi = B\Phi$$

mithin auch

$$A_2 \Phi_2 (\equiv S\Phi_2) = B_1 \Phi_1 (\equiv S\Phi_1)$$

also ist auch Dreieck $F\Phi_1 \Phi_2$ gleichschenklig. Diese beiden Dreiecke haben aber $\Phi_1 \Phi_2$ zur gemeinsamen Grundlinie, und daher steht SP, als Verbindungslinie ihrer Spitzen, senkrecht zu derselben. W. z. b. w. — Es ergibt sich die Scheiteltangente übrigens auch noch auf einem andern Wege, nämlich als Verbindungslinie der Fusspunkte M' und N', der von M resp. N auf g_2 resp. g_1 gefällten Perpendikel. Der Beweis hiezu ergibt sich mit Rücksicht auf den bekannten Satz, welcher besagt, dass die Höhen eines Dreiecks zugleich die Innenwinkelhalbirenden eines anderen sind, das zu Ecken die Höhenfusspunkte des ersteren hat. (In unserem Falle sind diese beiden Dreiecke MNF und $M'N'\Phi$.)

V.

Wir gehen in dem Abschnitte über zum Nachweis der Identität der Tangentenspiegelungscurven mit den ersten positiven Fusspunktcurven und behaupten: „Die Tangentenspiegelungscurve einer C bezüglich zweier festen Geraden ist identisch mit der ersten positiven Fusspunktcurve einer grösseren mit C indirect ähnlichen Curve C'' bezüglich des Schnittpunktes dieser beiden Geraden. Das von der den spitzen (stumpfen) Neigungswinkel w der festen Geraden, halbirenden herrührende Spiegelbild C' der C'' ist in ähnlicher Lage mit C und zwar ist das Aehnlichkeitscentrum gleichfalls der Schnitt der gegebenen beiden festen Geraden. Es ist dieses Centrum ein äusseres (inneres). Endlich hat man die lineare Vergrösserung gegeben durch $\sec w$."

In Fig. 4. sind bezeichnet mit g_1 und g_2 wieder die beiden festen Geraden und mit F ihr Schnittpunkt, ferner mit w einer ihrer Neigungswinkel und mit h die denselben Halbirende. Des weiteren ist zu ersehen, dass die von g_1, g_2 und h herrührenden Spiegelbilder einer Geraden t, die unter φ gegen g_1, unter ψ gegen g_2 geneigt ist und g_1 in M, g_2 in N, H in h trifft, folgeweise heissen t_1, t_2, (t). t_1 trifft t_2 in P, (t) in P_1 und letzeres t_2 in P_2. — Setzen wir voraus, dass t Tangente einer beliebigen Curve C sei, dann ist P ein Punkt ihrer Tangentenspiegelungslungscurve. Der obigen Behauptung zufolge muss sich nun zeigen lassen, dass das von h herrührende

Spiegelbild t' der durch P gehenden zu FP Senkrechten t'', welche h in Q schneidet, parallel zu t und dass ferner

$$QF : HF = \sec w \quad \text{ist.}$$

Da aus $t' \parallel t$ folgen würde auch $t'' \parallel (t)$, also (t) senkrecht auf PF und umgekehrt aus (t) senkrecht auf $PF \ldots t' \parallel t$, so ist letzteres bewiesen, wenn es das erste ist. Dies gelingt leicht, wenn wir bemerken, dass die in der Figur mit ξ, ξ_1, ξ_2 bezeichneten Winkel paarweise gleich sind, was daraus hervorgeht, dass F Mittelpunkt je eines der den Dreiecken PMN, P_1HM und P_2HN angeschriebenen Kreisen ist. -- Bevor wir aber auf den Beweis eingehen können, müssen wir die absolute Grösse dieser Winkel bestimmen.

Wir bezeichnen mit μ den Winkel PPM und mit ν den Winkel PFN und haben dann für den bei M befindlichen Aussenwinkel φ des Dreiecks

$$PFM : \varphi = \xi + \mu$$

ebenso für den bei N befindlichen Aussenwinkel ψ des Dreiecks

$$PFN : \psi = \xi + \nu$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\varphi + \psi = 2\xi + (\mu + \nu) = 2\xi + w$$

daher, weil

$$\varphi + \psi = \pi - w \quad \text{ist}$$

$$\pi = 2(\xi + w) \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\pi}{2} - w$$

Setzt man an die Stelle von $w \ldots \frac{w}{2}$, so ergibt sich sofort:

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{w}{2}$$

was leicht einzusehen ist, da ja die Punkte P_1, M, H, F und P_2, N, H, F wesentlich dieselbe Configuration bilden, wie die Punkte P, M, N, F.

Aus der Gleichheit der Winkel ξ_1, ξ_2 folgt aber, dass sowohl Dreieck FP_1P_2, wie auch Dreieck PP_1P_2 gleichschenklig ist, und mithin FP senkrecht auf P_1P_2 steht, w. z. b. w. — Interessant ist, dass man hat:

$$\text{Wkl. } PP_1P_2 = \text{Wkl. } PP_2P_1 = \pi - 2\xi_1 = \pi - 2\xi_2 = w.$$

Nunmehr lässt sich sich auch mühelos der zweite Teil des Beweises herstellen. Man findet:

Digitized by Google

$$QF:HF = PF:OF = \frac{OP+OF}{OP_1}:\frac{OF}{OP_1} = \frac{\operatorname{tg} w + \operatorname{tg} \xi_1}{\operatorname{tg} \xi_1} = 1+\frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} \xi_1}$$

$$= 1+\operatorname{tg} w . \operatorname{tg} \frac{w}{2} = 1+\frac{\sin w \sin \frac{w}{2}}{\cos w \cos \frac{w}{2}} = 1+\frac{2\left(\sin \frac{w}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{w}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{w}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos w} = \sec w$$

Somit wäre der am Eingange dieses Abschnittes aufgestellte Satz gerechtfertigt; aber auch der folgende ist es: „Die Punktspiegelungscurve irgend einer C bezüglich zweier festen, sich schneidenden Geraden ist identisch mit der ersten negativen Fusspunktcurve einer kleineren mit C indirect ähnlichen Curve C'' bezüglich des Schnittpunktes dieser beiden Geraden. Das von der den spitzen (stumpfen) Neigungswinkel w jener Geraden halbirenden hervorgerufene Spiegelbild C' der C'' ist in ähnlicher Lage mit C, und zwar ist das Aehnlichkeitscentrum gleichfalls der Schnittpunkt der beiden festen Geraden. Es ist dieses Centrum ein äusseres (inneres). Endlich hat man die lineare Verkleinerung gegeben durch $\cos w$.“ — Es ist dies leicht einzusehen, wenn man sich erinnert, dass die Tangentenspiegelungscurven den Punktspiegelungscurven ebenso gegenüberstehen, wie die ersten positiven den ersten negativen Fusspunktcurven.

VI.

Wir sind nun in den Stand gesetzt, eine Construction der Tangente in einem Punkte einer festen positiven Fusspunktcurve mit Hilfe der mit ihr identischen Tangentenspiegelungscurve herzuleiten.

Zu dem Zwecke diene Fig. 5. In derselben ist mit C eine gegebene, ebene Curve bezeichnet und mit P jener Fixpunkt, bezüglich dessen C_1 die erste positive Fusspunktcurve der C ist, von der aber nur der dem Punkte P der C entsprechende P_1 ersichtlich gemacht wurde. Durch F sind ferner die beiden bekannten fixen Geraden g_1 und g_2 unter einem Winkel $w = 60^0$, jedoch sonst beliebig gezogen, und, da zu dem Spiegelbilde C' der C, welches von der w-Halbirenden herrührt, die der C' ähnliche und in Bezug auf F ähnlich gelegene C'' gemäss V. derart construirt wurde, dass die Entfernungen je zweier entsprechenden Punkte der C'' und C' von F sich verhalten, wie

$$1 : \sec w = 1 : \sec 60^0 = 1 : 2$$

so muss C_1 die Tangentenspiegelungscurve der C'' bezüglich g_1 und g_2 sein.

Digitized by Google

Nun berührt aber die der Tangente t_1 im Punkte P_1 entsprechende Punktspiegelungsparabel die C'' in dem P entsprechdem Punkte P'', denn die P_1 und seinem Nachbar (P'_1) zugeordneten Tangenten dieser Parabel sind t'' und (t''), wo (t'') die t'' unmittelbar benachbar Tangente der C'' bedeutet und folglich t'' in P'' trifft; daher kann, mit Rücksicht darauf, dass F Brennpunkt ist, die Scheiteltangente leicht bestimmt werden. Hat man diese, dann braucht man, um t_1 zu finden, nur mehr im Schnittpunkt derselben mit einer der fixen Geraden (etwa g_1) auf diese Gerade eine Senkrechte zu errichten und deren Schnitt mit der anderen (g_2) mit P_1 zu verbinden. (Siehe IV, Schlussbemerkung.)

Anm: Ist nicht C, sondern C_1 gegeben, und handelt es sich darum mit Hilfe der Kenntniss von P_1 und t_1 auf t den Berührungspunkt P anzugeben, so kann dies dadurch geschehen, dass man, rückwärts schreitend, vorerst t'' bestimmt, dann die Scheiteltangente der von t_1 erzeugten Punktspiegelungsparabel, welche t'' zur Tangente hat und zwar in dem der C'' angehörigen Punkte P'', der sehr leicht zu finden ist Aus ihm leitet man hernach P' und endlich P ab. — Dies wäre ein Weg, um mit Hilfe der Punktspiegelungscurve einer gegebenen Curve (C'' der C) die Berührungspunkte einzelner Tangenten der ersten negativen Fusspunktcurve derselben zu ermitteln. Im nächsten Abschnitte werden wir uns mit der Deduction eines zweiten beschäftigen.

VII.

In Fig. 6. sei wieder C eine beliebige ebene Curve und t_{-1} die dem Punkte P derselben, dem Berührungspunkt der t, entsprechende Tangente ihrer ersten negativen Fusspunktcurve C_{-1} bezüglich F. — Nach dem Schlusssatze in Abschnitt V. ist diese identisch mit der Punktspiegelungscurve der C' in Bezug auf die durch F gehenden unter 60° geneigten Geraden g_1 und g_2, da das Spiegelbild C'' der C', welches von der diesen Winkel von 60° Halbirenden herrührt in entsprechender perspectivischer Lage mit C sich befindet, und jede Sehne derselben doppelt so gross ist, als die homologe der C.

Betrachten wir P_{-1}, den zu ermittelnden Berührungspunkt der t_{-1}, als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, und denken wir uns seinen Tangentenspiegelungskreis bezüglich g_1 und g_2 construirt, so können wir behaupten, dass derselbe die t' in P' berührt, denn da die beiden von g_1 und g_2 herrührenden Spiegelbilder der t_{-1} sich in P' schneiden und die der t_{-1} unmittelbar benachbarten Tangente an

Digitized by Google

C_{-1}, welche zugleich Nachbarstrahl des Strahles t_{-1} ist, in dem auf t' gelegenen Nachbarpunkt von P' einander treffen, so ist t' gemeinsame Tangente in dem gemeinsamen Punkte P' des Kreises und der C'.

Dieser Kreis kann unter Berücksichtigung dessen, dass F ihm angehört, construirt werden, und wenn man von seinem zweiten Schnittpunkt mit einer der festen Geraden (etwa g_1) eine Senkrechte auf die andere fällt, so ergibt sich P_{-1} als Schnitt derselben mit t_{-1}. (Nach Abschnitt IV.)

Anm.: Auch diese Construction gestattet eine Umkehrung, und wir gewinnen so noch eine zur Ermittlung der Tangente in einem Punkte einer ersten positiven Fusspunktcurve mit Hilfe der mit ihr identischen Tangentenspiegelungscurve. — Wenn t_{-1} und P_{-1} gegeben sind, und die Tangente t in P angegeben werden soll, so kann dies durch Ermittlung von t' in P' und t'' in P'' geschehen, wie es der Figur zu entnehmen ist. Um t' zu erhalten, verzeichne man jenen Kreis, welcher durch F, P' und den Fusspunkt einer durch P_{-1} gefällten Senkrechten zu g_1 (oder g_2) mit g_2 (oder g_1) geht, und ziehe in P' die Tangente t' an denselben.

Zum Schlusse sei es uns gestattet darauf hinzuweisen, dass die in Abschnitt I. und II. gegebenen Constructionen Analoga in Bezug auf Flächen haben. Wir glauben es jedoch dem freundlichen Leser überlassen zu dürfen, den Nachweis hiefür zu liefern und begnügen uns mit der Andeutung, dass zu den entsprechenden Deductionen einerseits das Rotationsparaboloid und andrerseits die Kugel herangezogen wird.

Wien, am 2. October 1888.

Digitized by Google

XI.

Miscellen.

1.

Die Entwicklung der Exponentiellen in eine unendliche Factorenfolge.

Werden die Logarithmen der Ausdrücke, welche aus

$$\left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}}$$

dadurch entstehen, dass für c_m die Combinationen ohne Wiederholung aller Classen der Primzahlen von $p_3 = 3$ angefangen gesetzt, sodann in unendliche für $x \begin{smallmatrix} < +1 \\ > -1 \end{smallmatrix}$ convergirende Reihen entwickelt, summirt und gleichnamige Potenzen zusammengezogen, so bleibt von allen Reihengliedern nur das erste Glied der ersten Reihe stehen; denn es ist:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{15}}{15} + \ldots$$

$$\log\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{1}{2.3}} = \,.\, - \frac{x^3}{3} \quad . \quad . - \frac{x^9}{9} \quad . \quad . - \frac{x^{15}}{15} - \ldots$$

$$\log\left(\frac{1+x^5}{1-x^5}\right)^{-\frac{1}{2.5}} = \,. \quad . - \frac{x^5}{5} \qquad\qquad - \frac{x^{15}}{15} - \ldots$$

Digitized by Google

$$\log\left(\frac{1+x^7}{1-x^7}\right)^{-\frac{1}{2.7}} = \ldots \quad -\frac{x^7}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\log\left(\frac{1+x^{11}}{1-x^{11}}\right)^{-\frac{1}{2.11}} = \ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{x^{11}}{11} \ldots\ldots\ldots$$

$$\log\left(\frac{1+x^{13}}{1-x^{13}}\right)^{-\frac{1}{2.13}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{x^{13}}{13} \ldots\ldots$$

. . . .

$$\log\left(\frac{1+x^{3.5}}{1-x^{3.5}}\right)^{+\frac{2.3.5}{1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{15}}{15} + \ldots$$

$$\log \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{3}^{\infty} \left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} = x$$

oder

$$e^x = \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{3}^{\infty} \left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} \qquad 1]$$

$$x \lessgtr \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix} \quad c_0 = 1$$

Für x eine beliebige Potenz x^n gesetzt, giebt 1] sofort eine Factorenfolge für e^{x^n}.

Dass alle höheren Potenzen von x sich gegenseitig aufheben, folgt aus der Bemerkung, dass irgend ein Glied $\frac{x^{c_r}}{c_r}$ in allen jenen Reihen für $\log\left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}}$ vorkommt, in welchen der Exponent c_m ein Teiler von c_r ist, und zwar $(-1)^m\binom{r}{m}$ mal, ($m = 0$, $1, 2 \ldots r$), daher im Ganzen $1-\binom{r}{1}+\binom{r}{2}-+ \ldots\ldots\ldots + (-1)^r\binom{r}{r} = 0$ mal.

Die Convergenz der Factorenfolge für e^x folgt daraus, dass der natürliche Logarithmus eine Reihe ist, welche auch durch die Mul-

Digitized by Google

tiplication und Summirung je zweier übereinander stehenden Glieder der beiden Reihen

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2.3}, \quad -\frac{1}{2.5} \quad \ldots + \frac{1}{2.3.5}, \quad \ldots$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \log\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right), \quad \log\left(\frac{1+x^5}{1-x^5}\right) \ldots \log\left(\frac{1+x^{3.5}}{1-x^{3.5}}\right), \quad \ldots$$

entsteht. Die erste Reihe ist aber $= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})\ldots = 0$, während die Glieder der zweiten Reihe fortwährend abnehmen, wenn an der Voraussetzung $x \begin{smallmatrix} < +1 \\ > -1 \end{smallmatrix}$ festgehalten wird.

Die Exponentielle mit echt gebrochenem Exponenten stellt sich somit als eine unendliche convergente Factorenfolge von Potenzen algebraischer Functionen dar.

Das zweite Productzeichen Π hat die Grenzen 0 und ∞ und ist so zu verstehen, dass für sämtliche Primzahlen von $p_3 = 3$ angefangen diese Functionen zu bilden sind. Es ist aber offenbar auch gestattet als obere Grenze eine sehr grosse Primzahl p_{n+2} zu nehmen und dann zu schreiben

$$e^x = \lim \prod_{m=0}^{n} \prod_{3}^{p_{n+2}} \left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} \qquad 2]$$

Für $x = \frac{1}{2}$ wird

$$e = \lim \prod_{m=0}^{n} \prod_{3}^{p_{n+2}} \left(\frac{2^{c_m}+1}{2^{c_m}-1}\right)^{\frac{(-1)^m}{c_m}} \qquad 3]$$

oder

$$e = 3 \sqrt[3]{\frac{7}{9}} \cdot \sqrt[5]{\frac{31}{33}} \cdot \sqrt[7]{\frac{127}{129}} \cdot \sqrt[11]{\frac{2047}{2049}} \cdot \sqrt[13]{\frac{8191}{8193}} \sqrt[15]{\frac{32769}{32767}} \quad \ldots$$

wo der 7te Factor erst auf die 6te Decimalstelle Einfluss hat.

Für $x = 0{\cdot}1$ ist, da

$$\frac{1+x^n}{1-x^n} = 1 + 2x^n + 2x^{2n} + \ldots = 1 + \frac{2}{10^n} + \frac{2}{10^{4n}} + \ldots = 1{\cdot}0^{n-1}2$$

gleich einem periodischen Decimalbruch mit $n$stelliger Periode ist,

$$e^{\frac{1}{5}} = \lim \prod_{m=0}^{n} \prod_{3}^{p_{n+2}} \left(1\cdot 0^{c_m-1} 2\right)^{\frac{(-1)^m}{c_m}} \qquad 4]$$

oder

$$\left[\frac{(1\cdot 2)\,.\,(1\cdot 0^{14}\,2)^{\frac{1}{15}}\,\dots}{(1\cdot 0^{2}\,2)^{\frac{1}{3}}\,.\,(1\cdot 0^{4}\,2)^{\frac{1}{5}}\,\dots}\right]^{5}$$

Ein beliebiger Factor in 1] ist

$$\left(\frac{1+x^{c_m}}{1-x^{c_m}}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} \left[\frac{\sum\limits_{r=0}^{c_m-1}(-1)^r x^r}{\sum\limits_{r=0}^{c_m-1} x^r}\right]^{\frac{(-1)^m}{2c_m}}$$

Werden nach erfolgter Einsetzung in 1] die sämtlichen Potenzen von $\frac{1+x}{1-x}$ vereinigt, so erhält dieser Bruch den Exponenten

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2c_m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5} - \dots + \frac{1}{2.3.5} + \dots - \dots =$$

$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})\dots = \tfrac{1}{2}\prod_{3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = 0$$

daher gilt auch

$$e^{x} = \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{3}^{\infty} \left[\frac{\sum\limits_{r=0}^{c_m-1}(-1)^r x^r}{\sum\limits_{r=0}^{c_m-1} x^r}\right]^{\frac{(-1)^m}{2c_m}}, \qquad 5]$$

und weil

$$\frac{\sum\limits_{r=0}^{c_m-1}(-1)^r x^r}{\sum\limits_{r=0}^{c_m-1} x^r} = 1 - 2x + 2x^3 - + \dots + 2x^{c_m-1} - 2x^{c_m+1} + - \dots$$

ist, so folgt:

$$e^{x} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{3}^{\infty} \left(1 - 2x + 2x^2 - \dots + 2x^{c_m-1} - 2x^{c_m+1} + - \dots\right)^{\frac{(-1)^m}{2c_m}} \qquad 6]$$

statt der unendlich grossen oberen Grenzen, kann wieder n, resp. p_{n+2} genommen und dann zur Grenze übergegangen werden.

Digitized by Google

Für $x = 0 \cdot 1$ ist obige Reihe

$$= 1 - 0 \cdot 2 + 0 \cdot 02 - \ldots + 0.\overset{c_m-2}{\cdots}2 - 0.\overset{c_m-2}{\cdots}2 + \ldots$$

folglich, wenn beiderseits quadrirt wird:

$$e^{\frac{1}{5}} = \lim (0 \cdot 819)^{-\frac{1}{3}} \,.\, (0 \cdot 81819)^{-\frac{1}{5}} \,.\, (0 \cdot 8181819)^{-\frac{1}{7}} \,.\, k^{\varepsilon}$$

Wenn eine Genauigkeit von 6 Stellen beansprucht wird, können sämtliche späteren Factoren k näherungsweise $= \frac{0.9}{1.1} = 0 \cdot 81$ angenommen werden. Nun ist die Summe aller Exponenten

$$= \prod_{3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$$

daher

$$-1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \varepsilon = 0$$

folglich

$$\varepsilon = \frac{34}{105}$$

Das Resultat hat die gewünschte Genauigkeit.

Franz Rogel.

2.

Zahlentheoretische Eigentümlichkeiten gewisser Reihen.

Wenn die Function $f(x)$ sich nach dem Maclaurin'schen Satze in eine convergente Reihe verwandeln lässt:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + R_n + \ldots$$

so entsteht hieraus eine neue Reihe, wenn beiderseits mit x multiplicirt und differentiirt wird.

Dieselbe ist jedoch auf ihre Convergenz zu prüfen; es wird jedenfalls $\frac{\partial}{\partial x}(x R_n)$ bei unendlichem n verschwinden müssen; es ist dann:

$$\frac{\partial}{\partial x}[x f(x)] = f(0) + \frac{2x}{1!} f'(0) + \frac{3x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} f^{(n-1)}(0) + \ldots$$

Digitized by Google

Wenn die in dem Coefficienten

$$\frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{\frac{(n-1)!}{n}}$$

des allgemeinen Gliedes angezeigte Division wirklich ausgeführt wird, so ist nach dem Wilson'schen Satze: $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, sobald n eine Primzahl ist. Genannter Coefficient erscheint somit in diesem Falle unter der Form

$$\frac{p}{(p-1)!} = \frac{1}{m - \frac{1}{p}}$$

in dem Falle, als n eine zusammengesetzte Zahl ist, jedoch unter

$$\frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{m - \frac{\varepsilon}{n}}$$

wo $\varepsilon > n$ eine von 1 verschiedene Zahl ist.

Es ist nun

$$f(x) + x f'(x) = f(0) + \frac{x}{1-\frac{1}{2}} f'(0) + \frac{x^2}{1-\frac{1}{3}} f''(0) + \frac{x^3}{2-\frac{2}{4}} f'''(0) + \frac{x^4}{5-\frac{1}{5}} f^{(IV)}(0) + \ldots$$

Specielle, bemerkenswerte Fälle wären:

1) $f(x) = e^x$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^x) = e^x(1+x) = 1 + \frac{x}{1-\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{1-\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{2-\frac{2}{4}} + \frac{x^4}{5-\frac{1}{5}} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{103-\frac{1}{7}} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{4480} + \frac{x^9}{36\,288} + \frac{x^{10}}{329\,891-\frac{1}{11}} + \ldots$$

2) $f(x) = \cos x$

$$\cos x - x \sin x = 1 - \frac{x^2}{1-\frac{1}{3}} + \frac{x^4}{5-\frac{1}{5}} - \frac{x^6}{103-\frac{1}{7}} + \frac{x^8}{4480} - \frac{x^{10}}{329\,891-\frac{1}{11}} + - \ldots$$

3) $f(x) = \frac{1}{2} x \cot \frac{x}{2}$

$$x \cot\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\,\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 - \frac{B_1\,x^2}{1-\frac{1}{3}} - \frac{B_3\,x^4}{5-\frac{1}{5}} - \frac{B_5\,x^6}{103-\frac{1}{7}} - \frac{B_7\,x^8}{4480}$$

$$- \frac{B_9\,x^{10}}{329\,891-\frac{1}{11}} - - \ldots$$

Brünn. Franz Rogel.

3.

Elementare Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Parabel.

Als bekannt wird vorausgesetzt, dass man den Krümmungsmittelpunkt als den Schnittpunkt zweier unendlich nahen Normalen und den Berührungspunkt einer Tangente als den Schnittpunkt derselben mit der unendlich nahen Tangente betrachten kann.

Die Parabel, für deren Punkt P der Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden soll, ist Fig. 1. durch die Achse X, die Tangente T und den Berührungspunkt P derselben gegeben.

Die Normale N in P schneidet die Achse in R und ist Q der Fusspunkt des von P auf die Achse gefällten Perpendikels, so ist QR als Subnormale der Parabel gleich p, der Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie. Um die unendlich nahe Normale zu N zu finden, müsste man zu P einen unendlich nahen Punkt P'' auf der Parabel annehmen, dieser liegt aber zugleich in der Tangente T. Von diesem müsste man eine Senkrechte auf die Achse fällen und von ihrem Fusspunkte Q' nach rechts p auftragen und den dadurch erhaltenen Punkt R' mit P' verbinden. Führt man die eben besprochene Construction für alle Punkte von T durch, so erhält man unendlich viele Geraden, von denen gezeigt werden soll, dass sie eine Parabel einhüllen, deren Scheiteltangente die Achse und deren Scheitel S ist, wenn man $AS = p$ macht. Errichtet man in S eine Senkrechte auf die Achse, und schneidet diese das in R auf die Normale errichtete Perpendikel in F, so ist F der Brennpunkt dieser Parabel, was man bewiesen haben wird, wenn man zeigt, dass FR' senkrecht auf $P'R'$ ist; denn bewegt sich ein rechter Winkel so, dass der Scheitel beständig auf einer Geraden bleibt, und ein Schenkel durch einen festen Punkt geht, so hüllt der zweite Schenkel eine Parabel ein.

Bezeichnet man den Winkel TAX mit α und jenen $P'R'Q'$ mit β, so ist im $\triangle\,P'Q'R'$

Digitized by Google

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P'Q'}{p}$$

und im $\triangle\, AP'Q'$

$$P'Q' = AQ' \,.\, \operatorname{tg}\alpha$$

Nun ist $AQ' = AS + SQ' = Q'R' + SQ' = SR'$

und

$$P'Q' = SR' \,.\, \operatorname{tg}\alpha$$

daher

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{SR' \,.\, \operatorname{tg}\alpha}{p} \qquad 1)$$

Bezeichnet man den Winkel $SR'F$ mit j, so ist

$$\cot j = \frac{SR'}{SF}$$

Ferner ist $\triangle\, APQ \cong FSR$, denn es ist $AQ = p + SQ = SR$ und $FR \parallel T$, daher

$$SF = PQ = p \cot\alpha = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}$$

und

$$\cot j = \frac{SR' \operatorname{tg}\alpha}{p}$$

daher mittelst 1) β und j Complementswinkel und FR' senkrecht auf $P'R'$.

Die zwei unendlich nahen Normalen der ursprünglichen Parabel sind demnach zwei unendlich nahe Tangenten der eben bewiesenen Parabel und ihr Schnittpunkt d. h. der Berührungspunkt von N der Krümmungsmittelpunkt. Um letzteren zu finden verlängere man FR um sich selbst über R, wodurch man den Gegenpunkt G erhält. Fällt man von G eine Senkrechte auf die Achse, so schneidet diese N im Krümmungsmittelpunkte M.

Anmerkung. In Fig. 1. lässt es sich leicht zeigen, dass FM senkrecht auf PF, woraus sich die bekannte Construction des Krümmungsmittelpunktes der Parabel mittelst der Winkelbrettchen allein ohne Benutzung des Zirkels ergibt.

Nun lässt sich auch die bekannte Formel für den Krümmungshalbmesser $\varrho = \sqrt{\frac{(p+2x)^{-3}}{p}}$ aufstellen, worin x die Abscisse von P in Bezug auf den Parabelscheitel als Anfangspunkt und die Achse als Abscissenachse ist.

Digitized by Google

Es ist dann $PQ = y$, AQ als Subtangente der Parabel gleich $2x$, und weil $\triangle RBG \cong FSR$ auch $RB = 2x$. Ferner ist

$$\varrho = PR + RM$$

$$PR = \sqrt{y^2 + p^2} = \sqrt{2px + p^2} = \sqrt{p(p + 2x)}$$

Endlich sind die Dreiecke RBM und PQR ähnlich, daher

$$RM : \sqrt{p(p + 2x)} = 2x : p$$

$$RM = \frac{2x}{p} \sqrt{p(p + 2x)}$$

und

$$\varrho = \left(1 + \frac{2x}{p}\right) \sqrt{p(p + 2x)}$$

woraus sich

$$\varrho = \sqrt{\frac{(p + 2x)^3}{p}}$$

ergibt.

Pilsen. Wilhelm Rulf.

4.

Verwandlung einer Kreisfläche in ein annähernd gleich grosses Quadrat.

Es sei in der Figur ab der Durchmesser des gegebenen Kreises. Radius cd senkr. zu ab, $ce = \frac{1}{2} cd$ und $ef = \frac{1}{2} ed$, $hi \parallel cd$, $ck = \frac{1}{2} ch$ und $kz = dy$. Nun ist az die Seite des verlangten Quadrats.

Beweis:

Zieht man die Hülfslinie $ly \parallel cd$, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ace und aly, ferner, da lb zu ly sich verhält wie $ly : al$, und da der Bedingung zufolge $ce = \frac{1}{2} cd$ ist, dass $lb = \frac{1}{2} ly = \frac{1}{4} al = \frac{1}{5} ab$ und cl somit $= {}^3/_{10}\, ab$ sein muss. Ebenso lässt sich beweisen, dass $ch = {}^7/_{50}\, ab$, und, da der Bedingung zufolge $ck = \frac{1}{2} ch$ sein soll, $ck = {}^7/_{100}\, ab$ ist, woraus wieder folgt, dass $ak = {}^{57}/_{100}\, ab$ ist.

Da aber, wie schon vorhin bewiesen, $lb = \frac{1}{5} ab$, al somit $= \frac{4}{5} ab$ und $ly = \frac{1}{2} al$ ist, so ist $ly = \frac{2}{5} ab$.

$$dy = \sqrt{cl^2 + [cd - ly]^2} = \sqrt{{}^3/_{10}{}^2 + {}^1/_{10}{}^2} \cdot ab = \sqrt{{}^1/_{10}}\, ab$$

da nach dem Vorhergehenden $cl = {}^3/_{10}\, ab$ und $ly = {}^2/_5\, ab$ ist.

Digitized by Google

Nun soll der Bedingung zufolge $az = ak + dy$ sein, az ist somit $= [{}^{57}/_{100} + \sqrt{{}^{1}/_{10}}] \,.\, ab = 0{\cdot}8862279\, ab$.

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $= ab$ ist $= \frac{3{\cdot}141\,5927}{4} . ab^2 = 0{\cdot}785\,3982 . ab^2$, und der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seiten $= 0{\cdot}886\,2279 . ab$ sind, $= 0{\cdot}886\,2279^2 . ab^2 = 0{\cdot}785\,3994\, ab^2$. Das Quadrat ist somit nur um 12 auf 785 3982 oder um 1 auf 654498 zu gross.

Ernst Lakenmacher.

5.

Trigonometrische Formeln zur annähernden Bestimmung der Sinuswerte.

Setzt man

$$a = \begin{cases} \dfrac{90}{30-\varphi} - 2 & \text{für die Winkel } 0 \text{ bis } 15^0 \\[2ex] \dfrac{90}{\varphi} - 2 & \text{,, \quad ,, \quad ,, } 15 \text{ ,, } 30^0 \\[2ex] \dfrac{180}{\varphi} - 2 & \text{,, \quad ,, \quad ,, } 30 \text{ ,, } 45^0 \end{cases}$$

setzt man dann ferner allgemein

$$b = \sqrt{2^a - a} + a$$

so ist

$$\sin\varphi = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4} - \dfrac{1}{8b}} - \sqrt{\dfrac{3}{8b}} & \text{für } 0 \text{ bis } 15^0 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{1}{2b}} & \text{,, \quad } 15 \text{ ,, } 30^0 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{b} - \dfrac{1}{b^2}} & \text{,, \quad } 30 \text{ ,, } 45^0 \end{cases}$$

Diese Formeln geben streng richtige Werte für die Winkel 7½, 12, 15, 18, 22½, 30, 36 und 45⁰ und finden ihre Erklärung darin, dass es mir gelungen ist, dies Verfahren, die Sinuswerte dieser Winkel zu berechnen, in eine einheitliche abgeschlossene Formel, wie solche oben für die Winkel 15 bis 30⁰ angegeben ist, zu bringen.

Digitized by Google

Da die Lücken zwischen 15, 18, 22½ und 30° keine grossen sind, so ist vorauszusetzen, dass auch für alle übrigen Winkel zwischen 15 und 30° annähernd richtige Resultate nach dieser Formel erhalten werden. In der Tat erreichen die Differenzen in den seltensten Fällen 3 Einheiten der vierten Decimale, die grösste ist nahe bei $\varphi = 4^0$. Die für die Winkel unter 15° und über 30° geltenden Formeln sind aus dieser Formel auf Grund der bekannten trigonometrischen Lehrsätze, nach welchen aus den Functionen zweier Winkel die Function für deren Differenz und aus der Function eines Winkel die des doppelt so grossen Winkels gefunden wird, abgeleitet.

Der Sinus für den Winkel von 15° lässt sich sowol nach der für die Winkel von 0 bis 15° als auch nach der für die Winkel von 16 — 30° geltenden Formel berechnen, ebenso lassen sich die Sinuswerte für die Winkel von 30 und 45° sowol nach der für 16 bis 30, als auch nach der für 31 bis 45° gültigen Formel berechnen.

Ernst Lakenmacher.

6.

Ueber den Schnitt einer Hyperbel mit einer Geraden

Im Teil VIII. pag. 315 dieses Journals habe ich eine Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Hyperbel angegeben, welche darauf beruht, dass die Hyperbel durch eine ihr affin verwandte die denselben Scheitelkreis (Kreis über der reellen Axe als Durchmesser) besitzt ersetzt wird, die Gerade aber durch eine den letzteren berührende. Da sich die Schnittpunkte einer solchen Geraden mit der Hyperbel, wie an citirter Stelle gezeigt, sehr einfach ergeben, erledigt sich auch der allgemeine Fall damit leicht.

Eine weitere noch einfachere Lösung dieser Aufgabe, wobei dieselbe gleichfalls auf den eben erörterten speciellen Fall zurückgeführt wird, ergibt sich bei Benutzung eines von Chasles (siehe Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohnke, Halle 1839. Note IV. pag. 288) zuerst und ohne Beweis mitgeteilten Satzes, für welchen Prof. Belz in seiner Abhandlung: „Ueber die Focalcurven des Quetelet“ (Sitzungsberichte der kaiserl Akademie der Wissenschaften in Wien, LXXVII. Bd. 1880) einfache Beweise gegeben hat, und welchen derselbe in einer weiteren Abhandlung: „Note zur Abhandlung über die Focalcurven des Quetelet“ (ebenda XCVII. Bd. 1888) auf die Aufgabe einen geraden Kreiskegel nach einem gegebenen Kegelschnitt zu schneiden angewendet hat und hiebei zu überraschend

Digitized by Google

einfachen Resultaten bezüglich der schon von Apellonnis behandelten Aufgabe gelangt ist.

Der hier in Rede stehende Satz kann wie folgt ausgesprochen werden:

„Die aus der Mitte eines ebenen Schnittes eines geraden Kreis„kegels nach der Axe desselben gezogene Parallele zu einer der „beiden Erzeugenden, welche in der zur schneidenden senkrechten „Ebene liegen, ist gleich der Excentricität des Schnittes.“

Bekanntlich sind die Berührungspunkte F_1 und F_2 Fig. 1. der zwei der Kegelfläche eingeschriebenen die Ebene berührenden Kugeln O_1 und O_2 die Brennpunkte des ebenen Schnittes, wie sich übrigens auch leicht zeigen lässt. Diese Punkte liegen, wie ich in: „Beiträge zur Theorie der Kegelschnitte und des geraden Kreiskegels“ Teil VIII. p. 1. u. w. dieses Journals nachgewiesen für alle auf der Ebene $a_1 a_2$ der Zeichnung senkrechten Schnitte, deren Hauptaxen $A_1 A_2$ denselben mit der Kegelspitze O concentrischen Kreis a_2 berühren, auf einer Hyperbel, welche α_1 und α_2 zu Asymptoten und a^2 als reellen Scheitelkreis hat.

Im Zusammenhange mit dem obigen Satze von Chasles ergibt sich demnach der Schnitt einer den reellen Scheitelkreis einer Hyperbel berührenden Geraden mit dieser einfach dadurch, dass man aus dem Halbirungspunkt M (Fig. 1) der zwischen den Asymptoten gelegenen Strecke $B_1 A_2$ der Geraden eine Parallele z. B. MN zu der einen Asymptote α_2 zieht, und das Stück MN, welches von der Hauptaxe und dem Halbirungspunkt begrenzt wird, auf der Geraden nach beiden Seiten überträgt, d. h.

$$MF_1 = MF_2 = MN \quad \text{macht.}$$

Die Auflösung der allgemeinen Aufgabe wird dann in jenen Fällen, in welchen aus dem Schnittpunkte der Geraden mit der Hauptaxe eine Tangente an den Scheitelkreis gelegt werden kann, in folgender Weise geführt werden können:

Ist Fig. 2. a^2 der Scheitelkreis, und sind α_1 und α_2 die Asymptoten der gegebenen Hyperbel H, deren Schnittpunkte mit der Geraden g auf Grund des vorstehend Ausgeführten gefunden werden sollen, so wird man aus dem Schnitte G von g und der Hauptaxe a die Tangente (g) an den Scheitelkreis a^2 legen und den Schnitt von (g) mit der der gegebenen orthogonal affinen Hyperbel (H) suchen (wobei (H) dadurch, dass g und (g) entsprechende Gerade sind, bestimmt ist), was sehr einfach geschieht, ohne dass man von der Hyperbel (H) weiter etwas zu construiren braucht; denn indem man

Digitized by Google

die Strecke $A_1 A_2$ in M halbirt und MN parallel zu α_2 zieht und weiters den zu M affinen Punkt (M) auf (g) sucht, hat man in (M) den Halbirungspunkt der auf (g) von den Asymptoten der Hyperbel (H) begrenzten Strecke, und (M) N wird parallel einer Asymptote von (H) sein; und wenn man nun die Länge (M) N von (M) weg auf (g) nach beiden Seiten nach (I) und (II) aufträgt, erhält man zunächst die Schnittpunkte von (g) mit (H) und durch Aufsuchung der diesen affin verwandten Punkte I und II die gesuchten, der gegebenen Hyperbel H und der Geraden g gemeinsamen Punkte.

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, dass zur Ausführung dieser Construction eine Eigenschaft der Hyperbel verwendet wurde, welche sich wie folgt, aussprechen lässt:

„Irgend eine den Scheitelkreis berührende Hyperbelsehne ist „stets doppelt so gross als die aus ihrem Mittelpunkte bis zur Haupt-„axe gezogene Parallele zu einer Asymptote“, welche Eigenschaft auch etwa in folgender Weise bewiesen werden kann: In den oben citirten: „Beiträge zur Theorie der Kegelschnitte etc.“ Teil VIII. d. J. ist unter Anderem bemerkt worden (pag. 14), dass die parallel einer Asymptote gemessene Entfernung eines Hyperbelpunktes von der Hauptaxe gleich ist mit der Länge der Tangente, die von dem Hyperbelpunkt an den Scheitelkreis gelegt werden kann. (Kann auch bezügl. der 2ten Axe und des (imag.) Scheitelkreises erweitert und auch durch Rechnung sehr einfach gezeigt werden).

In Fig. 1. ist nun, wenn F_1 und F_2 die beiden auf einer Tangente des Scheitelkreises gelegenen Hyperbelpunkte sind,

$$F_2 P_2 = F_2 T \quad \text{und} \quad F_1 P_1 = F_1 T$$

wobei T der Berührungspunkt des Scheitelkreises und der Sehne ist. Somit ist

$$F_2 F_1 = F_2 P_2 - F_1 P_1$$

Ist dann M der Halbirungspunkt der Sehne und $MN \parallel F_2 P_2 \parallel F_1 P_1 \parallel \alpha_2$, so ist

$$MN = \tfrac{1}{2}(F_2 P_2 - F_1 P_1)$$

also

$$MN = \tfrac{1}{2} F_2 F_1.$$

F. Ruth.

Digitized by Google

7.

Bemerkungen betreffend eine Classe von Curven auf dem einschaligen Rotations-Hyperboloide.

Die Art der Entstehung der hier zu betrachtenden Curven ist die folgende: Es sind gegeben zwei sich schneidende Gerade g_1, g_2, ferner eine dritte DD', welche die ersten beiden unter gleichen Winkeln kreuzt und deren Projection auf die Ebene $(g_1 g_2)$ mit der halbirenden des Winkels $(g_1 g_2)$ zusammenfällt. Diese Geraden g_1, g_2 drehen sich nun mit für jede verschiedener, constanter Geschwindigkeit um DD'. Hiebei beschreibt die eine, wie die andere ein und dasselbe einschalige Rotations-Hyperboloid. Gleichzeitige Lagen der $g_1 g_2$ sind nicht derselben Schar angehörige Erzeugende dieses Hyperboloides, und mithin haben die Geraden in jeder Lage einen Punkt gemein. Der Ort dieser Coincidenzpunkte ist eine Raumcurve, welche einige bemerkenswerten Eigenschaften besitzt, deren Herleitung hier Platz finden möge.

Wir wählen die DD' zur z-Axe, so dass die Gleichung des in Betracht kommenden Hyperboloides gegeben werden kann durch

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

Dies vorausgesetzt, stellen wir uns zunächst die Aufgabe, die beiden durch einen Punkt $(x, y, 0)$ seines Kehlkreises gehenden Erzeugenden zu ermitteln. Wir haben als Gleichung der tangirenden Ebene im Punkte $(x, y, 0)$

$$\frac{(\xi - x)x}{a^2} + \frac{(\eta - y)y}{a^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \xi x + \eta y = a^2$$

Verbinden wir diese letztere Gleichung mit der des Hyperboloides, so ergibt sich beispielsweise nach Elimination von η

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(a^2 - \xi x)^2}{a^2 y^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

d. i. nach einiger Reduction mit Rücksicht auf $x^2 + y^2 = a^2$

$$c^2(a^2\xi^2 + a^4 - 2a^2 x\xi) - a^2 y^2 \zeta^2 = a^2 c^2 y^2$$

Fügen wir beiderseits $a^2 c^2 x^2$ hinzu, dann resultirt endlich

$$[c(\xi - x) + y\zeta][c(\xi - x) - y\zeta] = 0$$

Somit ist die Gleichung des Aufrisses der einen der beiden Erzeugenden

und die der anderen
$$c(\xi - x) + y\zeta = 0$$
$$c(\xi - x) - y\zeta = 0$$

Hieraus gewinnen wir dann sofort durch einfache Substitution von

$$\xi = \frac{a^2 - \eta y}{x}$$

die zugehörigen Kreuzrissgleichungen

$$c(\eta - y) - x\zeta = 0, \quad c(\eta - y) + x\zeta = 0$$

Zwei Erzeugende eines einschaligen Rotat.-Hyperboloides nicht desselben Systemes können also immer dargestellt werden durch

$$\left.\begin{array}{lll} \xi x + \eta y = a^2, & c(\xi - x) + y\zeta = 0, & c(\eta - y) - x\zeta = 0 \\ \xi x + \eta y = a^2, & c(\xi - x) - y\zeta = 0, & c(\eta - y) + x\zeta = 0 \end{array}\right\}$$

worin x, y die Coordinaten eines Punktes des Kehlkreises bedeuten.

Setzen wir im ersten dieser beiden Gleichungssysteme für x, y die Werte der Coordinaten eines Punktes

$$P(x = a\cos p\varphi, \quad y = a\sin p\varphi)$$

und im zweiten die eines Punktes

$$Q(x = a\cos q\varphi \quad y = a\sin q\varphi)$$

so erhalten wir

$$\xi\cos p\varphi + \eta\sin p\varphi = a, \quad c(\xi - a\cos p\varphi) + a\sin p . \zeta = 0$$
$$c(\eta - a\sin p\varphi) - a\cos p\varphi . \zeta = 0$$

$$\xi\cos q\varphi + \eta\sin q\varphi = 0, \quad c(\xi - a\cos q\varphi) - a\sin q\varphi . \zeta = 0$$
$$c(\eta - a\sin q\varphi) + a\cos q\varphi . \zeta = 0$$

als Gleichungen gleichzeitiger Lagen der beiden durch ($x = a$, $y = 0$, $z = 0$) hindurchgehenden Erzeugenden des Hyperboloides, wenn diese um die Axe der z gleichförmige Rotationen ausführen, deren Winkelgeschwindigkeiten der Grösse und dem Zeichen nach im Verhältniss $p : q$ stehen (Selbstverständlich ist p und q als constant, φ als variabel zu betrachten.)

Diejenigen Werte für ξ, η, ζ, welche beide Gleichungssysteme befriedigen, sind dann die Coordinaten eines Punktes der hier in Betracht kommenden Raumcurve. Man findet für diese Coordinaten nach leichter Rechnung

Digitized by Google

$$\xi = a\frac{\cos\frac{p+q}{2}\varphi}{\cos\frac{p-q}{2}\varphi},\quad \eta = a\frac{\sin\frac{p+q}{2}\varphi}{\cos\frac{p-q}{2}\varphi},\quad \zeta = -c\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}\varphi$$

Die Projection dieser Curve auf die Ebene der ξ, η (die Kehlkreisebene) erscheint als Ort der Schnittpunkte der Kreistangenten in den P und Q, den gleichzeitigen Lagen zweier Punkte, die den Kehlkreis mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, die im Verhältniss $p:q$ stehen, durchlaufen. — Bestimmen wir die erste posit. Fusspunktcurve dieser Projection für den Urspung O als Pol. Wir haben als Gleichung der Tangente im Punkte ξ, η der letzteren:

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{\eta'}{\xi'}$$

(Die Accente deuten die Ableitung nach φ an) und als Gleichung des Perpendikels durch O auf diese Tangente

$$\frac{y}{x} = -\frac{\xi'}{\eta'}$$

Betrachten wir die Gleichungen

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{\eta'}{\xi'},\quad \frac{y}{x} = -\frac{\xi'}{\eta'}$$

als zusammengehörig, so finden wir

$$x = \frac{\eta'(\xi\eta'-\eta\xi')}{\xi'^2+\eta'^2},\quad y = -\frac{\xi'(\xi\eta'-\eta\xi')}{\xi'^2+\eta'^2}$$

$$r^2 = x^2+y^2 = \frac{(\xi\eta'-\eta\xi')^2}{\xi'^2+\eta'^2},\quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x} = -\frac{\xi'}{\eta'}$$

Nach Einführung der obigen Werte von ξ, η und von

$$\xi' = -\tfrac{1}{2}a\frac{p\sin q\varphi+q\sin p\varphi}{\left(\cos\frac{p-q}{2}\varphi\right)^2},\quad \eta' = \tfrac{1}{2}a\frac{p\cos q\varphi+q\cos p\varphi}{\left(\cos\frac{p-q}{2}\varphi\right)^2}$$

erscheinen dann die Polarcoordinaten r, ϑ eines Punktes der fraglichen Fusspunktcurve ausgedrückt durch

$$r = a\frac{p+q}{\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos(p-q)\varphi}},\quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{p\sin q\varphi+q\sin p\varphi}{p\cos q\varphi+q\cos p\varphi}$$

Die Inverse derselben für O als Inversionscentrum unter Zugrundelegung der Gleichung

$$rs = a^2$$

wird also einen zur Anomalie ϑ gehörigen Radiusvector s besitzen welcher sich bestimmt durch

$$s = \frac{a^2}{r} = a\frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos(p-q)\varphi}}{p+q}$$

Diese Inverse ist nun aber nichts anderes als eine Cykloide, wie man leicht auf Grund der Formeln finden kann, die wir in unserer Abhandlung (T.VIII. S. 179) „Verallgemeinerung des Entstehungsgesetzes der Fusspunktcurven“ gegeben haben. — Wir können somit den Satz aussprechen: „Bewegen sich auf einer Kreisperipherie zwei Punkte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, so ist der Ort der Schnittpunkte der Tangenten an den Kreis in gleichzeitigen Lagen P, Q dieser Punkte die erste negat. Fusspunktcurve einer Inversen für den Kreismittelpunkt als Pol jener Cykloide, die als Enveloppe der PQ auftritt.“ [1])

Wir haben bereits notirt die Werte von

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\varphi}, \quad \eta' = \frac{d\eta}{d\varphi}$$

es bleibt also noch der Wert von

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\varphi} = -\tfrac{1}{2}c\frac{p-q}{\left(\cos\frac{p-q}{2}\varphi\right)^2}$$

anzusetzen, um die Gleichungen der Tangente unserer Raumcurve hinschreiben zu können. Diese lauten

$$\frac{x - a\dfrac{\cos\frac{p+q}{2}\varphi}{\cos\frac{p-q}{2}\varphi}}{a(p\sin q\varphi + q\sin p\varphi)} = \frac{y - a\dfrac{\sin\frac{p+q}{2}\varphi}{\cos\frac{p-q}{2}\varphi}}{a(p\cos q\varphi + q\cos p\varphi)}$$

$$= -\frac{z + c\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}\varphi}{c(p-q)}$$

1) Die Erzeugung der Cykloiden als Enveloppen ihrer Tangenten, deren in diesem Satze gedacht wird, und auf die wir vor einiger Zeit auf ganz natürlichem Wege gelangten, ist übrigens bereits im Jahre 1878 von Prof. Wolstenholme mitgeteilt worden in den Proceed. of the London Math. Society, Vol. IV, page 321: „On Epicycloids and Hypocycloids“. Die Beweisführung war jedoch eine synthetische.

Digitized by Google

Eine Gerade durch den Punkt ($x=0$, $y=0$, $z=c$) parallel zu dieser Tangente (eine Richtkegelerzeugende) ist mithin gegeben durch

$$-\frac{x}{a(p\sin q\varphi+q\sin p\varphi)}=\frac{y}{a(p\cos q\varphi+q\cos p\varphi)}=-\frac{z-c}{c(p-q)}$$

Der Schnittpunkt derselben mit der Ebene xy erhält die Coordinaten

$$x=-\frac{a}{p-q}(p\sin q\varphi+q\sin p\varphi),\qquad y=\frac{a}{p-q}(p\cos q\varphi+q\cos p\varphi)$$

Diese Werte lassen erkennen, dass der Ort der Schnittpunkte aller Tangenten-Parallelen durch (0, 0, c) mit der Ebene xy, d. i. Basis desjenigen Richtkegels unserer Raumcurve, dessen Spitze eben der Punkt (0, 0, c) ist, eine Cykloide wird, welche ähnlich und ähnlich gelegen ist (für O als Aehnlichkeitscentrum) mit der um 90° verdrehten Enveloppe der PQ. Auf Grund dieses Ergebnisses erhält man eine leichte Construction der Tangente und der osculirenden Ebene in einem Punkte irgend einer derartigen Raumcurve.

Wien, im September 1889.

Eduard Janisch.

8.

Classification der Flächen zweiter Ordnung.

Mit Hülfe der folgenden Kriterien kann man die Art der Fläche 2. Ordnung in jedem gegebenen Falle leicht bestimmen.

Die Gleichung der Fläche wird in der Form

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy$$
$$+2a_{14}xt+2a_{24}yt+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0$$

vorausgesetzt, wo sämtliche Coefficienten reell sind und nicht sämtlich verschwinden. Es sei

$$D=|a_{ik}|,\quad (i,k=1,2,3,4),\quad (a_{ik}=a_{ki})$$

und A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik}

I. $A_{44} \gtrless 0$ Centralflächen

1. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, $a_{11}A_{44}>0$

a) $D>0$ Imaginäres Ellipsoid

b) $D = 0$ Imaginärer Kegel

c) $D < 0$ Reelles Ellipsoid

2. $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $a_{11} A_{44} < 0$, oder $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \leqq 0$

a) $D > 0$ Einschaliges Hyperboloid

b) $D = 0$ Reeller Kegel

c) $D < 0$ Zweischaliges Hyperboloid

II. $A_{44} = 0$, $D \gtrless 0$ Paraboloide

1. $D > 0$ Hyperbolisches Paraboloid
2. $D < 0$ Elliptisches Paraboloid

III. $A_{44} = 0$, $D = 0$, oder A_{11}, A_{22}, A_{33} verschwinden nicht sämtlich. Cylinder

1. Unter den Diagonalunterdeterminanten von A_{44} gibt es positive *).

a) $a_{ii} A_{kk} \geqq 0 (i, k = 1, 2, 3)$ Imaginärer Cylinder

b) $a_{ii} A_{kk} \leqq 0 (i, k = 1, 2, 3)$ Elliptischer Cylinder

2. Unter denselben gibt es negative. Hyperbolischer Cylinder
3. Sie verschwinden sämtlich. Parabolischer Cylinder

IV. $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = 0$, $D = 0$ Zwei Ebenen

1. Unter den Diagonalunterdet. 2. Grades gibt es positive, 2 imag. Eb.
2. Unter denselben gibt es negative. 2 reelle Ebenen
3. Sie verschwinden sämtlich Eine zweifache Ebene

---

*) Diagonalunterdeterminanten einer verschwindenden Determinante können nämlich nicht ungleiche Vorzeichen haben.

Klausenburg, Juni 1890. J. Vályi.

Digitized by Google

XII.

Ueber die Doppelpunkte bei der projectivischen ebenen Correspondenz.

Ein Supplement zur Theorie der projectivischen Verwandtschaft.

Von

Torsten Brodén.

---

1. Wenn zwei projectivisch verwandte Ebenen (E und E_1) auf einander applicirt werden, fallen bekanntlich im allgemeinen drei E_1-Punkte mit den entsprechenden E-Punkten zusammen, oder es entstehen drei Doppelpunkte.

Im Folgenden wird die Lage dieser Doppelpunkte etwas näher untersucht, nämlich so, dass die Frage behandelt wird: „Welche zwei E-Punkte können nebst einem gegebenen Punkt Doppelpunkte werden, wenn zwischen den E- und E_1-Punkten eine bestimmte projectivische Correspondenz besteht?“ Diese Frage enthält die folgende: „Welche E-Punkte haben die Eigenschaft, dass ihre Abstände von einem gegebenen Punkte bei der Transformation unverändert bleiben?“

Wir nehmen hierbei an, dass die unendlich entfernten Geraden der beiden Ebenen einander nicht entsprechen, dass es also endliche „Fluchtlinien“ giebt. (Sonst wären ja zwei Doppelpunkte immer unendlich entfernt.)

Man kann dann immer die Correspondenzformeln zu der folgen den Gestalt bringen:

$$x_1 = \frac{ax}{y}, \quad y_1 = \frac{ab}{y}; \qquad x = \frac{bx_1}{y_1}, \quad y = \frac{ab}{y_1}$$

wo x, y, x_1, y_1 rechtwinklige E- resp. E_1-Coordinaten und a, b positive Constanten sind.

Man hat, um die Form zu erhalten, als Abscissenaxen die Fluchtlinien zu benutzen, als Ordinatenaxen die zwei zu ihnen senkrechten Geraden, welche einander entsprechen, und zudem die positiven Coordinatenrichtungen passend zu wählen.

Wenn die beiden Ebenen auf einander applicirt werden, so sagen wir, dass die Application direct ist, wenn durch eine blosse Drehung der einen Ebene bewirkt werden kann, dass die positiven x_1- und y_1-Richtungen mit den positiven x- und y-Richtungen zusammenfallen. Im entgegengesetzten Falle heisse die Application indirect.

2. Natürlich ist es nun leicht den fraglichen, einem gegebenen (reellen) Punkte (h, k) der xy-Ebene zugehörigen Ort für unveränderten Abstand (oder kurz die Abstandscurve des Punktes) analytisch zu bestimmen. Die Gleichung ist

$$(x-h)^2+(y-k)^2=\left(\frac{ax}{y}-\frac{ah}{k}\right)^2+\left(\frac{ab}{y}-\frac{ab}{k}\right)^2$$

oder

$$k^2y^2[(x-h)^2+(y-k)^2]=a^2[(kx-hy)^2+b^2(y-k)^2]$$

oder

$$k^2(\eta+k)^2(\xi^2+\eta^2)=a^2[(kx-h\eta)^2+b^2\eta^2]$$

oder

$$k^2[(\eta+k)^2-a^2]\xi^2+2a^2hk\eta\xi+[k^2(\eta+k)^2-a^2(h^2+b^2)]\eta^2=0$$

wenn man $x=\xi+h$, $y=\eta+k$ substituirt.

Die Curve ist also vom 4ten Grade und einfach circulär.

Sie hat immer einen Doppelpunkt im ∞-Punkte der Fluchtlinie. Die Tangenten (Asymptoten) sind immer $y=\pm a$. Die zwei übrigen Asymptoten der Curve sind $\xi^2+\eta^2=0$.

Ebenso geht die Curve doppelt durch den Punkt $x=h$, $y=k$ $(\xi=\eta=0)$. Die Tangenten können aber hier zusammenfallen (Spitze) oder imaginär sein.

Dass die Curve keinen dritten Doppelpunkt haben kann (falls sie nicht zerfällt), und dass sie somit vom Geschlechte 1 ist, folgt einfach daraus, dass sie, wie man leicht einsieht, zweigeteilt sein muss. Erstens hat sie nämlich die Asymptoten $y=\pm a$, zweitens kann sie die Fluchtlinie in keinem reellen endlichen Punkte schneiden (wenigstens für $k^2>0$). Dies folgt unmittelbar aus der geometrischen Eigenschaft der Curve und ergiebt sich natürlich leicht analytisch.

Digitized by Google

3. Die Frage nach der möglichen Zerfällung der Curve kann man folgendermassen erledigen.

Wir untersuchen zuerst, ob eine zu der Fluchtlinie parallele Gerade ein Teil der Curve sein kann. Dies erfordert, dass für einen gewissen η-Wert (η_0) die Curvengleichung identisch erfüllt sei, dass also

$$k^2[(\eta_0+k)^2-a^2] = hk\eta_0 = [k^2(\eta_0+k)^2-a^2(h^2+b^2)]\,\eta_0^2 = 0$$

Diese Gleichungen sind für

$$k=0, \quad \eta_0=0$$

erfüllt. Die Fluchtlinie selbst ist also Bestandteil der einem beliebigen ihrer Punkte zugehörigen Curve. Offenbar ist sie hierbei doppelt zu zählen, und der restirende Teil der Curve 4ten Grades ist die doppelt zu zählende ∞-Gerade, welche umgekehrt nur für $k=0$ herausfallen kann. [Für $k=0$, $h=\pm b\sqrt{-1}$ sind die Bedingungsgleichungen bei jedem η_0 erfüllt; aber wir berücksichtigen nur reelle h und k].

Zweitens kann man setzen:

$$\eta_0+k=\pm a, \quad \eta_0=0$$

d. h.

$$k=\pm a, \quad \eta_0=0$$

Die Gerade $y=0$ fällt somit aus der einem beliebigen ihrer Punkte zugehörigen Curve aus, d. h. sie entspricht Punkt für Punkt der Geraden $y_1=b$. Ebenso die Geraden $y=-a$ und $y_1=-b$. Die Gleichung der restirenden Curve 3ten Grades ist

$$\eta(\xi^2+\eta^2)\pm 2a(\xi^2+\eta^2)\pm 2ah\xi+(a^2-b^2-h^2)\,\eta=0$$

oder

$$(\eta\pm 2a)\,\xi^2\pm 2ah\xi+(\eta^2\pm 2a\eta+a^2-b^2-h^2)\,\eta=0$$

Inwieweit aus dieser Curve noch eine Linie $\eta=\eta_0$ herausfallen kann, ergiebt sich leicht. Es trifft ein, wenn $a=b$ und $h=0$. Dann fällt auch die Gerade $\eta=-2a$ resp. $\eta=+a$ heraus. Der Punkt $h=0$, $k=\pm a$ und ebenso $h=0$, $k=-2a$ giebt also, wenn $b=a$, das Linienpaar $y=\pm a$ als Teil der Abstandscurve. Der Rest ist das imaginäre Linienpaar $x^2+(y-a)^2=0$ resp. $x^2+(y+a)^2=0$. — Dass die Curve 3ten Grades in keiner anderen Weise zerfallen kann, wird unten bewiesen.

Es ist aber noch ein Fall übrig, da die Curve 4ten Grades zu der Fluchtlinie parallele Geraden enthält. Weil

$$\eta_0+k=\pm a, \quad h=0, \quad k=\pm b$$

die Bedingungsgleichungen erfüllen, gilt es im allgemeinen, wie bei $b = a$, dass für $h = 0$, $k = b$ und $h = 0$, $k = -b$, das Linienpaar $y = \pm a$ herausfällt. Der Rest ist $x^2 + (y \mp b)^2 = 0$.

Es sind die Punkte $x = 0$, $y = \pm b$ diejenigen, welche bei den 4 sog. centralperspectivischen Lagen der beiden Ebenen Collineationscentra sind; die Geraden $y = \pm a$ sind die Collineationsaxen. Wenn E_1 auf E so gelegt wird, dass der Punkt $x_1 = 0$, $y_1 = -a$ auf $x = a$, $y = -b$ fällt, und die positiven x_1- und y_1-Richtungen mit den positiven x- und y-Richtungen übereinstimmen, so ist $x = 0$, $y = -b$ Collineationscentrum, $y = +a$ Collineationsaxe; wenn aber das $x_1 y_1$-System eine halbe Rotation um die Linie $y = -b$ macht, so wird $y = -a$ Axe. Bedeuten nämlich $\overline{x_1}$ und $\overline{y_1}$ die xy-Coordinaten der $x_1 y_1$-Punkte nach der Application, so hat man vor der Rotation

$$\overline{x_1} = \frac{ax}{y}, \quad \overline{y_1} = \frac{ab}{y} + a - b$$

aber nach derselben

$$-\overline{x_1} = \frac{ax}{y}, \quad -\overline{y_1} = \frac{ab}{y} + a + b$$

Der Punkt $x = 0$, $y = -b$ entspricht somit sich selbst, und dasselbe gilt in jenem Falle von jedem Punkte der Linie $y = +a$, in diesem von jedem Punkte der Linie $y = -a$. In derselben Weise ist der Punkt $x = 0$, $y = +b$ Centrum, die Gerade $y = -a$ Axe, wenn $x_1 = 0$, $y_1 = +a$ auf $x = 0$, $y = +b$ fällt, und die positive y_1-Richtung mit der positiven y-Richtung übereinstimmt, die positive x_1-Richtung aber mit der negativen x-Richtung. Nach einer halben Umdrehung wird $y = +a$ Axe. Den beiden Fällen entsprechen die Gleichungen

$$\mp \overline{x_1} = \frac{ax}{y}, \quad \pm \overline{y_1} = \frac{ab}{y} \pm b - a$$

Zu bemerken ist, dass im Falle $b = a$ die zwei nach den Umdrehungen erhaltenen Lagen nicht centralperspectivisch sind, weil der Punkt $x = 0$, $y = -b$ resp $x = 0$, $y = +b$ dann auf der Linie $y = -a$ resp. $y = +a$ liegt.

Wir haben nun alle Fälle betrachtet, in denen eine Gerade $y = y_0$ Bestandteil des fraglichen Ortes ist, wenigstens wenn h und k endlich sind. Für unendliche h und k ist es aber evident, dass man die Fluchtlinie und die ∞-Gerade erhält, beide doppelt zu zählen; es ist dies nur die projectivische Uebersetzung des Satzes: im $x_1 y_1$-Systeme giebt jeder Punkt der Fluchtlinie diese Linie selbst und die ∞-Linie, beide doppelt.

Digitized by Google

Dass für reelle h und k weder die Curve 4ten Grades noch ihr 3-gradiger Teil in anderen Weisen als die soeben gefundenen zerfallen kann, ergiebt sich z. B. folgendermassen. Jede andere Zerfällung erfordert, dass ξ in η rational ausdrückbar sei, dass also der Ausdruck

$$a^4 h^2 k^2 - k^2[(\eta + k)^2 - a^2][k^2(\eta + k)^2 - a^2(h^2 + b^2)]$$

oder

$$k^2[a^4 h^2 - \{y^2 - a^2\}\{k^2 y^2 - a^2(h^2 + b^2)\}]$$

quadratisch sei. Schliessen wir aber die schon erwähnten Fälle $k = 0$ und $h = 0$, $k^2 = b^2$ aus, so ist dies für reelle h und k nicht möglich. Wäre nämlich

$$k^2 y^4 - a^2(h^2 + k^2 + b^2) y^2 + a^4 b^2$$

quadratisch, so sollte man $a^4(h^2 + k^2 + b^2)^2 = 4a^4 b^2 k^2$ d. h.

$$[(k - b)^2 + h^2][(k - b)^2 + h^2] = 0$$

haben. Die einzigen reellen h und k, welche diese Gleichung erfüllen, sind $h = 0$, $k = \pm b$.

4. Uebrigens sind die folgenden Eigenschaften der fraglichen Curve besonders hervorzuheben.

Die Curvengleichung liefert in Verbindung mit

$$\eta = m\xi$$

die Kreisgleichung

$$k^2 m^2 \xi^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2k^2 m \xi^2 (\xi + m\eta) + k^4 \xi^2 (1 + m^2)$$
$$= a^2 \xi^2 [(k - mh)^2 + m^2 b^2]$$

oder

$$\left(\xi + \frac{k}{m}\right)^2 + (\eta + k)^2 = \frac{a^2}{k^2}\left[\left(\frac{k}{m} - h\right)^2 + b^2\right]$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises ist Schnittpunkt der Linie $\eta = m\xi$ mit der Fluchtlinie. Der Radius ist, wie man leicht sieht, 4te Proportionale zu den zwei constanten Längen k, a und der Entfernung des festen Punktes $x = 0$, $y = b$ vom Schnittpunkte des betreffenden Strahls mit der Fluchtlinie. Hiermit ist eine sehr einfache Methode gegeben die Curve zu construiren. Besonders einfach ist die Construction im Falle $k = a$, da die Curve vom 3ten Grade ist; das Kreissystem bildet dann ein Büschel mit den zwei reellen Basispunkten $x = 0$, $y = \pm b$.

Die beiden getrennten Teile der Curve stehen dem Gesagten gemäss in einer sehr einfachen Beziehung zu einander, so dass, wenn der eine in irgend einer Weise construirt ist, der andere überaus

Digitized by Google

einfach sich ergiebt. Man kann, wenn man so will, die Sache so ausdrücken, dass die in den homogenen Coordinaten ξ, η, ζ resp. ξ', η', ζ' symmetrische quadratische Transformation

$$\frac{\xi}{\xi'(\eta'+2k\zeta')} = \frac{\eta}{\eta'(\eta'+2k\zeta')} = -\frac{\zeta}{\eta'\zeta'}$$

die Curve in sich selbst (den einen Teil in den anderen) überführt.

Die Kreise mit Centrum in $\xi = \eta = 0$ (P) schneiden die Curve im allgemeinen in je 4 (nicht immer reellen) Punkten. Man kann diese Punkte in verschiedenen Weisen durch ein zweites zu dem Kreisbüschel projectivisches Kegelschnittbüschel ausschneiden. Die folgenden zwei Weisen scheinen am meisten bemerkenswert zu sein.

Die Curvengleichung giebt erstens für $\xi^2 + \eta^2 = r^2$

$$k^2 r^2 (\eta + k)^2 - a^2 [(k\xi - h\eta)^2 + b^2 \eta^2] = 0$$

Diese Gleichung repräsentirt bei variabeln r^2 ein Büschel, dessen Basispunkte sind die zwei doppelt zu zählenden Schnittpunkte der Fluchtlinie mit den imaginären Geraden durch P $(k\xi - h\eta)^2 + b^2\eta^2 = 0$ d. h. die Punkte

$$y = 0, \quad x = \pm b i$$

welche den unendlichen Kreispunkten der $x_1 y_1$-Ebene entsprechen. Das Kegelschnittsbüschel entspricht also den $x_1 y_1$-Kreisen mit Centrum in P_1 (der Bildpunkt von P). Es ist ja auch a priori klar, dass ein xy-Kegelschnitt, der einem $x_1 y_1$-Kreise mit Centrum in P und Radius r entspricht, einen xy-Kreis mit Centrum in P und denselben Radius r in Punkten schneidet, welche in der zu P gehörigen „Abstandscurve" liegen. — Im Falle $k = \pm a$ liegen zwei jener 4 Schnittpunkte immer in der Geraden $y = \mp b$.

Ersetzt man zweitens in der Curvengleichung nur in den Gliedern vom 3ten und 4ten Grade $\xi^2 + \eta^2$ durch r^2, so geht die Gleichung

$$r^2 k^2 \eta(\eta + 2k) + (k^4 - a^2h^2 - a^2b^2)\eta^2 + 2a^2hk\xi\eta + k^2(k^2 - a^2)\xi^2 = 0$$

hervor. Die den r-Werten ∞ und 0 entsprechenden Individua dieses Büschels sind die Linien $y = \pm k$ und die zwei Curventangenten in P, der also zweifacher Basispunkt ist; jede Büschelcurve berührt in P die zu der Fluchtlinie parallele Gerade. — Im Falle $k = \pm a$ reducirt sich das Büschel auf die feste Gerade $\eta = 0$ und ein Strahlenbüschel

$$r^2(\eta \pm 2a) + (a^2 - b^2 - h^2)\eta \pm 2ah\xi = 0$$

mit dem Basispunkte

$$\eta = \mp 2a, \quad \xi = \frac{a^2 - b^2}{h} - h$$

welches auf den concentrischen Kreisen die Curve 3ten Grades ausschneidet, wenn die beiden Büschel mittels der Relation

$$r^2 = b^2 + h^2 - a^2 \mp \frac{2ah}{m}$$

auf einander bezogen sind (m = dem Winkelcoefficient des fraglichen Strahls). Besonders im Falle $b = a$ liefert dies eine sehr einfache Constructionsmethode.

Die zu der Fluchtlinie parallelen Geraden schneiden die Curve (sie sei vom 4ten oder 3ten Grade) in zwei endlichen Punkten. Diese können z. B. in folgender Weise durch Kreise ausgeschnitten werden. Man kann die Curvengleichung so schreiben:

$$k^2(\eta + k)^2(\xi^2 + \eta^2) = a^2[k^2(\xi^2 + \eta^2) - 2hk\xi\eta + (b^2 + h^2 - k^2)\eta^2]$$

Durch partielle Substitution von c für η erhält man

$$k^2[(c+k)^2 - a^2](\xi^2 + \eta^2) + 2a^2hkc\xi - a^2(b^2 + h^2 - k^2)c\eta = 0$$

Diese Gleichung bedeutet einen durch P gehenden Kreis, dessen Centrum die Coordinaten

$$p = -\frac{a^2hc}{k[(c+k)^2 - a^2]}, \quad q = \frac{a^2(b^2 + h^2 - k^2)c}{2k^2[(c+k)^2 - a^2]}$$

hat und also in der von c unabhängigen Geraden

$$\eta = -\frac{b^2 + h^2 - k^2}{2hk} \cdot \xi$$

liegt. Bei variabeln c stellt also die Gleichung ein Kreisbüschel dar mit dem doppelten Basispunkt $\xi = \eta = 0$. Jeder Curve dieses Büschels entsprechen, wenn $k^2 \gtrless a^2$, zwei c-Werte (= 2 Strahlen durch den ∞-Punkt der Fluchtlinie), aber jedem Strahle entspricht nur ein Kreis. Wenn $k^2 = a^2$, ist die Correspondenz der Kreis- und Strahlenbüschel projectivisch. — Auch hierauf kann man eine ziemlich einfache Constructionsmethode gründen. Seitdem man die Locusgerade der Kreiscentra gezogen hat, kann man z. B. die Mittelpunktabscissen, welche verschiedenen c-Werten gehören, nach der Formel

$$v = -\frac{a}{2k + c + \frac{k^2 - a^2}{c}} \cdot \frac{h}{k} \cdot a$$

bestimmen. Im Falle $k = \pm a$ hat man ganz einfach

$$p = \mp \frac{ah}{c \pm 2a}$$

5. Wir werden auch das allgemeine Verhalten der beiden Tangenten in $\xi = \eta = 0$ etwas näher untersuchen. Sie sind reell und verschieden, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem

$$a^4 h^2 \gtreqless (k^2 - a^2)(k^4 - a^2 h^2 - a^2 b^2)$$

d. h.

$$k^6 - a^2 k^4 - a^2 h^2 k^2 - a^2 b^2 k^2 + a^4 b^2 \lesseqgtr 0$$

Die Curve

$$a^2 x^2 y^2 = (y^2 - a^2)(y^4 - a^2 b^2)$$

ist somit Ort der Punkte, deren Abstandscurven Spitzen haben. Dieser Spitzenort ist, wie wir sehen, symmetrisch zu der Fluchtlinie und der Linie $x = 0$. Sie schneidet diese in den Punkten $y = \pm a$ und $y = \pm b$, jene aber in keinen endlichen Punkten, sondern (wie eine leichte Ueberlegung zeigt) mit 4 unendlichen Zweigen, deren 2 die Fluchtlinie, zwei die ∞-Gerade berühren. Die im ∞-Punkte der Fluchtlinie liegende Singularität ist also mit 8 Doppelpunkten äquivalent. Im Falle $b = a$ liegen Doppelpunkte auch in $x = 0$, $y = \pm a$. Die Curve ist dann unicursal, aber im allgemeinen Falle vom Geschlechte 2.

Durch partielle Substitution von $y = k$ in der Gleichung der Spitzencurve erhält man

$$a^2 k^2 x^2 = (k^2 - a^2)(k^2 y^2 - a^2 b^2)$$

oder

$$a^2 k^2 x^2 + (a^2 - k^2) k^2 y^2 = (a^2 - b^2) a^2 b^2$$

Die Curve wird also von einem Strahlenbüschel durch den ∞-Punkt der Fluchtlinie und jenem Kegelschnittsystem generirt. Wir kommen zu diesen Kegelschnitten, welche auch andere, noch wichtigere Eigenschaften haben, im Folgenden zurück. — Die Gestalt des Spitzenorts zeigen Fig. 1. ($b = a$) und Fig. 2. ($b = 2a$).

Für Punkte, welche der Spitzcurve nicht gehören, sind die zwei getrennten Tangenten reell in den Feldern, welche von zwei nicht congruenten Strecken jener Curve begrenzt werden (für $k = 0$ ist die Realitätsbedingung nicht erfüllt). Oder: die zwei Tangenten sind imaginär oder reell, je nachdem der Punkt P auf einer zu der Fluchtlinie parallelen Sehne der Spitzcurve oder auf der Verlängerung einer solchen liegt.

Digitized by Google

Die Spitzentangente hat die Gleichung

$$\eta = \frac{h^2(a^2 - k^2)}{a^2 h} \xi$$

6. Zuletzt sei bemerkt, dass die Abstandscurven, welche nur dem Zeichen nach verschiedenen h- und k-Werten entsprechen, congruent sind. Zeichenwechsel für h ist nämlich mit Zeichenwechsel für x in der Curvengleichung äquivalent; und ebenso Z.-w. für k mit Z.-w. für y. [Hier mag auch bemerkt werden, dass die Quadranten 1, 2, 3, 4 der xy-Ebene den Quadranten 1, 2, 3, 4 der $x_1 y_1$-Ebene in dieser Ordnung entsprechen.]

7. Indem wir nun ein etwas näheres Studium der „Abstandscurven" und der Lage der Doppelpunkte in ihnen vornehmen werden, nehmen wir zuerst an, dass

$$b = a$$

und also

$$x_1 = \frac{ax}{y}, \quad y_1 = \frac{a^2}{y}$$

oder umgekehrt

$$x = \frac{ax_1}{y_1}, \quad y = \frac{a^2}{y_1}$$

Wenn dann

$$k = a \quad (h^2 > 0)$$

zerfällt die Abstandscurve, wie wir sehen, in die Gerade $y = a$ und eine Curve 3ten Grades, deren Gleichung in ξ und η ist

$$(\xi^2 + \eta^2)(\eta + 2a) + 2ah\xi - h^2\eta = 0$$

Den allgemeinen Verlauf dieser Curve zeigt Fig. 3. Der durch $\xi = \eta = 0$ (P) gehende Zweig ist eine Ovale, welche in P die durch den Punkt $x = 0$, $y = -a$ (B) gehende Gerade $h\eta = 2a\xi$, im Punkte $\xi = -h$, $\eta = 0$ (A; $x = 0$, $y = a$) die Linie $x = 0$ berührt. Der andere Teil, die „Serpentine", geht durch B. Sie hat in diesem Punkte Inflexion, und die Tangente ist senkrecht zu BP. Die Substitution

$$\xi = \bar{\xi} - h, \quad \eta = \bar{\eta} - 2a$$

führt nämlich die Curven-Gleichung in diese über:

$$\bar{\eta}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) - 2(\bar{\eta} - a)(2a\bar{\eta} + h\bar{\xi}) = 0$$

8. Die nähere Bestimmung der Lage der Doppelpunkte leiten wir mit der Bemerkung ein, dass unter den gemachten Voraussetzungen ($b = a$, $k = a$) die $x_1 y_1$-Curve, welche der beschriebenen

xy-Curve projectivisch entspricht, zu dieser congruent ist und zu den Coordinatenaxen dieselbe Lage hat. Dies folgt daraus, dass wenn $b = a$, einerseits die Transformationsformeln in x, y und x_1, y_1 symmetrisch sind, und anderseits die Coordinaten der Punkte $y = a$ bei der Transformation unverändert bleiben. Legt man daher die Systeme so auf einander, dass Origo und positive Coordinatenrichtungen zusammenfallen, so gilt es, dass nicht nur der Punkt $y = a$, $x = h$ mit seinem entsprechenden zusammenfällt, sondern auch dass die beiden zugehörigen Abstandscurven einander vollständig decken. Ferner ist es ersichtlich, dass die nunmehr in der xy-Ebene bestehende $(xy) - (x_1 y_1)$-Correspondenz vertauschbar (involutorisch) ist, und dass also die Punkte der erwähnten Curve involutorisch zusammengehören. Der Grundeigenschaft der Curve zufolge, müssen zwei correspondirende Punkte dieselbe Entfernung von P haben; es sind also die zwei beweglichen Schnittpunkte mit den Kreisen, welche P als Centrum haben. Wir wissen schon, dass das Strahlenbüschel durch B dieselben Punkte ausschneidet. Man kann dies nun auch in folgender Weise einsehen: jede durch B gehende Gerade ist selbstentsprechend (weil B und der Schnittpunkt mit $y = a$ Doppelpunkte sind) und Träger einer involutorischen Projectivität; zwei entsprechende Punkte müssen dann zu den erwähnten Doppelpunkten harmonisch conjugirt sein; bekanntlich gilt aber dasselbe von den zwei beweglichen Schnittpunkten mit der Curve, weil B Inflexionspunkt ist, und AP die zugehörige Berührungssehne.

Es ist nun sehr leicht zu finden, welche Doppelpunktsdreiecke bei einer indirecten Application des $x_1 y_1$-Systems auf das xy-System entstehen können, in dem speciellen Falle, dass ein Punkt P_1 der Linie $y_1 = a$ mit seinem entsprechenden P zusammenfällt. Die zwei übrigen Doppelpunkte sind in der Tat immer von P gleich entfernt. Von zwei Curvenpunkten L, M, welche von P denselben Abstand haben, und ihren Bildpunkten L_1, M_1 gilt es ja, dass bei der oben betrachteten directen Application L_1 mit M und M_1 mit L zusammenfällt. Wenn man daher die $x_1 y_1$-Ebene umwendet und auf die xy-Ebene so legt, dass $P_1 L_1$ mit PL zusammenfällt, so fallen auch PM und $P_1 M_1$ zusammen. Diese Gleichschenkligkeit der bei indirecter Application entstehenden Dreiecke ist dem nun betrachteten Specialfalle eigen. Auch die Dreiecke PNN_1 und PRR_1 sind Doppelpunktsdreiecke, indirecter Lage entsprechend. PMM_1 und PRR_1 sind offenbar gleichförmig, weil PMR und PM_1R_1 congruent sind.

8 Man kann diese Resultate durch eine leichte Rechnung bestätigen. Eine solche ergiebt auch, wie die Sache bei directer

Application sich gestaltet. Bei der directen centralperspectivischen Lage ist die Projectivität durch die Formeln

$$x_1 = \frac{ax}{y}, \quad y_1 = \frac{a^2}{y}$$

oder

$$\xi_1 + h = \frac{a(\xi + h)}{\eta + a}, \quad \eta_1 + a = \frac{a^2}{\eta + a}$$

ausgedrückt. Dreht man aber die xy-Ebene um P einen Winkel φ in positiver Richtung (von pos. x zu pos. y), so erhält man die Gleichungen

$$(\xi_2 \cos\varphi + \eta_2 \sin\varphi + h)(\eta + a) = a(\xi + h)$$
$$(-\xi_2 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi + a)(\eta + a) = a^2$$

Die Doppelpunkte hat man also durch die Gleichungen

$$(\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi + h)(\eta + a) = a(\xi + h)$$
$$(-\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi + a)(\eta + a) = a^2$$

oder

$$\xi\eta \cos\varphi + \eta^2 \sin\varphi - a\xi(1 - \cos\varphi) + \eta(h + a\sin\varphi) = 0$$
$$\xi\eta \sin\varphi - \eta^2 \cos\varphi + a\xi \sin\varphi - a\eta(1 + \cos\varphi) = 0$$

zu bestimmen. Aus ihnen folgt einfach

$$\eta = -(\xi + h)\cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

Bei directer Application liegen also die beweglichen Doppelpunkte auf einer Geraden durch den festen Punkt A ($x = 0$, $y = a$), folglich der eine auf der Ovale, der andere auf der Serpentine. S. die Dreiecke PMR und PM_1R_1.

Eine ganz analoge Rechnung (vergl. Art. 13.) giebt für indirecte Lage die Gerade

$$\eta + 2a = -(\xi + h)\cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

als Verbindsngslinie der Doppelpunkte, welche der Drehung φ entsprechen, wenn man von der Lage ausgeht, bei welcher die positive η_1-Richtung mit der negativen η-Richtung zusammenfällt.

Wie wir ja schon wussten, liegen also bei indirecter Application die beweglichen Doppelpunkte auf einer Geraden durch B ($x = 0$, $y = -a$), folglich beide auf der Ovale, oder beide auf der Serpentine.

Zugleich sehen wir, dass sowol bei directer als indirecter Lage einer gewissen Drehung der $x_1 y_1$-Ebene eine halb so grosse Drehung der zugehörigen, durch A resp. B gehenden Geraden entspricht.

Digitized by Google

Die indirecte Application erlaubt (für jedes h) 4 Coincidenzen der beweglichen Doppelpunkte, den 4 verschiedenen Tangenten durch B entsprechend: L und M können beide mit P zusammenfallen, oder in A, B, oder im ∞-Punkt der Fluchtlinie liegen. Bei der directen Application können die beweglichen Doppelpunkte offenbar nicht coincidiren (weil AB die einzige reelle Tangente durch A ist); aber der eine kann mit P zusammenfallen. — Ebenso können die zwei Punkte bei indirecter Lage imaginär werden; bei der directen sind sie immer reell.

9. Wie die fraglichen Punkte bei der Drehung der $x_1 y_1$-Ebene sich bewegen, und speciell, wenn die erwähnten Coincidenzen eintreffen, folgt aus dem soeben Gefundenen unmittelbar: die durch A resp. B gehende ausschneidende Gerade dreht sich in derselben Richtung mit der halben Geschwindigkeit; bei der Anfangslage (A_1 auf A) fällt sie mit $x = 0$ zusammen.

Man kann die Bewegung der zwei Punkte auch durch das folgende mechanische Mittel zur Anschauung bringen. Es ist offenbar, dass sie immer Schnittpunkte sind zwischen der xy-Abstandscurve und der entsprechenden, im jetzigen Falle congruenten $x_1 y_1$-Curve. Zeichnet man daher diese Curve einerseits auf einer festen Unterlage (der xy-Ebene) anderseits auf einem durchsichtigen Papier (der $x_1 y_1$-Ebene) und festigt mit einer Nadel den Punkt P_1 in P, so kann man bei Drehung des Papiers um P die entsprechenden Veränderungen in der Lage der beweglichen Doppelpunkte beobachten. Zwar können die Curven auch andere reelle Schnittpunkte haben; mittels der vorigen Auseinandersetzungen entscheidet man aber leicht, in welchen Schnittpunkten entsprechende Punkte zusammenfallen. In der Tat haben die Curven bei der directen Lage nur zwei endliche Schnittpunkte ausser P; denn bei jedem φ berühren sich die Curven dreipünktig in den unendlichen Kreispunkten, weil die Krümmungskreise in diesen Punkten, deren Centra notwendig im Focus P liegen (die Quadrate der Radien sind in der Tat $h^2 \pm 2ahi$) von der Drehung der $x_1 y_1$-Ebene nicht beeinflusst werden. Bei der indirecten Lage haben die Curven im allgemeinen 4 endliche Schnittpunkte ausser P; von diesen erkennt man aber leicht zwei als Doppelpunkte wegen der gleichen Entfernung von P oder der Lage auf derselben Geraden durch B. Die zwei übrigen, in welchen nicht projectivisch entsprechende Punkte zusammenfallen, müssen in der Tat, weil ein beliebiger Kreis mit Centrum in P die Curve in nur zwei endlichen Punkten schneidet, Coincidenzstellen solcher Curvenpunkte sein, welche zufolge der Congruenz der Curven correspondiren (beim Aufeinanderlegen der Curven zusammenfallen). Es ist

Digitized by Google

auch hieraus klar, dass bei directer Lage keine unwesentlichen Schnittpunkte auftreten können; zwei Punkte von ähnlicher Lage fallen dann nur bei der vollständigen Deckung der Curven zusammen.

10. Wir haben bis jetzt $k = +a$ angenommen. Welche Modificationen eintreten, wenn

$$k = -a$$

ist leicht zu finden. Auch dann sind die beiden Curven congruent, aber ihre Lagen zu den Coordinatenaxen sind nicht ganz dieselben, sondern mit Bezug auf die Ordinatenachsen symmetrisch, und sie decken einander daher bei der indirecten centralperspectivischen Lage der beiden Ebenen. Die Abwesenheit unwesentlicher Schnittpunkte findet also bei der indirecten Lage statt, die Gleichschenkligkeit der Doppelpunksdreiecke bei der directen Lage. Die beweglichen Doppelpunkte werden in jenem Falle von einer Geraden durch B, in diesem von einer Geraden durch A ausgeschnitten.

11. Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Falle

$$k^2 \gtrless a^2$$

über (b immerfort $= a$).

Wegen der Symmetrie der Transformationsformeln gilt es natürlich wie im Vorigen, dass die xy- und $x_1 y_1$-Curven für unveränderten Abstand paarweise congruent sind, obgleich nicht, wie für $k^2 = a^2$, zwei congruente Curven einander projectivisch entsprechen. Ebenso sind die Spitzenorte congruent.

Bei der directen perspectivischen Lage ist die Correspondenz, wie wir wissen, vertauschbar, und zwei entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden durch B und harmonisch zu B und dem Schnittpunkte jener Gerade mit $y = a$. Man erhält also die einer gewissen xy-Curve entsprechende $x_1 y_1$-Curve, wenn man die mit Bezug auf den Punkt B und die Gerade $y = a$ harmonische Curve construirt. Die Spitzenorte fallen zusammen, und es ist dem soeben Gesagten gemäss offenbar, dass die Schnittpunkte dieser Curve mit einer Geraden durch B paarweise zu B und $y = a$ harmonisch liegen. — In analoger Weise bei der indirecten perspectivischen Lage.

12. Wir werden nun etwas näher die Gestalt der Abstandscurven untersuchen; nehmen aber dabei an, dass h und k beide positiv sind.

Liegt P auf der Linie $y = a$, so wissen wir, dass die Curve vom 3ten Grade ist und die Gestalt der Fig. 3. hat. Bewegt sich

Digitized by Google

P auf einer Geraden durch B und nach B hin (Fig. 1.), so entsteht in P ein Doppelpunkt, dessen Tangenten von der Lage $y = a$ in positiver Richtung und von der Lage BP in negativer Richtung sich drehen. In dem spitzen und der y-Axe zugewendeten Winkel zwischen diesen Tangenten hat die Curve eine Schlinge (Fig. 4.), welche, wenn P sich der Fluchtlinie nähert, immermehr sich zusammenzieht, bis sie beim Erreichen des Spitzenortes (in S, Fig. 1.) verschwindet (Fig. 5.). Uebrigens hebt sich die Curve über die ursprüngliche Ovale mehr und mehr auf und nähert sich immer dem negativen Teil der Asymptote von oben, dem positiven von unten; dieser wird in einem endlichen Punkte geschnitten, welcher sich mehr und mehr entfernt. Der andere Curventeil gleicht der Serpentine der Curve 3ten Grades, schneidet aber den negativen Teil der Asymptote $y = -a$ in wachsender Entfernung von B. Die analytische Bestätigung dieser Verhältnisse ist leicht.

Wenn P die Wanderung fortsetzt, ist er isolirter Punkt (Fig. 6.). Die Curve ändert sich übrigens wie vorhin, bis sie, wenn P die Fluchtlinie erreicht, ganz ins Unendliche rückt.

Während P von C bis F (Fig. 1.) geht, rückt P_1 von C ins Unendliche (nach oben). Die Gestalt der entsprechenden Curve folgt aus ihrem Zusammenhang mit der soeben beschriebenen, zu P gehörigen (s. die nicht vollzogenen Curven der Figg. 4., 5., 6.). Man sieht leicht ein, dass von den 16 Schnittpunkten zweier entsprechenden Curven 12 immer reell und 4 immer imaginär sind. Zwei Schnittpunkte liegen in den unendlichen Kreispunkten, folglich zwei auch in den Punkten der Fluchtlinie, welche ihnen entsprechen ($x = \pm ai$, $y = 0$). Ein reeller Schnittpunkt liegt auf $y = a$, zwei (ein doppelter) in P und ebenso zwei in P_1. Die 7 übrigen liegen im ∞-Punkte der Fluchtlinie. Dass die Curven dort nicht weniger als 7 Schnittpunkte haben können, ist in der Tat unmittelbar aus den Figuren zu schliessen: die oberen Zweige haben Contact von ungerader, die unteren von gerader Ordnung; nehmen wir an, dass die Berührungen resp. 2- und 3-pünktig sind, so giebt dies in allem 7 Schnittpunkte.

13. Wir denken uns nun, dass man die x_1y_1-Ebene so verschiebt, dass P_1 mit P zusammenfällt, und darauf um P einen Winkel φ in positiver Richtung dreht. In jeder so erhaltenen Lage sind ausser P zwei in der entsprechenden Curve liegende Punkte Doppelpunkte. Ihre Lage wird durch die Gleichungen

$$\left(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi + \frac{ah}{k}\right)(\eta + k) = a(\xi + h)$$

$$\left(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi \mp \frac{ab}{k}\right)(\eta + k) = \mp ab$$

näher bestimmt, wo die oberen Zeichen zu nehmen sind, und im nun fraglichen speciellen Falle $b = a$ ist. Die unteren Zeichen gelten, wenn man vor der Drehung um P die $x_1 y_1$-Ebene um die Gerade $\eta = 0$ eine halbe Umdrehung machen lässt (so dass die Application indirect wird).

Die zwei Gleichungen sind äquivalent mit diesen:

$$\xi\eta \cos\varphi + \eta^2 \sin\varphi + \xi(k\cos\varphi - a) + \eta\left(k\sin\varphi + \frac{ah}{k}\right) = 0$$

$$akx\sin\varphi + ky(k - a\cos\varphi) \pm ab(k\cos\varphi - a) = 0$$

Diese ist die xy-Gleichung der Verbindungslinie der beweglichen Doppelpunkte. Die Enveloppe dieser Geraden ergiebt sich sehr leicht. Die Derivation der Gleichung mit Bezug auf φ liefert

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x}{y \mp b}$$

Durch Substitution, Quadriren und Reduction erhält man dann als Enveloppengleichung

$$\frac{k^2 x^2}{b^2(a^2 - k^2)} + \frac{k^2 y^2}{a^2 b^2} = 1$$

Die Enveloppe ist somit ein Kegelschnitt mit Centrum in $x = y = 0$ und Brennpunkten in $x = 0$, $y = \pm b$; die Curve ist Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $k < a$ oder $k > a$; der Schnittpunkt mit dem positiven Teile der y-Axe hat dieselbe Ordinate $\left(\frac{ab}{k}\right)$ wie P_1. Zu bemerken ist ferner, dass die Enveloppe unabhängig von der P-Abscisse (h) ist, und dass für beliebiges k dieselbe Curve der directen und der indirecten Application entspricht.

14. Dass die fragliche Enveloppe ein Kegelschnit mit Brennpunkten in $x = 0$, $y = \pm b$ sein musste, hätte man in der Tat ziemlich leicht voraussehen können.

Zwei projectivische Kegelschnittsbüschel generiren bekanntlich im allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung. Wenn aber ein selbstentsprechender Kegelschnitt existirt, fällt er aus der erschöpften Curve heraus, und es restirt ein Kegelschnitt. Ebenso enveloppiren die gemeinschaftlichen Tangenten entsprechender Curven in zwei projectivisch verwandten Kegelschnittsscharen im allgemeinen eine

Digitized by Google

Curve 4ter Classe, aber wenn eine Curve selbstentsprechend ist, einen Kegelschnitt.

Die $x_1 y_1$-Kreise mit Centra in P_1 bilden eine Kegelschnittsschaar mit den uneigentlichen Individuen: den 2 unendlichen Kreispunkten und dem doppelten gezählten Punkte P_1. Diesem System entspricht in der xy-Ebene eine Kegelschnittsschaar mit den uneigentlichen Individuen: $y = 0$, $x = \pm bi$ (welche Punkte den unendl. Kreispunkten der $x_1 y_1$-Ebene entsprechen) und der zweimal gezählte P. Wenn nun die Ebenen so auf einander gelegt werden, dass P_1 auf P fällt, so wird die uneigentliche Curve zweiter Classe „P zweimal gezählt“ selbstentsprechend, und die gemeinschaftlichen Tangenten entsprechender Curven enveloppiren einen Kegelschnitt. Dieser ist offenbar von der Drehung der $x_1 y_1$-Ebene und von der directen oder indirecten Lage ganz unabhängig, weil jeder der fraglichen $x_1 y_1$-Kreise bei einer solchen Lagenänderung in sich selbst übergeht. Und die reellen Brennpunkte sind $x = 0$, $y = \pm b$; denn der Kegelschnitt berührt „die gemeinschaftlichen Tangenten“ der einander entsprechenden uneigentlichen Curven zweiter Classe: $y = 0$, $x = \pm bi$; und die unendlichen Kreispunkte; die Punkte $y = 0$, $x = \pm bi$ sind also Brennpunkte; folglich auch $x = 0$, $y = \pm b$.

Aber die so gefundene Envoloppe ist offenbar dieselbe, welche in dem vorigen Art. gesucht wurde. Denn die Verbindungslinie zweier nebst P möglichen Doppelpunkte ist bei der entsprechenden Lage der Ebenen selbstentsprechend und also gemeinschaftliche Tangente eines gewissen $x_1 y_1$-Kreises mit Centrum in P und des entsprechenden xy-Kegelschnittes.

In der Tat giebt der Kreis

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

als $x_1 y_1$-Curve betrachtet, wie man leicht findet, die entsprechende xy-Curve

$$(kx - hy)^2 + b^2(y-k)^2 = \frac{k^2 r^2}{a^2} y^2$$

Führt man gewöhnliche Liniencoordinaten ein (Zwischenform $tx + uy - 1$), so gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

$$t^2 + u^2 = \frac{1}{r^2}(ht + ku - 1)^2$$

$$b^2 t^2 + 1 = \frac{a^2 b^2}{k^2 r^2}(ht + ku - 1)^2$$

Die Elimination von r^2 giebt

$$b^2(a^2-k^2)t^2+a^2b^2u^2=k^2$$

die Gleichung der Enveloppe in Liniencoordinaten. Die drei k^2-Werte, für welche die Enveloppe ausartet, sind 0, ∞ und a^2. Diese 3 Werte geben resp. die unendlichen Kreispunkte, die Punkte $y=0$, $x^2+b^2=0$ und — wie wir schon Art. 8. gesehen haben — $x=0$, $y^2=b^2$.

15. Wenn P eine zu der Fluchtlinie parallele Gerade durchläuft, umhüllt die entsprechende Abstandscurve eine gewisse Curve. Man findet leicht, dass diese Enveloppe derselbe Kegelschnitt ist, welcher von der Verbindungslinie der nebst P möglichen Doppelpunkte enveloppirt wird, wenn P auf der fraglichen Gerade liegt (und also k und damit die Enveloppe unverändert sind) und dass jede der Curven 4ten Grades, wenn $b=a$, den Kegelschnitt in zwei und nur zwei reellen Punkten berührt. Die Elimination von x aus der Gleichung des Abstandsortes

$$k^2(y^2-a^2)x^2-2hky(ky-a^2)x+(y-k)^2(k^2y^2-a^2b^2)$$
$$-h^2y^2(a^2-k^2)=0$$

und der Enveloppengleichung

$$a^2k^2x^2+(a^2-k^2)(k^2y^2-a^2b^2)=0$$

liefert nämlich die Gleichung 4ten Grades in y

$$(k^2y^2-a^2b^2)(ky-a^2)^2+a^2h^2y^2(a^2-k^2)=0$$

oder lieber das Quadrat des linken Gliedes. Man findet leicht, dass diese Gleichung, wenn $b=a$, immer zwei und nur zwei reelle Wurzeln hat, die eine positiv, die andere negativ. Sie liegen zwischen $+\frac{a^2}{k}$ und $-\frac{a^2}{k}$, oder nicht, je nachdem $k^2 \gtrless a^2$ (s. die Behandlung des allgemeinen Falles Art. 20.). Hieraus folgt, dem Vorigen gemäss, dass den zwei obigen xy-Gleichungen von zwei doppelt zu zählenden reellen Wertsystemen genügt wird. Dies bedeutet aber eine doppelte reelle Berührung zwischen den entsprechenden Curven. Der eine Contact kann aber ausarten: wenn die Curve 4ten Grades Spitze (in P) hat, so entsteht das eine zweipunktige Zusammentreffen mit dem Kegelschnitte dadurch, dass dieser durch die Spitze geht. Wir haben nämlich schon (Art. 5.) bemerkt, dass der Spitzenort von den Geraden $y=k$ in den — nun in zwei Richtungen als Enveloppen befundenen — Kegelschnitten

$$a^2k^2x^2+(a^2-k^2)k^2y^2=a^2b^2(a^2-k^2)$$

ausgeschnitten wird: m. a. W. die Substitution von $x=h$, $y=k$ in dieser Kegelschnittsgleichung liefert die Spitzenbedingung.

Die Abscissen der Contactspunkte bestimmen sich durch die Gleichung

$$kx(a^2-ky) = hy(a^2-k^2)$$

welche man durch Elimination von x^2 und Beachten der von x vollständig befreiten Gleichung erhält. Wenn y die positive Wurzel dieser Gleichung ist, so haben dem Vorigen zufolge a^2-ky und a^2-k^2 gleiche Zeichen, und ebenso wenn y die negative Wurzel bedeutet. Hieraus folgt, dass auch die Abscissen der Contactspunkte ungleiche Zeichen haben; und zwar haben, wenn $h > 0$, $k > 0$, Abscisse und Ordinate gleiche Zeichen.

16. Wir sind nun im Stande die Bedingung der zwei nicht in P festen Doppelpunkte bei der Drehung der x_1y_1-Ebene um den mit P zusammenfallenden P_1 näher zu verfolgen. Sie werden von einer mit φ veränderlichen Tangente des zu P gehörenden Kegelschnittes in der entsprechenden Abstandscurve ausgeschnitten. Von den 4 Schnittpunkten gehören 2 zu der directen, 2 zu der indirecten Application. Der Winkelcoefficient jener Tangente ist ja immer (s. oben)

$$m = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \frac{k}{a}}$$

Wenn $k^2 < a^2$, rollt also die Tangente, da die x_1y_1-Ebene eine Umdrehung vollmacht, in derselben Richtung, wie die Drehung geht, einmal um die Ellipse. Die Anfangslage ($\varphi = 0$) ist $y = \mp\frac{ab}{k}$, je nachdem die Application direct oder indirect ist. Für $k^2 > a^2$ gelten dieselben Anfangslagen, aber die Drehungsrichtung der Tangente ist nun, wenn $k > 0$, derjenigen der Ebene entgegengesetzt, bis die Tangente $\left(\text{für } \cos\varphi = \frac{a}{k}\right)$ die Hyperbel-Asymptote $y\sqrt{k^2-a^2} = -ax$ erreicht; sie wendet sich dann, um nach Erreichen der anderen Asymptote wieder die Drehungsrichtung zu ändern und für $\varphi = 2\pi$ in die Anfangslage zurückzukommen; für $k < 0$ umgekehrt.

17. Wir nehmen nun, der Einfachheit wegen, wieder ausdrücklich $b = a$ an, und lassen $h > 0$, $k > 0$ sein.

Zuerst sei $k < a$. Bei directer Lage liegen, wie wir sahen, die zwei beweglichen Doppelpunkte für $\varphi = 0$ auf der Linie

$$y = -\frac{a^2}{k}$$

Der eine ist offenbar unendlich. Der andere liegt auf der Ver-

Digitized by Google

längerung der Geraden PB (Fig. 4., 5., 6.); denn die zwei einander entsprechenden Punkte Q und Q_1, in denen PB (und ihre Verlängerung) die nicht durch P resp. P_1 gehenden Zweige der zugehörigen Curven schneidet, haben denselben Abstand wie P und P_1 (weil offenbar $P_1 Q_1 = PQ$) und fallen also bei einer Verschiebung von der directen centralperspectivischen Lage zusammmen, wenn P_1 auf P fällt. (Auch findet man, dass Q die Ordinate $-\frac{a^2}{k}$ hat.) Wenn nun die Ellipsentangente in positiver Richtung rollt, bewegt sich der ursprünglich in Q liegende Doppelpunkt (M) in der Richtung des Pfeiles (Fig. 5.). Der andere (L) kommt vom Unendlichen in dem anderen (sagen wir oberen) Teile der Curve hervor. Denn die zwei nebst M im unteren Teile liegenden Schnittpunkte mit der Tangente werden offenbar nach einer gewissen Drehung gleichzeitig imaginär und entsprechen also notwendig der indirecten Lage. Die weitere Bewegung von L und M ist selbstverständlich (man beachte bei reellem Doppelpunkte in P die Contacte in R und S). Sie sind „immer reell, und L verlässt niemals den oberen, M den unteren „Curvenzweig". Nach einer halben Umrollung (welcher auch $\varphi = \pi$ entspricht) hat L die Schlinge passirt (falls eine solche existirt) und ist nach $L_4 (P_1)$ gelangt, M ins Unendliche gerückt. Während der zweiten Halbumdrehung setzt sich L ins Unendliche fort, M kommt auf der linken Seite des unteren Zweiges hervor, um, nach Passiren des Ellipsenpunktes S, für $\varphi = 2\pi$ mit Q sich wieder zu vereinigen.

Hiermit ist natürlich auch gegeben, welche zwei Schnittpunkte in jeder Lage der rollenden Tangente der indirecten Application entsprechen. Für $\varphi = 0$ ist die Tangente, wie wir sahen, $y = \frac{a^2}{k}$. Der eine Doppelpunkt liegt dann in $\overline{L_1}$ (Fig. 5.), der andere ist unendlich. Bei positiver Drehung nähern sie sich einander, fallen bei Contact des oberen Curvenzweiges zusammen, werden darauf imaginär und bleiben es, bis die Tangente in einer gewissen Lage den unteren Curventeil berührt. Es ist denkbar, dass dies nicht geschieht, ehe der Ellipsenpunkt S erreicht wird. Die Form und Lage der Curven zeigen ohne Weiteres, dass es ebendann eintrifft, wenn die Curve 4ten Grades in S Inflexion hat. Bei fortgesetzter Drehung lösen sich dann die drei zusammenfallenden Schnittpunkte der Curve und der Ellipsentangente in drei reelle, verschiedene Punkte auf, von denen einer (L) nach links, zwei (M, M) nach rechts gehen. Von diesen geht offenbar M mit kleinerer Geschwindigkeit: wenn M nach Q gekommen ist, hat M schon $\overline{M_2}$ erreicht; L ist dann unendlich. Wenn aber S über oder unter dem mittleren Inflexionspunkt des unteren Curventeiles liegt, muss eine Contact eintreffen, ehe M nach S gekommen ist. Der Verlauf wird dann dem soeben beschriebenen

Digitized by Google

ähnlich; aber M fällt nun nur mit dem einen von den zwei anderen Punkten in S zusammen, nämlich mit dem nach links oder nach rechts gehenden ($\overline{L}$ oder $\overline{M}$), je nachdem S über oder unter dem Inflexionspunkte liegt. Für $\varphi < \pi$ liegt zuerst sowol $\overline{L}$ als $\overline{M}$ auf der rechten Teile des unteren Curvenzweiges; sie nähern sich einander mehr und mehr, fallen zusammen und werden imaginär, treten schliesslich nach der ersten Berührung des oberen Curventeiles in diesem auf und wandern vom Contactspunkte aus in entgegesetzten Richtungen ins Unendliche; der eine begegnet S im Ellipsenpunkte R.

Für $k > a$ wird der Verlauf ganz analog und folgt aus dem beschriebenen so unmittelbar, dass wir darauf nun nicht näher eingehen.

Bei der directen Application sind also die beweglichen Doppelpunkte immer reell, und es giebt keine Coincidenzen. Bei indirecter Application hat man 4 Coincidenzen. Für $k < 0$ wäre es umgekehrt. Uebrigens fällt sowol bei directer als indirecter Lage der eine der beweglichen Punkte zweimal mit P zusammen, wenn P reeller Doppelpunkt oder Spitze der Abstandscurve ist.

18. Natürlich sind die beweglichen Doppelpunkte immer Schnittpunkte der beiden zu P und P_1 gehörenden Abstandscurven; und man kann diesen Umstand benutzen, um die Bewegung der Punkte bei der Drehung der $x_1 y_1$-Ebene zu directer Anschauung zu bringen. Welche zwei Schnittpunkte man in jedem Falle zu wählen hat, ist leicht zu entscheiden, wenn man sich erinnert, in welcher Weise die zwei Curven einander entsprechen; oder man kann benutzen, dass die Verbindungslinie der beweglichen Doppelpunkte, dem Vorigen zufolge, offenbar immer gemeinschaftliche Tangente zweier Kegelschnitte (Ellipse und Hyperbel) ist, von denen der eine in der xy-Ebene, der andere in der $x_1 y_1$-Ebene fest liegt. Wir unterlassen die genauere Verfolgung der Bewegung der Schnittpunkte. Es mag nur bemerkt werden, dass die Anzahl der beweglichen, einander nicht entsprechenden (reellen oder imaginären) Schnittpunkte 6 ist. Denn die Curven schneiden einander immer 4-pünktig in P, zweipünktig in den unendlichen Kreispunkten und einfach in den beweglichen Doppelpunkten.

19. Wir werden nun den allgemeinen Fall

$$b \gtrless a$$

etwas näher betrachten.

Digitized by Google

Wie schon bemerkt, zerfällt für

$$k = \pm a$$

die Abstandscurve in die Gerade $y = \pm a$ und eine Curve 3ten Grades. Den Verlauf dieser Curve (für $k = +a$, $h > 0$) zeigt die vollzogene Curve der Fig. 7. (Die Gleichung steht Art. 3). Zu bemerken ist, dass sie durch die Punkte (h, a), $(0, a)$, $(0, b)$ und $(0, -b)$ *) geht, wie die Gleichung unmittelbar zeigt. Im Falle $b = a$ gieng, wie wir sahen, die Tangente in (h, a) immer durch $(0, -a)$. Die Gleichung dieser Tangente ist nun

$$(y - a)(h^2 + b^2 - a^2) = 2ah(x - h)$$

Eine kleine Rechnung zeigt, dass sie, wenn h variirt, den Centralkegelschnitt

$$a^2x^2 + (a^2 - b^2)y^2 = a^2(a^2 - b^2)$$

enveloppirt. Es ist (s. oben) dieselbe Curve, deren Tangenten für einen Punkt $k = b$ in der zugehörigen Abstandscurve 4ten Grades die zwei beweglichen Doppelpunkte ausschneidet. Wenn man die Origo in die Punkte $(0, -b)$ legt, wird die Gleichung der fraglichen die Curve 3ten Grades

$$\bar{\eta}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) + (a - b)\bar{\xi}^2 - 2h\bar{\xi}\bar{\eta} - (a + 3b)\bar{\eta}^2 - 2bh\bar{\xi} - 2b(a + b)\bar{\eta} = 0$$

Die Tangente in diesem Punkte ist also, wie für $b = a$, senkrecht zur Verbindungslinie mit dem Punkte P ($x = h$, $y = a$). Aber jene Tangente ist nun nicht, wie im Specialfalle, Inflexionstangente. Die Bedingung hierfür wäre, dass $hx + (a + b)y$ als Factor in $(a - b)x^2 - 2hxy - (a + 3b)y^2$ eingienge. Dies findet aber statt, nur wenn

$$(a - b)[(a + b)^2 + h^2] = 0$$

also für keinen reellen h-Wert, wenn nicht $b = a$. Abscisse und Ordinate ($\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$) für den einfachen Schnittpunkt (E) der fraglichen Tangente mit der Curve sind $\frac{a^2 - b^2}{h}$ und $-(a - b)$, oder mit Benutzung der ursprünglichen Coordinaten

$$x = \frac{a^2 - b^2}{h}, \quad y = -a$$

Die Gerade PE hat den Winkelcoefficient $-\frac{2ah}{a^2 - b^2 - h^2}$; sie ist also die Tangente in P. Die Bedingung für Inflexion in E ist

*) Hier sind die ursprünglichen Coordinaten x, y benutzt.

$$(a^2-b^2)[h^4+2(a^2+b^2)h^2+(a^2-b^2)^2]=0$$

also muss $b=a$ sein.

Die Enveloppe der Verbindungslinie der beweglichen Doppelpunkte (P_1 auf P) degenerirt für $k=a$ zu den zwei Focalpunkten $x=0$, $y=\pm b$ (A, B). Der Punkt $+b$ (A) entspricht der directen, $-b$ (B) der indirecten Application; für $k=-a$ umgekehrt. Es ist ja so im Specialfalle $b=a$; dass es immer gilt, kann leicht verificirt werden. Die oben (Art. 13.) aufgestellte allgemeine Gleichung der umhüllenden Doppellinie geht nämlich, wenn $k=a$ ist. in diese über:

$$y\mp b=-\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}x=-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi . x$$

Die nicht vollzogene Curve ist die entsprechende bei directer perspectivischen Lage mit Centrum in B. Sie muss offenbar durch P, C, B und Q gehen und die Asymptote $y=-3a$ haben. In B berührt sie die entsprechende Curve, und die gemeinschaftliche Tangente schneidet sie ausserdem im endlichen Schnittpunkte mit der Asymptote (G). Durch G geht auch die Tangente in P. — Vergleiche übrigens die Behandlung des Specialfalles $b=a$.

Natürlich können wir, wie in diesem Falle, die zwei nebst P möglichen Doppelpunkte als Schnittpunkte zwischen den zu P und P_1 gehörenden Abstandscurven darstellen. Zu bemerken ist jedoch, dass für $b \lessgtr a$ auch bei directer Lage v i e r bewegliche Schnittpunkte auftreten. Die Curvengleichungen sind mit P (P_1) als Origo

$$(\xi^2+\eta^2)(\eta+2a)+2ah\xi+(a^2-b^2-h^2)\eta=0$$
$$(\xi^2+\eta^2)(\eta+2b)+2bh\xi+(b^2-a^2-h^2)\eta=0$$

Mit jener Curve haben, wie man sehr leicht findet, die Kreise

$$\xi^2+\eta^2=a^2-b^2-h^2\mp 2ahi$$

mit dieser die Kreise

$$\xi^2+\eta^2=b^2-a^2-h^2\mp 2bhi$$

in den ∞-Punkten der Geraden $y=+ix$ resp. $y=-ix$ eine dreipünktige Berührung. Die Curven berühren einander also in diesen Punkten nur zweipunktig, wenn nicht $b=a$; und dies gilt natürlich auch nach einer beliebigen Drehung. Folglich existiren 5 endliche Schnittpunkte. Ebenso bei indirecter Lage.

Digitized by Google

20. Wie endlich der allgemeine Fall

$$b \gtrless a, \quad k^2 \gtrless a^2$$

sich gestaltet, ist in nicht geringem Masse schon aus dem Vorigen klar.

Bezüglich dem Verlaufe der Abstandscurve bemerken wir Folgendes. Sie hat, wie wir wissen, mit dem Kegelschnitte

$$a^2 k^2 x^2 + (a^2 - k^2) k^2 y^2 = a^2 b^2 (a^2 - k^2)$$

einen 4-fachen Contact. Im Falle $b = a$ waren aber 2 der 4 Contactspunkte imaginär. Dies findet nicht immer Statt. Die Gleichung

$$(k^2 y^2 - a^2 b^2)(ky - a^2)^2 + a^2 h^2 y^2 (a^2 - k^2) = 0$$

welche die Ordinaten der Berührungspunkte bestimmt, hat nämlich in gewissen Fällen 4 reelle Wurzeln [welche zufolge der Gleichung

$$kx(a^2 - ky) = hy(a^2 - k^2)$$

auch reelle Abscissen geben]. Einfache Ueberlegungen bezüglich der Function

$$\left(k^2 - \frac{a^2 b^2}{y^2}\right)(ky - a^2)^2 + a^2 h^2 (a^2 - k^2)$$

und ihrer Derivirten

$$\frac{2}{y^3}(ky - a^2)(k^3 y^3 - a^4 b^2)$$

zeigen, dass — wenn wir

$$\frac{k^2 (a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^3}{k^2 - a^2} = h_1^2$$

setzen und $k > 0$, $h \gtrless 0$ annehmen — die Wurzeln der fraglichen Gleichung sich folgendermassen verhalten:

1) $a > b$

$k < a \qquad -\frac{ab}{k} < y_1 < 0 < y_2 < +\frac{ab}{k}$ (y_3, y_4 imag.)

$k = a \qquad y_1 = -\frac{ab}{k}, \; y_2 = +\frac{ab}{k}, \; y_3 = y_4 = +\frac{a^2}{k}$

Digitized by Google

$k > a$

$$h^2 \leqq h_1^2 \quad y_1 < -\frac{ab}{k}, \; +\frac{ab}{k} < y_2 \leqq y_3 < +\frac{a^2}{k} < y_4$$

$$h^2 > h_1^2 \quad y_1 < -\frac{ab}{k} \; (y_2, \, y_3 \text{ imag.}) \; +\frac{a^2}{k} < y_4$$

2) $a = b$

$k < a \qquad -\frac{a^2}{k} < y_1 < 0 < y_2 < +\frac{a^2}{k} \; (y_3, \, y_4 \text{ imag.})$

$k = a \qquad y_1 = -\frac{a^2}{k}, \; y_2 = y_3 = y_4 = +\frac{a^2}{k}$

$k > a \qquad y_1 < -\frac{a^2}{k}, \; +\frac{a^2}{k} < y_2 \; (y_3, \, y_4 \text{ imag.})$

3) $a < b$

$k < a$

$$h^2 \leqq h_1^2 \quad -\frac{ab}{k} < y_1 < 0 < y_2 < +\frac{a^2}{k} < y_3 \leqq y_4 < +\frac{ab}{k}.$$

$$h^2 > h_1^2 \quad -\frac{ab}{k} < y_1 < 0 < y_2 < +\frac{a^2}{k} \; (y_3, \, y_4 \text{ imag.})$$

$k = a \qquad y_1 = -\frac{ab}{k}, \; y_2 = y_3 = +\frac{a^2}{k}, \; y_4 = +\frac{ab}{k}$

$k > a \qquad y_1 < -\frac{ab}{k} \; (y_2, \, y_3 \text{ imag.}) \; y_4 > +\frac{ab}{k}$

Für $h = 0$ erhält man immer nur reelle y-Werte: $+\frac{ab}{k}$, $-\frac{ab}{k}$ und $\frac{a^2}{k}$ zweimal gezählt. Die ersteren geben $x = 0$. Für $\frac{a^2}{k}$ wird die Gleichung ersten Grades, welche x bestimmt, identisch; zur Bestimmung von x hat man die Kegelschnittsgleichung zu benutzen; sie giebt die zwei Werte $\pm\frac{1}{k}\sqrt{(k^2-a^2)(a^2-b^2)}$, welche nur für $a > b$, $k > a$ und $a < b$, $k < a$ reell und verschieden sind.

Zeichenwechsel für k (= Z.-w. für y) beeinflusst natürlich nicht die Realitätsverhältnisse.

Die Felder, in denen P liegen muss, wenn die fraglichen 4 Contactspunkte sämtlich reell sein sollen, werden also offenbar von der Curve

$$x^2(y^2 - a^2) = y^2)(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^3$$

und den Geraden $y = \pm a$ abgegrenzt; s. die nicht vollzogenen Curven der Figg. 8. ($b_1 = 2a_1$) und 9. ($a = 2b$).

Die vollzogenen Curven dieser Figuren sind die Abstandsorte der Punkte $x = 0$, $y = \frac{9}{10}a$ (P) und $x_1 = 0$, $y_1 = \frac{10}{9}b$ (P_1) Sie sind natürlich, wie immer für $h=0$, symmetrisch zu den Ordinatenaxen und haben je zwei Inflexionen in den ∞-Punkten der Fluchtlinien.

Die nähere Bestimmung der Lage der Doppelpunkte gestaltet sich im allgemeinen Falle $\left(b \gtrless a\right)$ in so ähnlicher Weise, wie für $b = a$, dass wir mit Bezug hierauf nur zu dem Vorigen hinweisen.

Die Figg. 8 und 9. zeigen zwei Paare entsprechender Doppelpunktsdreiecke: PLM und $P_1 L_1 M_1$ entsprechen indirecter, PNR und $P_1 N_1 R_1$ directer Lage.

Lund, September 1889.

Digitized by Google

XIII.

Ueber die Spitzenörter aller orthogonalen, gleichseitigen oder dazu dualen Kegel, welche an eine Fläche 2. Ordnung tangential gehen.

Von

Herrn Dr. **A. Koch**,

Gymnasial-Hülfslehrer in Hildesheim.

---

§. 1.

Vorbemerkung.

In meiner Dissertation: „Ueber die Oerter der Punkte, aus denen ein gegebener Kegelschnitt durch einen orthogonalen oder einen gleichseitigen oder einen der zu diesen dualen Kegel projicirt wird" (Münster, Theissing. 1887.) ist gezeigt, dass ein Kegel, dessen Axengleichung lautet:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0$$

3) **orthogonal** ist, wenn A, B, C der Bedingung unterliegen:

$$(A+B-C)(A-B+C)(-A+B+C)=0$$

4) **dual-orthogonal** ist, wenn die Bedingung besteht:

$$\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=0$$

1) **gleichseitig** ist, wenn

$$A+B+C=0$$

Digitized by Google

2) **dual-gleichseitig** ist, wenn

$$BC + CA + AB = 0 \text{ ist.} \quad (\S.\ 1. \text{ und } 2.)$$

Ist nun die Gleichung eines Kegels für rechtwinklige Coordinaten in der allgemeinsten Form gegeben:

$$f \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + za_{24}y$$
$$+ 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

so geht diese für ein neues, dem vorigen paralleles Coordinatensystem mit der Kegelspitze als Anfangspunkt in die Gleichung über:

$$f \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z_2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}yx + 2a_{12}xy = 0$$

wo die a_{ik} dieselben Grössen geblieben sind.

Soll diese Gleichung $f = 0$ auf die Axen des Kegels als Coordinatenaxen transformirt werden, d. h. die einfache Form annehmen:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

so ergeben sich die Coefficienten A, B, C einfach als die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\tau \equiv k^3 - k^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + k\{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)$$
$$+ (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)\} - \{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{1}\cdot a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2\} = 0$$

Sind α_1, α_2, α_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\sigma \equiv x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

so kann diese auch geschrieben werden:

$$\sigma \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0$$

Die Vergleichung gleich hoher Potenzen von x ergiebt die Gleichheiten:

1) $-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = a_1$

2) $\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = a_2$

3) $-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = a_3$, also auch

4) $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{1}{\alpha_3} = -\dfrac{a_2}{a_3}$

Aus 1) und 4) ergeben sich sogleich die Sätze:

1. „Wenn in der kubischen Gleichung $\sigma = 0$ die Summe der „Wurzeln verschwindet, so ist der Coefficient von x^2, also a_1 gleich „null."

2. „Wenn die Summe der reciproken Werte der drei Wurzeln „verschwindet, so ist der Cofficient von x, also a_2 gleich null."

Ist ferner:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

Digitized by Google

so ist nach 1) $-\frac{\alpha_1}{2}$ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\sigma = 0$, d. h.

$$-\frac{\alpha_1^3}{8}+\frac{\alpha_1^3}{4}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{2}+\alpha_3=0$$

oder

$$\alpha_1^3-4\alpha_1\alpha_2+8\alpha_3=0$$

Es ergiebt sich daraus der Satz:

3. „Wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung $\sigma = 0$ in der „Beziehung stehen, dass die Summe (oder Differenz) zweier derselben „der dritten Wurzel gleich ist, so besteht zwischen den Coefficienten „die Relation:"

$$a_1^3-4a_1a_2+8a_3=0$$

Ist endlich

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(-\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)=0$$

so folgt aus 4), dass $-\frac{2a_3}{a_2}$ eine Wurzel von $\sigma = 0$ ist, d. h. es besteht die Bedingungsgleichung:

$$-\frac{8a_3^3}{a_2^3}+\frac{4a_3^2a_1}{a_2^2}-\frac{2a_3a_2}{a_2}+a_3=0$$

oder

$$-8a_3^2+4a_1a_2a_3-a_2^3=0$$

Daraus folgt:

4. „Wenn die Summe (oder Differenz) der reciproken Werte „irgend zweier Wurzeln der Gleichung $\sigma = 0$ gleich dem reciproken „Werte der dritten Wurzel ist, so besteht zwischen den Coefficienten „die Beziehung:"

$$-8a_3^2+4a_1a_2a_3-a_2^3=0$$

(s. Dissertation § 3.)

Setzen wir nun in der kubischen Gleichung $\tau = 0$, deren Wurzeln die Coefficienten der Axengleichung des durch die Gleichung für $f = 0$ dargestellten Kegels sind,

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(a_{11}+a_{22}+a_{33})\\
a_2 &= a_{11}a_{22}-a_{12}^2+a_{22}a_{33}-a_{23}^2+a_{33}a_{11}-a_{31}^2\\
a_3 &= -(a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{31}^2-a_{33}a_{12}^2)
\end{aligned}$$

und legen diesen Ausdrücken die Bedingungen 1. bis 4. auf, so ist der durch die Gleichung $f = 0$ dargestellte Kegel nach den Sätzen 1) bis 4) im Anfange dieses Paragraphen bzhw. gleichseitig, dualgleichseitig, othogonal, dual-orthogonal.

Digitized by Google

§. 2.

Die Gleichung eines Tangentialkegels einer gegebenen Fläche 2. Ordnung und Aufstellung der Gleichungen unserer Punktörter.

Ist irgend eine durch die allgemeine Gleichung

$$\varphi \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \ldots + a_{44} = 0$$

dargestellte Fläche 2. Ordnung gegeben, so ist die Gleichung eines Tangentialkegels derselben, dessen Spitze die Coordinaten x', y', z' hat:

$$\Pi'^2 - \varphi'.\varphi \equiv \left(\begin{array}{l} (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})x \\ +(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})y \\ +(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})z \\ +a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44} \end{array}\right)^2$$

$$- \left(\begin{array}{l} +(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})x' \\ +(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_2^4)y' \\ +(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})z' \\ +a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44} \end{array}\right)$$

$$. \left(\begin{array}{l} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{15})x \\ +(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})y \\ +(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})z \\ +a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{array}\right) = 0$$

Nennt man die Coefficienten dieser in der allgemeinen Form dargestellten Kegelgleichung b_{11}, b_{22}, ... b_{12}, .˙. und setzt abkürzend:

$$a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14} = \varphi_1'$$
$$a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24} = \varphi_2' \quad \text{etc.}$$

so ergiebt sich:

$$b_{11} = \varphi_1'^2 - a_{11}\varphi'; \quad b_{22} = \varphi_2'^2 - a_{22}\varphi'; \quad b_{33} = \varphi_3'^2 - a_{33}\varphi'$$
$$b_{44} = \varphi_4'^2 - a_{44}\varphi'; \quad b_{12} = \varphi_1'.\varphi_2' - a_{12}\varphi'; \quad b_{23} = \varphi_2'.\varphi_3' - a_{23}\varphi'$$
$$b_{31} = \psi_3'.\varphi_1' - a_{31}.\varphi'; \quad b_{14} = \varphi_1'.\varphi_4' - a_{14}\varphi'$$
$$b_{24} = \varphi_2'.\varphi_4' - a_{24}\varphi'$$
$$b_{34} = \varphi_3'.\varphi_4' - a_{34}\varphi'$$

Bildet man jetzt aus diesen b_{ik} die Coefficienten a_1, a_2, a_3 der früher aufgestellten kubischen Gleichung $\tau = 0$, deren Wurzeln die Coefficienten der Axengleichung einer Fläche 2. Ordnung lieferten, so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$-a_1 \equiv b_{11}+b_{22}+b_{33} = \varphi_1'^2+\varphi_2'^2+\varphi_3'^2-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\varphi'$$

$$\begin{aligned} a_2 \equiv\ & b_{11}b_{22}-b_{12}^2+b_{22}b_{33}-b_{23}^2+b_{33}b_{11}-b_{31}^2 \\ =\ & (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\varphi'^2-\varphi'.\{a_{92}\varphi_1'^2+a_{11}\varphi_2'^2-2a_{12}\varphi_1'.\varphi_2'\} \\ +\ & (a_{22}a_{33}-a_{23}^2)\varphi^2-\varphi'.\{a_{33}\varphi_2'^2+a_{22}\varphi_3'^2-2a_{23}\varphi_2'.\varphi_3'\} \\ +\ & (a_{33}a_{11}-a_{31}^2)\varphi'^2-\varphi'.\{a_{11}\varphi_3'^2+a_{33}\varphi_1'^2-2a_{13}\varphi_1'.\varphi_3'\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a_3 \equiv\ & b_{11}b_{22}b_{33}+2b_{23}b_{31}b_{12}-b_{11}b_{23}^2-b_{22}b_{13}^2-b_{33}b_{12}^2 \\ =\ & -\varphi'^2.\{a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{21}a_{32}^2-a_{33}a_{12}^2\} \\ +\ & 2\varphi_2'.\varphi_3'.\varphi'^2.(a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23})+2\varphi_3'.\varphi_1'.\varphi'^2(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ +\ & 2\varphi_1'.\varphi_2'.\varphi'^2.(a_{23}a_{34}-a_{33}a_{12})+\varphi'^2.\{\varphi_1'^2(a_{22}a_{33}-a_{23}^2) \\ +\ & \varphi_2'^2.(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)+\varphi_3'^2.(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\} \end{aligned}$$

Die übrigen Glieder heben sich fort.

Setzen wir jetzt:

$$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}) = A_1$$

$$-(a_{11}a_{22}a_{33}+2b_{23}a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{31}^2-a_{33}a_{12}^2)$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_3$$

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2+a_{22}a_{33}-a_{23}^2+a_{33}a_{11}-a_{31}^2 \equiv A_{11}+A_{22}+A_{33} = A_2$$

worin die A_{ik} die Adjuncten der Determinante $-A_3$ bedeuten; ferner:

$$\varphi_1'^2+\varphi_2'^2+\varphi_3'^2 = \sigma$$

$$\varphi_1'^2.(a_{22}+a_{33})+\varphi_2'^2(a_{33}+a_{11})+\varphi_3'^2.(a_{11}+a_{22})$$
$$-2a_{12}\varphi_1'.\varphi_2'-2a_{23}.\varphi_2'.\varphi_3'-2a_{31}.\varphi_3'\varphi_1'$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & \varphi_1' \\ \varphi_1' & \varphi_3' & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \varphi_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \varphi_2' \\ \varphi_2' & \varphi_3' & 0 \\ a_{23} & a_{33} & \varphi_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} & \varphi_2' \\ \varphi_2' & \varphi_1' & 0 \\ a_{12} & a_{11} & \varphi_1' \end{vmatrix} = \psi$$

Endlich ist der Factor von φ'^2 in dem Ausdrucke für $-a_3$ gleich $A_{11}\varphi_1'^2+A_{22}\varphi_2'^2+\ldots+2A_{12}\varphi_1'.\varphi_2'+\ldots$

$$\equiv -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \varphi_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \varphi_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \varphi_3' \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & 0 \end{vmatrix} \equiv -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & -\varphi'+a_{14}x'+a_{24}y'+a_{34}z'+a_{44} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \varphi_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \varphi_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \varphi_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -\varphi'+a_{44} \end{vmatrix} = -(A_3\varphi'+\Delta)$$

wo Δ die Discriminante der quaternären quadratischen Form φ bedeutet.

Es wird also:

$$\begin{cases} -a_1 = A_1\varphi'+\sigma \\ \quad a_2 = \varphi'.\{A_2\varphi'-\psi\} \\ -a_3 = A_3\varphi'^3-\varphi'^2.(A_3\varphi'+\Delta) = -\varphi'^2.\Delta \end{cases}$$

Da nach früherem $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ (§. 1. 1) and 2)) die Bedingungen sind, welcher der Spitze x', y', z' des Tangentenkegels an unserer durch $\varphi = 0$ dargestellte F^2 zu genügen hat, damit er ein gleichseitiger, bzhw. ein dazu dualer (reciproker) ist, und da ferner die Functionen φ', σ und ψ von der 2. Dimension in x', y', z' sind, so ist zunächst der Spitzenort aller gleichseitigen Tangentenkegel der gegebenen F^2 wieder eine Fläche 2. Ordnung, welche, wie leicht zu sehen, centrisch, und zwar mit der ersten concentrisch ist, wenn diese centrisch ist. Ferner besteht der Spitzenort aller zum gleichseitigen dualen Tangentenkegel aus 2 Teilen. Der erste ist die gegebene F^2 selbst ($\varphi' = 0$). Von diesem Teile wollen wir absehen und den andern Teil, dargestellt durch die Gleichung:

$$A_2\varphi'-\psi = 0$$

speciell den Spitzenort aller zum gleichseitigen dualen Tangentenkegel nennen. Da ψ auch in x', y', z' vom 2. Grade ist, so ist also dieser Spitzenort gleichfalls eine Fläche 2. Ordnung, und zwar centrisch, wenn es die gegebene F^2 ist; beide haben denselben Mittelpunkt.

Bildet man nun aus den a_i die Functionen:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\equiv a_{13}-4a_1a_2+8a_3 \\ \mathrm{A}_1 &\equiv -8a_3^2+4a_1a_2a_3-a_2^3 \end{aligned}$$

so sind nach dem vorigen Paragraphen $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{A}_1 = 0$ die Bedingungen, dass der Kegel mit der Spitze x', y', z' orthogonal oder dazu dual ist. Denkt man sich x', y', z' als variable Coordinaten (x, y, z), so erhalten wir demnach als Gleichungen derjenigen Punktörter, von deren Punkten aus eine vorliegende Fläche 2. Ordnung ($\varphi = 0$) von einem orthogonalen bzhw. dazu dualen Kegel tangirt wird, folgende:

Digitized by Google

$$\mathrm{A} \equiv -\{A_1\varphi+\sigma\}^3+4(A_1\varphi+\sigma)(A_2\varphi-\psi).\varphi+8\varphi^2\Delta w^2=0$$
$$\mathrm{A}_1 \equiv -\varphi^2.\{8\varphi\Delta^2 w^4+4(A_1\varphi+\sigma)(A_1\varphi+\psi)\Delta w^2+(A_2\varphi-\psi)^3\}=0$$

Dass in $\mathrm{A}_1=0$ der Factor φ^3 auftritt, bedentet, dass die gegebene F^2 selbst dem betreffenden Punktorte angehört, und zwar dreifach. In der Tat kann ja wegen der Bedingung:

$$\cos\varphi=\operatorname{ctg}\vartheta$$

(cf. Schröter, Oberfl. 2. Ord. §. 25. und Dissertation Seite 8) ein zum dualen orthogonalen Kegel zu einer Ebene (der Tangentialebene im Flächenpunkte) degeneriren, weil stets

$$\cos 90^0=\operatorname{ctg} 90^0=0$$

ist. Sehen wir von diesem Teile ab, so ergiebt sich:

„dass die Spitzen aller orthogonalen und dazu dualen Tangen-
„tenkegel einer Fläche 2. Ordnung eine Fläche 6. Ordnung ist, und
„zwar eine centrische, wenn die gegebene F^2 centrisch ist."

§. 3.

Ueber die Oerter der Punkte, von denen aus an eine gegebene F^2 gleichseitige oder dual-gleichseitige Tangentialkegel gehen.

Nach dem vorigen Paragraphen sind, wenn $\varphi=0$ die Gleichung einer gegebenen Fläche 2 Grades ist:

$$1)\quad -a_1\equiv A_1\varphi+\sigma=0$$

$$2)\quad \frac{a_2}{\varphi}\equiv A_2\varphi-\psi=0$$

die Gleichungen der Flächen, von deren Punkten aus jeder Tangentenkegel der F^2 gleichseitig, resp. dazu dual ist.

Ist nun

$$\varphi\equiv Ax^2+By^2+Cz^2-1=0$$

d. h. F^2 centrisch, so ist:

$$A_1\equiv-(A+B+C)$$
$$\sigma=A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2$$
$$\psi=(B+C)A^2x^2+(C+A)B^2y^2+(A+B)C^2z^3$$

Also:

$$A_1\varphi+\sigma\equiv-\{Ax^2(B+C)+By^2(C+A)+Cz^2(A+B)-(A+B+C)\}$$
$$A_2\varphi-\psi\equiv ABC(x^2+y^2+z^2)-(BC+CA+AB)$$

Digitized by Google

Demnach hat der Spitzenort aller gleichseitigen Tangentenkegel der F^2 (Γ) die Gleichung:

I. $Ax^2(B+C)+By^2(C+A)+Cz^2(A+B)-(A+B+C)=0$

und der aller dual-gleichseitigen Tangentenkegel der F^2 (Γ^*)

II. $x^2+y^2+z^2)-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=0$

Hierunter subsumiren sich leicht alle Fälle der F^2, falls sie centrisch ist.

Die vorstehenden Gleichungen zeigen:

1 „Dass der Spitzenort aller gleichseitigen Tangentenkegel einer „centrischen Fläche 2. Ordnung (F^2) eine mit F^2 concentrische und „coaxiale Fläche 2. Grades (Γ) ist, welche zu einem imaginären „Kegel degenerirt, wenn $A+B+C=0$, d. h. F^2 selbst gleichseitig „ist."

2. „Dass der Spitzenort aller zum gleichseitigen dualen Tan- „gentenkegel (Γ^*) der F^2) eine mit der F^2 concentrische Kugel ist, „die sich eben als die Directorkugel der F^2 erweist. Sie zieht „sich zu einem Punkte zusammen, wenn $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=0$, d. h. F^2 „selbst eine dual-gleichseitige Fläche 2. Ordnung ist."

Ist ferner

$$\varphi \equiv By^2+Cz^2-2Ax=0$$

also F^2 eines der Paraboloide, so wird

$$A_1 \equiv -(B+C), \quad A_2 \equiv BC, \quad \sigma \equiv A^2+B^2y^2+c^2z^2$$
$$\psi \equiv A^2(B+C)+B^2y^2C+C^2z^2.B$$

also

$$A_1\varphi+\sigma \equiv -BC\left\{y^2+z^2-\frac{2A}{BC}(B+C)x-\frac{A^2}{BC}\right\}$$

$$A_2\varphi-\psi \equiv -ABC\left\{2x-\frac{A(B+C)}{BC}\right\}$$

Daraus ergeben sich als Gleichungen der Spitzenörter aller gleichseitigen und dazu dualen Tangentenkegel eines Paraboloids folgende:

III. $y^2+z^2-\frac{2A}{BC}(B+C)x-\frac{A^2}{BC}=0$

IV. $2x-\frac{A(B+C)}{BC}=0$

Digitized by Google

Daraus erkennt man:

3. „Dass der Spitzenort (Γ_p) aller gleichseitigen Tangentenkegel „eines Paraboloids stets ein elliptisches Rotationsparaboloid ist, „dessen Hauptaxe mit derjenigen des gegebenen Paraboloids zu- „sammenfällt."

4. „Dass der Spitzenort $(\Gamma_p{}^*)$ aller zum gleichseitigen dualen „Tangentenkegel eines Paraboloids eine Ebene ist, die zur Axe des- „selben normal ist."

Beide Spitzenörter werden specielle Flächen 2. Ordnung, wenn a) $C=\infty$; b) $B+C=0$ ist. Im Falle a) ist das Paraboloid zu einer Parabel degenerirt, und die Flächen III. und IV. sind die in meiner Dissertation §. 5. C. und D. behandelten. Im Falle b) zeigt das gegebene Paraboloid die Coefficienten-Bedingung, die eine Fläche 2. Ordnung als gleichseitig charakterisirt. Dann wird in III. der Coefficient von x Null, d. h. die Gleichung III. stellt einen Rotationscylinder mit dem unendlich fernen Punkte des Paraboloids als Spitze und dessen Axe als Axe dar. In IV. wird das absolute Glied null, d. h. der betreffende Spitzenort wird von der Scheiteltangentialebene des gegebenen Paraboloids gebildet.

Schneidet man die Fläche Γ mit der Grundfläche F^2, so muss die Schnittcurve (Γ, F^2) wegen der Gleichung von Γ:

$$A_1\varphi+\sigma=0$$

auch den Kegel $\sigma=0$ angehören. Da dieser Kegel aber stets imaginär ist, so muss auch die Schnittcurve (Γ, F^2) ganz imaginär sein.

Interessant ist noch zu bemerken, dass, wenn etwa die gegebene F^2 eine Kugel mit dem Radius r wird, die durch I. und II. dargestellten Flächen damit concentrische Kugeln werden mit den Radien $r\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $r\sqrt{3}$ bzhw.

§. 4.

Ueber den Ort der Punkte, von denen aus an eine gegebene Fläche 2. Grades ein orthogonaler Tangentialkegel kommt.

War $\varphi=0$ die Gleichung der gegebenen F^2, so wird der Spitzenort aller orthogonalen Tangentenkegel der F^2 dargestellt durch:

$$\mathrm{A}\equiv-(A_1\varphi+\sigma)^3+4\varphi(A_1\varphi+\sigma)(A_2\varphi-\psi)+8\varphi^2\Delta w^2=0$$

Ist nun $\varphi=0$ die Axengleichung einer centrischen Fläche 2. Ord-

Digitized by Google

nung, so sind die Functionen φ, $A_1 \varphi + \sigma$, $A_2 \varphi - \psi$ vom 2. Grade; ebenso wenn $\varphi = 0$ ein Paraboloid darstellt, so dass in beiden Fällen $A = 0$ die Gleichung einer Fläche 6. Ordnung ist. Daher ist

„der Spitzenort aller orthogonalen Tangentenkegel einer ge- „gebenen Fläche 2 Geades eine Fläche 6. Ordnung. Sie ist cen- „trisch, wenn die Grundfläche centrisch ist, und hat den Mittelpunkt „und die Symmetrieebenen von $\varphi = 0$ auch zum Mittelpunkt und „zu Symmetrieebenen, sie ist nicht centrisch, wenn es die Grund- „fläche nicht ist, hat aber doch die Symmetrieebenen derselben zu „Symmetrieebenen und deren Axe zur Symmetrieaxe".

Letzteres ergiebt sich sofort aus der Tatsache, dass die in der Function φ auftretenden geraden, resp. ungeraden Potenzen der Variabeln wieder als gerade, resp. ungerade Potenzen derselben in der Function A vorkommen.

Nennen wir die durch A = 0 dargestellte Fläche Ω, die gegebene Fläche F^2, die durch $A_1 \varphi + \sigma = 0$ dargestellte Fläche Γ, deren Punkte die Spitzen gleichseitiger Tangentenkegel der F^2 sind, so lässt sich aus der Form der Gleichung A = 0 folgender wichtige Satz ablesen:

„Der Spitzenort Γ aller gleichseitigen Tangentenkegel der F^2 „schneidet die Fläche F^2 in einer Doppelcurve (Knotencurve) 4. Ord- „nung des Spitzenortes 6. Ordnung Ω aller orthogonalen Tangenten- „kegel der F^2, und dieser wird von $F^2(\varphi = 0)$ längs der ganzen „Knotencurve berührt. Ferner berührt Γ die Fläche längs der un- „endlich fernen Ebene ($w = 0$), also längs des Kegelschnitts, in dem „Γ die E_∞ trifft".

Hieraus ergiebt sich sofort, dass F^2 mit Ω nur die Punkte der Knotencurve $(\Gamma\Omega)$ gemein haben kann, und dass letztere für den vollen Durchschnitt (Γ, Ω) als Partialcurve 8. Ordnung gilt. Die Restcurve 4. Ordnung wird durch den Kegelschnitt (Γ, E_∞) als Berührungscurve gebildet. — Die Knotencurve der Ω ist eben die Schnittcurve (Γ, F^2).

Nun schneidet F^2 die $\Gamma(A_1 \varphi + \sigma = 0)$ dort, wo sie der Fläche $\sigma = 0$ begegnet. Es ist aber

$$\sigma \equiv \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2, \text{ oder wenn } \varphi \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

die Axengleichung einer centrischen Fläche 2. Grades bedeutet:

$$\sigma \equiv A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 \quad \text{und daher} \quad \sigma = 0$$

die Gleichung eines stets imaginären Kegels Also muss die Schnittcurve (F^2, σ), welche ja eben die Knotencurve der Ω ist, und damit

Digitized by Google

die Knotencurve selbst stets imaginär sein. Das ist auch geometrisch leicht einzusehen. Denn schnitte F^2 die Ω reell, so würde in jedem der Schnittpunkte der Tangentenkegel an F^2 zur Tangentialebene im betrachteten Punkte degeneriren. Wegen der Bedingung $\sin\varphi = \operatorname{tang}\vartheta$ kann aber ein orthogonaler nie zur Ebene degeneriren, da nie $\sin 90^0 = \operatorname{tang} 90^0$ ist. „Die Fläche Ω kann daher mit „F^2 keinen reellen Punkt gemein haben, d. h. die Punkte der ge- „fundenen Doppelcurve von Ω sind alle imaginär". — Wir brauchen hiernach also nicht mehr besonders zu beweisen, dass die betreffende Knotencurve auch imaginär ist, wenn F^2 ein Paraboloid ist.

Um sich die geometrische Bedeutung dieser Knotencurve klar zu machen, denke man sich die Schar der zu $\varphi = 0$ confocalen Flächen, und unter ihnen speciell die zu $\varphi = 0$ unendlich nahe Fläche; dann ist $\sigma = 0$ der Kegel, welcher die imaginäre Schnittcurve beider Flächen aus dem Mittelpunkte von $\varphi = 0$ projicirt. Diese Curve $\varphi = 0$, $\sigma = 0$ ist also die Curve derjenigen Berührungsebenen von $\varphi = 0$, die den unendlich fernen Kugelkreis berühren. Es bedeutet also $\sigma = 0$ den Kegel, dessen Kanten die Berührungspunkte aller Tangentialebenen der Grundfläche, welche zugleich den unendlich fernen Kugelkreis berühren, mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbinden.

Ist zunächst

$$\varphi \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

d. h. F^2 centrisch, so ist:

$$A_1 \equiv -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = -(A + B + C)$$

$$A_2 \equiv A_{11} + A_{22} + A_{33} = BC + CA + AB$$

$$A_3 \equiv - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -ABC; \quad \Delta = -ABC$$

$$\sigma = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2$$

$$\psi \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & \varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_3 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \varphi_3 \end{vmatrix} + \ldots = (B + C)A^2x^2 + (C + A)B^2y^2 + (A + B)C^2z^2$$

Also ergiebt sich:

$$A_1\varphi + \sigma \equiv -(A+B+C)(Ax^2+By^2+Cz^2-1) + A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2$$
$$\equiv -\{Ax^2(B+C) + By^2(C+A) + Cz^2(A+B) - (A+B+C)\}$$

$$
\begin{aligned}
A_2\varphi-\psi &\equiv (BC+CA+AB)(Ax^2+By^2+Cz^2-1)\\
&\quad -\{(B+C)A^2x^2+(C+A)B^2y^2+(A+B)C^2z^2\}\\
&= ABC(x^2+y^2+z^2)-(BC+CA+AB)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} \equiv\ & \{Ax^2(B+C)+By^2(C+A)+Cz^2(A+B)-(A+B+C)\}^3\\
& -4ABC\{Ax^2+By^2+Cz^2-1\}\times\\
& \quad .\{Ax^2(B+C)+By^2(C+A)+Cz^2(A+B)-(A+B+C)\}\\
& \times\left\{x^2+y^2+z^2-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\right\}\\
& -8ABC\{Ax^2+By^2+Cz^2-1\}^3=0
\end{aligned}
$$

Wenn also jetzt

$$\psi \equiv A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2-(A+B+C)=0$$

$$\chi \equiv x^2+y^2+z^2-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=0$$

die Gleichungen der Spitzenörter aller gleichseitigen und dazu dualen Tangentenkegel unserer Grundfläche $\varphi=0$ sind, so ergiebt sich als Definitionsgleichung unseres jetzigen Spitzenortes Ω:

$$\psi^3-4ABC\ \varphi\psi\chi-8ABC.\varphi^3=0$$

In Betreff der ebenen Durchschnitte der Fläche Ω ist zu bemerken, dass sie aus geometrischen Gründen in den 3 Symmetrieebenen ähnlich zerfallen müssen, wie bei der Fläche ω. Jedoch wollen wir von der synthetischen Untersuchung derselben der Schwierigkeit wegen abstehen und uns mit den folgenden analytischen Betrachtungen begnügen.

Der wichtigste ebene Schnitt durch die Fläche Ω ist der unendlich ferne, dessen Gleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
&\{Ax^2(B+C)+By^2(C+A)+Cz^2(A+B)\}\{[Ax^2(B+C)+By^2(C+A)\\
&\qquad +Cz^2(A+B)]^2-4ABC(Ax^2+By^2+Cz^2)(x^2+y^2+z^2)\}=0
\end{aligned}
$$

„E_∞ schneidet also aus Ω einen Kegelschnitt $(C_\infty{}^2)$ aus, denselben, „den E_∞ aus Γ ausschneidet, und eine Curve 4. Ordnung $(C_\infty{}^4)$, „deren Gleichung sich auch schreiben lässt:“

$$
\begin{aligned}
&\{Ax^2(B-C)-[y\sqrt{B(C-A)}+z\sqrt{C(A-B)}]^2\}\\
&\quad .\{Ax^2(B-C)-[y\sqrt{B(C-A)}-z\sqrt{C(A-B)}]^2\}\\
&\equiv\{x\sqrt{A(B-C)}+y\sqrt{B(C-A)}+z\sqrt{C(A-B)}\}\\
&\quad .\{x\sqrt{A(B-C)}+y\sqrt{B(C-A)}-z\sqrt{C(A-B)}\}
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$\times \{x\sqrt{A(B-C)} - y\sqrt{B(C-A)} + z\sqrt{C(A-B)}\}$$
$$\times \{x\sqrt{A(B-C)} - y\sqrt{B(C-A)} - z\sqrt{C(A-B)}\} = 0$$

Da obige $C_\infty{}^2$ gleichzeitig auf Ω und Γ liegt, so ergiebt sich hier, dass jeder gleichseitige Cylinder zugleich orthogonal sein muss.

Nach der ersten Form der Gleichung der $C_\infty{}^4$ wird diese dort von dem unendlich fernen Kugelkreise ($K_\infty{}^2$) und dem unendlich fernen Kegelschnitte der F^2 berührt, wo diese den unendlich fernen Kegelschnitt der Fläche Γ_1 unsere $C_\infty{}^2$ schneiden. Da die $C_\infty{}^4$ nach der letzten Gleichungsform in 4 imaginäre Geraden zerfällt, die ein vollständiges Vierseit bilden, so sind diesem $K_\infty{}^2$ und der unendlich ferne Kegelschnitt von F^2 eingeschrieben.

Diese 6 Durchschnittspunkte der gefundenen Geraden liegen, wie leicht zu sehen, zu je zweien in einer der 3 Coordinaten-Ebenen, und sie lassen sich leicht als Doppelpunkte unserer Fläche nachweisen, da es gelingen wird, die Gleichung $A = 0$ in folgenden Formen zu schreiben:

1) $Ax^2(B-C).\alpha_1 + [y\sqrt{B(C-A)} + z\sqrt{C(A-B)}]^2.\beta_1 + w^2.\gamma_1 = 0$

2) $Ax^2(B-C).\alpha_2 + [y\sqrt{B(C-A)} - z\sqrt{C(A-B)}]^2.\beta_2 + w^2.\gamma_2 = 0$

3) $By^2(C-A).\alpha_3 + [z\sqrt{C(A-B)} + x\sqrt{A(B-C)}]^2.\beta_3 + w^2.\gamma_3 = 0$

4) $By^2(C-A).\alpha_4 + [z\sqrt{C(A-B)} - x\sqrt{A(B-O)}]^2.\beta_4 + w^2.\gamma_4 = 0$

5) $Cz^2(A-B).\alpha_5 + [x\sqrt{A(B-C)} + y\sqrt{B(C-A)}]^2.\beta_5 + w^2.\gamma_6 = 0$

6) $Cz^2(A-B).\alpha_6 + [x\sqrt{A(B-C)} - y\sqrt{B(C-A)}]^2.\beta_6 + w^2.\gamma_6 = 0$

Diese 6 Doppelpunkte sind reell oder imaginär, je nachdem die linearen Ausdrücke in den eckigen Klammern obiger Gleichungen, gleich null gesetzt, reelle oder imaginäre Ebenen darstellen. — Ist $\frac{1}{A} > \frac{1}{B} > \frac{1}{C} > 0$, wie beim Ellipsoid, so sind nur die in der xz-Ebene ($y = 0$) liegenden beiden Doppelpunkte reell, die Punkte 3) und 4). — Ist $\frac{1}{A} > \frac{1}{B} > 0 > \frac{1}{C}$, wie beim einmantligen Hyperboloid, so sind nur die in 1) und 2) betrachteten Doppelpunkte reell, welche in der yz-Ebene ($x = 0$) liegen, d. h. in der hyperbolischen Symmetrieebene durch die kürzere reell treffende Axe. — Ist endlich $\frac{1}{A} > 0 > \frac{1}{C} > \frac{1}{B}$, wie beim zweimantligen Hyperboloid, so sind nur die beiden in 5) und 6) betrachteten Punkte in der xy-Ebene, der hyperbolischen Symmetrieebene mit dem grösseren Asymptotenwinkel, reell.

Digitized by Google

Alle 6 Doppelpunkte müssen natürlich zugleich konisch oder biplanar sein.

Um die Art derselben näher zu ermitteln, wollen wir den Tangentenkegel eines dieser Doppelpunkte, dessen Coordinaten sind:

$$x = 0, \quad y = \sqrt{C(A-B)}, \quad z = -\sqrt{B(C-A)}, \quad w = 0$$

näher untersuchen. Sind α_1', β_1', γ_1' die Substitutionsresultate der Coordinaten eines Doppelpunktes in die Functionen α_1, β_1, γ_1 bzhw., so ist die Gleichung des Berührungskegels in ihm:

$$Ax^2(B-C)\alpha_1' + [y\sqrt{B(C-A)} + z\sqrt{C(A-B)}]^2\beta_1' + w^2\gamma_1' = 0$$

Nun ergiebt sich:

$$\alpha_1' = 8AB^2C^2(A-B)(B-C)(C-A)$$
$$\beta_1' = -8AB^2C^2(A-B)(B-C)(C-A)$$
$$\gamma_1' = -8AB^2C^2(C-A)$$

so dass die Gleichung des Berührungskegels lautet:

$$8AB^2C^2(C-A).\{Ax^2(B-C)^2(A-B) - (A-B)(B-C)[y\sqrt{B(C-A)} + z\sqrt{C(A-B)}]^2 - w^2\} = 0$$

oder:

$$Ax^2(B-C) - [y\sqrt{B(C-A)} + z\sqrt{C(A-B)}]^2 - \frac{w^2}{(A-B)(B-C)} = 0$$

Dies ist die Gleichung eines nicht zerfallenden Kegels mit unendlich ferner Spitze, also eines Cylinders, dessen Hauptebenen sind:

$$x = 0, \quad w = 0, \quad y\sqrt{B(C-A)} + z\sqrt{C(A-B)} = 0$$

„Wir müssen also schliessen, dass die sechs Durchschnittspunkte der „vier unendlich fernen Geraden gewöhnliche Doppelpunkte der Fläche „Ω sind, die aber, wie aus der letzten Gleichung nach Division „durch C leicht zu sehen ist, biplanar werden, wenn etwa $C = \infty$ „wird, d. h. wenn F^2 zu einem Kegelschnitt degenerirt."

Die $C_\infty^{\,2}$ enthält zunächst vier Punkte der $C_\infty^{\,4}$, die zugleich dem unendlich fernen Kegelschnitt von F^2 angehören. Diese sind als Punkte der Schnittcurve (Γ, F^2) der Doppelcurve von Ω angehörig. Diese sind also selbstverständlich auch Doppelpunkte der Fläche Ω.

Es bleiben noch die vier Punkte zu betrachten, in denen der Kugelkreis $K_\infty^{\,2}$ die $C_\infty^{\,2}$ trifft, da letztere noch in diesen ihrer Ergänzungscurve begegnet Diese Punkte haben die Coordinaten:

Digitized by Google

$$x = \pm\sqrt{A(B-C)},\quad y = \pm\sqrt{B(C-A)},\quad z = \pm\sqrt{C(A-B)},\quad w = 0$$

und werden sich als gewöhnliche Doppelpunkte unserer jetzigen Fläche ergeben. Dass sie Doppelpunkte sind, zeigt man am besten durch die Bildung der Differentialquotienten der linken Seite der Gleichung A = 0, welche für sie verschwinden.

„Also hat Ω in E_∞ noch vier gewöhnliche Doppelpunkte.“

Es scheint wichtig, festzustellen, ob auf Ω ausser den 10 in E_∞ liegenden Doppelpunkten noch andere sich befinden können.

Zu dem Zwecke schreiben wir die Flächengleichung von Ω in der homogenen Form:

$$\mathrm{A} \equiv \varphi^3 - 4ABC.\varphi\psi\chi - 8ABC\varphi^2 w^2 = 0$$

worin:

$$\psi = Ax^2(B+C) + By^2(C+A) + Cz^2(A+B) - w^2(A+B+C)$$
$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - w^2$$
$$\chi = x^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) w^2$$

ist. Also kommt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2Ax(B+C);\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2By(C+A);\quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 2Cz(A+B)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial w} = -2w(A+B+C)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2Ax;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2By;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2Cz;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial w} = -2w$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = 2y;\quad \frac{\partial\chi}{\partial z} = 2z;\quad \frac{\partial\chi}{\partial w} = -2w\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)$$

Daraus ergiebt sich:

$$1)\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} = 2Ax\Big\{3\psi^2(B+C) - 4ABC\left[\varphi\chi(B+C) + \psi\chi + \varphi\psi\frac{1}{A}\right] - 16ABC\varphi w^2\Big\}$$

$$2)\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} = 2By\Big\{3\psi^2(C+A) - 4ABC\left[\varphi\chi(C+A) + \psi\chi + \varphi\psi\frac{1}{B}\right] - 16ABC\varphi w^2\Big\}$$

$$3)\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} = 2Cz\Big\{3\psi^2(A+B) - 4ABC\left[\varphi\chi(A+B) + \psi\chi + \varphi\psi\frac{1}{C}\right] - 16ABC\varphi w^2\Big\}$$

Digitized by Google

$$4)\quad \frac{\partial A}{\partial w} = -2w\Big\{3\psi^2(A+B+C) - 4ABC\Big[\varphi\chi(A+B+C)+\psi\chi + \varphi\psi\Big(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\Big)\Big] - 16\,ABC\varphi w^2 - 8\,ABC\varphi^2\Big\}$$

Hat die Fläche Ω einen Doppelpunkt, der nicht in den Ebenen $x=0$, $y=0$ liegt, also auch nicht einer der Coordinatenaxen, wol aber der xy-Ebene angehören kann, so muss ausser den Bedingungen $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ etc. aus 1) und 2) die weitere bestehen:

$$5)\quad U_1 \equiv \frac{1}{2x}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2y}\frac{\partial A}{\partial x} \equiv (A-B)\{3\psi^2 C - 4ABC[\varphi\chi C + \psi\chi] - 16\,ABC\varphi w^2\} = 0$$

Und ferner:

$$6)\quad U_2 \equiv \frac{1}{2Ax}\cdot\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{A-B}\,U_1 \equiv 3\psi^2 B - 4ABC\Big[\chi B + \psi\frac{1}{A}\Big]\varphi = 0$$

$$7)\quad U_3 \equiv \frac{1}{2By}\cdot\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{A-B}\,U_1 \equiv 3\psi^2 A - 4ABC\Big[\chi A + \psi\frac{1}{B}\Big]\varphi = 0$$

$$8)\quad U_4 \equiv U_2 + U_3 + \frac{1}{A-B}\,U_1 + \frac{1}{2w}\frac{\partial A}{\partial w} \equiv 4\,AB\varphi\{\psi + 2C\varphi\} = 0$$

d. h. $\varphi = 0$ oder $\psi + 2C\varphi = 0$.

Liegt nun ein Flächendoppelpunkt auf der Fläche $\varphi = 0$, so muss er nach 6) und 7) auch auf $\psi = 0$ sich befinden, also der Durchschnittscurve beider Flächen angehören.

Für $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ verschwinden aber alle Differentialquotienten $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ etc., d. h. die genannte Durchschnittscurve ist eine Knotencurve auf Ω, was wir schon früher erkannt haben.

Genügt ein Doppelpunkt der Bedingung:

$$\psi + 2\,C\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \psi = -2C\varphi$$

so muss er auch den mit Hülfe von

$$\psi = -\,2C\varphi$$

aus U_1 und U_2 sich ergebenden Bedingungen genügen:

$$\frac{U_1}{A-B} \equiv 4C\varphi\{3C^2\varphi + ABC\chi - 4\,AB\,w^2\} = 0$$

$$U_2 \equiv 4B\,\varphi\{5C^2\varphi - ABC\chi\}$$

welche, da $\varphi \gtrless 0$ ist, übergehen in

Digitized by Google

$$\frac{1}{4\varphi}\left\{\frac{U_1}{C(A-B)}+\frac{U_2}{B}\right\}\equiv 4C\{2C\varphi - ABw^2\} = 0$$

Hieraus folgt, dass der betrachtete Doppelpunkt den Bedingungen genügen muss:

$$1.\quad \varphi = \frac{1}{2C}ABw^2; \qquad 2)\quad \psi = -2C\varphi = -ABw^2$$

$$3.\quad \chi = \frac{5\varphi C}{AB} = \frac{5ABw^2 . C}{2C . AB} = \frac{5w^2}{2}$$

Setzt man nun diese Werte für φ, ψ, χ in die Function $\frac{\partial A}{\partial x}$ ein, so muss $\frac{\partial A}{\partial x}$ auch für $x \gtrless 0$ verschwinden, wenn ausserhalb der Ebenen $x=0$, $y=0$ und der Schnittcurve $\varphi=0$, $\psi=0$ noch Doppelpunkte auf Ω liegen. Da das aber nur eintreten kann, wenn $w=0$ wird, wie man leicht berechnet, so kann die Fläche Ω ausserhalb E_∞ und der Coordinatenebenen keinen Doppelpunkt haben. Auch in der xy-Ebene ($z=0$), und daher auch in den damit gleichartigen andern Coordinatenebenen, kann ausserhalb E_∞, der Coordinatenaxen und der Knotencurve kein Doppelpunkt der Ω sich befinden.

Aber auch die Coordinatenaxen enthalten im allgemeinen keinen Doppelpunkt der Ω. Das ist schon gezeigt, wenn nachgewiesen ist dass eine, etwa die z-Axe, die Ω nicht in einem Doppelpunkte trifft, weil die Axen sich ganz gleichartig verhalten müssen.

Geht die z-Axe durch einen Doppelpunkt der Ω, so muss die aus $A=0$ für $x=0$, $y=0$ resultirende Gleichung 6. Grades in z gleiche Wurzeln aufweisen.

Diese Gleichung ist:

$$\begin{aligned} & z^6 . C^3(A+B)(A-B)^2 - z^4C^2(A-B)^2(3A+3B-C) \\ & + z^2\{3C(A+B)(A-B)^2 - 2C^2(A-B)^2 - C^3(A+B)\} \\ & - \{(A+B)(A-B)^2 - C(A-B)^2 - C^2(A+B) + C^3\} = 0 \end{aligned}$$

welche, als kubische Gleichung in z^2 aufgefasst, die Wurzeln hat:

$$\frac{A+B-C}{C(A-B)};\quad \frac{A-B+C}{C(A-B)};\quad \frac{A-B-C}{C(A-B)}$$

Die z-Axe trifft Ω also in 6 getrennten Punkten; dasselbe schliessen wir für die x- und y-Axe, d. h. die Cooedinatenaxen enthalten im allgemeinen keinen Doppelpunkt der Fläche Ω.

Digitized by Google

Man erhält also:

„Der Spitzenort aller orthogonalen Tangentenkegel einer centri-„schen Fläche 2. Ordnung ist eine mit ihr concentrische Fläche „6. Ordnung mit einer imaginären Knotencurve (Doppelcurve) 4 Ord-„nung und 10 Doppelpunkten in der unendlich fernen Ebene E_∞, „von denen je zwei den Coordinatenebenen, die übrigen vier dem „imaginären Kugelkreise angehören. Alle diese Doppelpunkte sind „konische".

Ist ferner durch die Gleichung:

$$\varphi \equiv By^2 + Cz^2 - 2Ax = 0$$

ein Paraboloid (P^2) gegeben, so wird:

$$A_1 \equiv -(B+C), \quad A_2 \equiv BC, \quad A_3 = 0$$
$$\Delta \equiv -A^2BC, \quad \sigma \equiv A^2 + B^2y^2 + Cz^2$$
$$\psi \equiv A^2(B+C) + B^2y^2.C + C^2z^2.B$$

Also kommt:

$$A_1\varphi + \sigma \equiv -(B+C)(By^2+Cz^2-2Ax) + A^2 + B^2y^2 + C^2z^2$$
$$= -BC\left\{y^2+z^2-\frac{2Ax}{BC}(B+C)-\frac{A^2}{BC}\right\}$$

ebenso:

$$A_2\varphi - \psi \equiv -ABC\left\{2x - \frac{A(B+C)}{BC}\right\}$$

Bildet man jetzt die Function A und unterdrückt den auftretenden gemeinsamen Factor BC, so lautet die homogene Gleichung des Spitzenorts aller orthogonalen Tangentenkegel von P^2, den wir Ω_p nennen wollen:

$$A_p \equiv B^2C^2\left\{y^2+z^2-\frac{2A}{BC}(B+C)x-\frac{A^2}{BC}\right\}^3 + 4ABC\{By^2+Cz^2-2Ax\}$$
$$\times\left\{y^2+z^2-\frac{2A(B+C)}{BC}x-\frac{A^2}{BC}\right\}\left\{2x-\frac{A(B+C)}{BC}\right\}.w$$
$$-8A^2\{By^2+Cz^2-2Ax\}^2.w^2 = 0$$

Ausser dem oben allgemein ausgesprochenen Satze über die Knotencurve (Γ_p, P^2) der Ω_p, wobei Γ_p die Gleichung hat:

$$y^2+z^2-\frac{2A}{BC}(B+C)x.w-\frac{A^2}{BC}.w^2 = 0$$

erkennt man noch,

„dass die Schnittcurve von Γ_p in E_∞ ($w=0$), nämlich das Ge-

„radenpaar $y^2+z^2=0$ in E_∞, eine Doppelcurve der Ω_p ist, längs „welcher E_∞ die Ω_p berührt.“

Einzelne Doppelpunkte lassen sich für diese Fläche nicht nachweisen. Es lässt sich vielmehr, ähnlich wie vorhin, leicht zeigen, dass ausserhalb der Knotencurven auf Ω_p kein Doppelpunkt mehr liegen kann, wovon wir jedoch Abstand nehmen wollen.

§. 5.

Ueber den Ort der Punkte, von denen aus eine gegebene Fläche 2. Ordnung durch dual-orthogonal Kegel tangirt wird.

Als Gleichung des Spitzenorts (Ω^*) aller zum orthogonalen dualen Tangentenkegel einer durch die Gleichung $\varphi=0$ gegebenen F^2 erhielten wir:

$$\mathrm{A}_I \equiv 8w^4.\varphi\Delta^2+4(A_1\varphi+\varrho)(A_2\varphi-\psi)w^2.\Delta+(A_2\varphi-\psi)^3=0$$

Nennt man den Spitzenort aller zum gleichseitigen dualen Tangentenkegel der $F^2(A_2\varphi-\psi=0)\ \Gamma^*$, so lesen wir aus der Form der Gleichung $\mathrm{A}_I=0$, dass

„unser Spitzenort Ω^* von dem Spitzenorte in den Punkten des „unendlich fernen Kegelschnitts von Γ^*, also längs des Kugelkreises „K_∞, welcher als eine dreifache Knotencurve der Fläche Ω^* auf„tritt, berührt wird.“

Die Restschnittcurve von Γ^* mit Ω^* ist dann noch eine Raumcurve 4. Ordnung, nämlich diejenige, in welcher Γ^* die gegebene F^2 ($\varphi=0$) schneidet.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, dass F^2 centrisch ist, d. h.

$$\varphi\equiv Ax^2+By^2+Cz^2-w^2=0$$

so ergiebt sich als Flächengleichung:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_1 \equiv\ & 8w^4.(Ax^2+By^2+Cz^2-w^2).A^2B^2C^2\\ &+4A^2B^2C^2.\{Ax^2.(B+C)+By^2.(C+A)+Cz^2(A+B)-(A+B+C)w^2\}w^2\\ &\times\{x^2+y^2+z^3-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)w^2\}+A^3B^3C^3.[x^2+y^2+z^2\\ &-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)w^2]^3=0\end{aligned}$$

oder mit Weglassung des Factors $A^2B^2C^2$:

Digitized by Google

$$\mathrm{A}_I \equiv 8w^4.\{Ax^2+By^2+Cz^2-w^2\}+4w^2.\{Ax^2(B+C)+By^2(C+A)$$

$$+Cz^2(A+B)-(A+B+C)\}\{x^2+y^2+z^2-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)w^2\}$$

$$+ABC.\{x^2+y^2+z^2-w^2.\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\}^3=0$$

Setzen wir nun:

$$\mathrm{A}_I \equiv 8w^4.\varphi+4w^2.f\chi+ABC.\chi^3=0$$

so dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2Ax,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2By,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2Cz,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial w}=-2w$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2Ax(B+C),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2By(C+A),\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2Cz(A+B)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}=-2w(A+B+C)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial\chi}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial\chi}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial f}{\partial w}=-2w\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)$$

ist, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial\mathrm{A}_I}{\partial x}\equiv 2x\{8Aw^4+4w^2.[f+\chi A(B+C)]+3ABC\chi^2\}$$

$$\frac{\partial\mathrm{A}_I}{\partial y}\equiv 2y\{8Bw^4+4w^2[f+\chi B(C+A)]+3ABC\chi^2\}$$

$$\frac{\partial\mathrm{A}_I}{\partial z}\equiv 2z\{8Cw^4+4w^2[f+\chi C(A+B)]+3ABC\chi^2\}$$

$$\frac{\partial\mathrm{A}_I}{\partial w}\equiv 2w\{-8w^4+16w^2.\varphi+4f\chi-4w^2.[f\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)$$

$$+\chi(A+B+C)]-3\chi^2.ABC\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\}$$

Diese Differentialcoefficienten verschwinden zunächst für die Punkte der unendlich fernen Knotencurve, des Kugelkreises in E_∞, für welche ja $\chi=0$, $w=0$ ist Wir haben diesen Kugelkreis schon als dreifache Knotencurve der Fläche Ω^* erkannt, längs welcher letztere von $\chi=0$ berührt wird.

Es ergiebt sich nun, dass ein nicht in den Coordinatenebenen liegender Doppelpunkt der Ω^* den Bedingungen genügen muss:

$$2)\quad \frac{1}{2x}\frac{\partial\mathrm{A}_I}{\partial x}-\frac{1}{2y}\frac{\partial\mathrm{A}_1}{\partial y}=4w^2(A+B)(2w^2+\chi C)=0$$

Digitized by Google

$$2)\ \frac{1}{2y}\frac{\partial A_I}{\partial y} - \frac{1}{2z}\frac{\partial A}{\partial z} \equiv 4w^2(B - C)(2w^2 + \chi A) = 0$$

$$3)\ \frac{1}{2z}\frac{\partial A_I}{\partial z} - \frac{1}{2x}\frac{\partial A}{\partial x} \equiv 4w^2(C - A)(2w^2 + \chi B) = 0$$

Nach 1) und 2) muss dann auch ein nicht in den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ liegender Doppelpunkt der Ω^* der Bedingung genügen:

$$2w^2 + \chi C - (2w^2 + \chi A) \equiv \chi(C - A) = 0 \quad \text{oder} \quad \chi = 0$$

Die Kugel $\chi = 0$ trifft aber Ω^* ausserhalb der E_∞ nur in den Punkten ihrer Schnittcurve mit $\varphi = 0$ (F^2). Dann aber muss nach

$$\frac{\partial A_I}{\partial w} = 0$$

für einen Doppelpunkt der Ω^*, für den $w \lesseqgtr 0$ ist,

$$-8w^3 . \left[2w^2 + f\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)\right] = 0$$

oder

$$2w^2 + f\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) = 0$$

sein. Ebenso müssen noch wegen

$$\frac{\partial A_I}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_I}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial A_I}{\partial z} = 0$$

für einen auch ausserhalb der Coordinatenebenen liegenden Doppelpunkt der Fläche die Bedingungen bestehen:

$$2w^2 + f . \frac{1}{A} = 0, \quad 2w^2 + f . \frac{1}{B} = 0; \quad 2w^2 + f . \frac{1}{C} = 0$$

oder die Bedingung:

$$6w^2 + f . \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) = 0$$

Also muss auch

$$6w^2 + f\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) - \left[2w^2 + f\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)\right] = 4w^2 = 0$$

sein.

„Wir schliessen also, dass die Fläche Ω^* ausserhalb der Coor-
„natenebenen und E_∞ keine Doppelpunkte enthalten kann.“

Die Fläche Ω^* kann daher ausserhalb der Knotencurve in E_∞, dem imaginären Kugelkreise, nur in den Ebenen $x = 0$, $y = 0$,

Digitized by Google

$z = 0$ Doppelpunkte haben, und zwar in jeder dieser Ebenen gleichviel, da keine als Hauptebene bevorzugt ist. Die Zahl der Doppelpunkte der Ω^* in der Ebene $z = 0$ muss also in $y = 0$ und $x = 0$ wiederkehren.

Ein Doppelpunkt der Ω^*, welcher in $z = 0$ liegt, nicht aber auf den Coordinatenaxen dieser Ebene, muss der Bedingung genügen:

$$\frac{1}{2x} \cdot \frac{\partial A_I}{\partial x} - \frac{1}{2y} \cdot \frac{\partial A_I}{\partial y} \equiv 4w^2 . \{2w^2(A - B) + \chi C(A - B)\} = 0$$

oder ausserhalb der E_∞ der Bedingung:

$$\chi + \frac{2}{C} \equiv x^2 + y^2 - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = 0$$

Setzt man

$$\chi = -\frac{2}{C}$$

in $\frac{\partial A_I}{\partial x}$ ein, so wird:

$$\frac{\partial A_I}{\partial x} \equiv 8x \left\{f + \frac{AB}{C}\right\} \quad \text{für} \quad w = 1$$

Ein Flächendoppelpunkt ausserhalb der y-Axe hat also noch der Bedingung zu genügen:

$$f + \frac{AB}{C} = 0$$

Setzt man ausser

$$\chi + \frac{2}{C} = 0$$

auch noch diese Bedingung in

$$\frac{\partial A_I}{\partial y} = 0$$

ein, so wird für $w = 1$:

$$\frac{\partial A_I}{\partial y} \equiv 2y \left\{8B - 4\frac{AB}{C} - 8B - 8\frac{AB}{C} + 12\frac{AB}{C}\right\} = 0 \quad \text{für} \quad y \gtrless 0$$

Ebenso ergiebt sich für $w = 1$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial A_I}{\partial w} \equiv -8 + 16\varphi + \frac{8AB}{C^2} + 4\left\{\frac{AB}{C}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{C}(A + B + C)\right\} - \frac{12AB}{C}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)$$
$$\equiv 16\varphi; \text{ somit muss auch } \varphi = 0 \text{ sein.}$$

Digitized by Google

Für einen Flächendoppelpunkt in der xy-Ebene, der nicht den Axen und der g_∞ dieser Ebene angehört, bestehen also die Bedingungen, wenn wir gleich $z = 0$ setzen:

$$1)\quad f + \frac{AB}{C} \equiv Ax^2(B+C) + By^2(C+A) - (A+B+C) + \frac{AB}{C} = 0$$

$$2)\quad \chi + \frac{2}{C} \equiv x^2 + y^2 - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = 0$$

$$3)\quad \varphi \equiv Ax^2 + By^2 - 1 = 0$$

Den Bedingungen 2) und 3) wird genügt durch

$$x^2 = \frac{B(C-A)}{AC(B-A)};\quad y^2 = \frac{A(B-C)}{BC(B-A)}$$

Aber auch die Bedingung 1) wird hierdurch befriedigt, wie sich leicht controliren lässt.

„Wir erhalten also das Resultat, dass die Fläche Ω^* in der „einen Hauptebene ($z = 0$) vier ausserhalb der Axen und der g_∞ „dieser Ebene liegende Doppelpunkte hat, deren Coordinaten sind:

$$1)\quad x = \pm\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}};\quad y = \pm\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}};\quad z = 0$$

„Ebenso besitzt die Fläche in den beiden andern Hauptebenen „($x = 0$, $y = 0$) ausserhalb der Axen und der E_∞ noch ie vier „Doppelpunkte, deren cyklisch gebildete Coordinaten sind:

$$2)\quad y = \pm\sqrt{\frac{C(A-B)}{BA(C-B)}};\quad z = \pm\sqrt{\frac{B(C-A)}{CA(C-B)}};\quad x = 0$$

$$3)\quad z = \pm\sqrt{\frac{A(B-C)}{CB(A-C)}};\quad x = \pm\sqrt{\frac{C(A-B)}{AB(A-C)}};\quad y = 0$$

„Es ergiebt sich leicht, dass diese zwölf Punkte gerade die „zwölf Nabelpunkte der gegebenen F^2 sind."

Um die Art der Doppelpunkte 1) zu erkennen, welchen ja die Doppelpunkte 2) und 3) wegen der Gleichwertigkeit der Hauptebenen gleichartig sein müssen, wollen wir unsere Flächengleichung für einen der Punkte 1) als Coordinaten-Anfangspunkt aufstellen. Durch die Substitutionen

$$\left\{\begin{matrix} x, & y, & z \\ x + \sqrt{\dfrac{B(C-A)}{AC(B-A)}}, & y + \sqrt{\dfrac{A(B-C)}{BC(B-A)}}, & z \end{matrix}\right\}$$

ergiebt sich:

$$A_I \equiv 8\left\{Ax^2+By^2+Cz^2+2Ax\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}+2By\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}\right\}$$

$$+4\left\{Ax^2(B+C)+By^2(C+A)+Cz^2(A+B)+2Ax\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}(B+C)\right.$$

$$\left.+2By\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}(C+A)-\frac{AB}{C}\right\}\left\{x^2+y^2+z^2+2x\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}\right.$$

$$\left.+2y\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}-\frac{2}{c}\right\}+ABC\left\{x^2+y^2+z^2+2x\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}\right.$$

$$\left.+2y\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}-\frac{2}{C}\right\}^2=0$$

Hierin ist $u_0 = u_1 = 0$, und:

$$u_2 \equiv 8z^2\left(C-A-B+\frac{AB}{C}\right)+16\left\{Ax(B+C)\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}\right.$$

$$\left.+By(C+A)\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}\right\}\left\{x\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}+y\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}\right\}$$

$$-24AB\left\{x\sqrt{\frac{B(C-A)}{AC(B-A)}}+y\sqrt{\frac{A(B-C)}{BC(B-A)}}\right\}^2$$

oder:

$$\frac{1}{8}u_2 \equiv z^2\left(C-A-B+\frac{AB}{C}\right)+x^2\,\frac{B(C-A)(-B+2C)}{C(B-A)}$$

$$+y^2\,\frac{A(B-C)(2C-A)}{C(B-A)}+2xy\,\frac{BC+CA-AB}{C(B-A)}\sqrt{(C-A)(B-C)}$$

Die Gleichung $u_2 = 0$ stellt nun einen gewöhnlichen oder zerfallenden Kegel dar, je nachdem in der Gleichung eines ebenen Durchschnitts parallel zur xy-Ebene ($z=\gamma$) die Discriminante nicht verschwindet oder verschwindet. Diese Discriminante ist:

$$\Delta \equiv \gamma^2\left(C-A-B+\frac{AB}{C}\right)\cdot\left\{\frac{AB(B-C)(C-A)(B-2C)(A-2C)}{C^2(B-A)^2}\right.$$

$$\left.-(BC+CA-AB)^2\cdot\frac{(C-A)(B-C)}{C^2(B-A)^2}\right\}$$

$$=\gamma^2\left(C-A-B+\frac{AB}{C}\right)\frac{(B-C)(C-A)}{C^2.(B-A)^2}$$

$$\{AB(B-2C)(A-2C)-(BC+CA-AB)^2\}$$

„Es ist daher, für $\gamma \gtrless 0$, $\Delta \gtrless 0$, d. h. der betrachtete Anfangs-„punkt, und damit alle vier Punkte 1), und alle Punkte 2) und 3) „sind gewöhnliche Doppelpunkte der Fläche. Sie werden biplanar,

„wenn $A = B$, $B = C$ oder $C = \infty$ wird, d. h. wenn die Grund- „fläche entweder eine centrische Rotationsfläche ist, oder zu einem „centrischen Kegelschnitt degenerirt.“

Hat unsere Fläche noch weitere Doppelpunkte, so müssen diese den Hauptaxen angehören, falls sie nicht in E_∞ liegen. Ferner müssen alle Axen wegen ihrer Gleichwertigkeit gleich viel und gleichartige Doppelpunkte besitzen. In einem solchen vereinigen sich dann stets zwei Durchstosspunkte einer Axe mit der Fläche.

Wenn wir nun in $A_l = 0$, $y = z = 0$ setzen, so resultirt die Gleichung:

$$B \equiv 8(Ax^2-1) + 4\{Ax^2(B+C)-(A+B+C)\}\left\{x^2 - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\right\}$$
$$+ABC\left\{x^2 - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\right\}^3 = 0$$

oder wenn wir

$$\alpha \equiv x^2 - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)$$

setzen:

$$B \equiv \alpha\{ABC\left(\alpha^2 - 3\alpha\frac{2}{C}+\frac{12}{C^2}\right)+4[Ax^2(B+C)-(A+B+C)]\}$$
$$-\frac{8AB}{C^2}-\frac{8}{C}\{Ax^2(B+C)-(A+B+C)\}+8(Ax^2-1)$$
$$\equiv \alpha\{ABC\alpha^2 - 6AB\alpha + 4\frac{AB}{C}+4[Ax^2(B+C)-(A+B+C)]\} = 0$$

Setzt man

$$\beta \equiv x^2 - \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) = \alpha + 2\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right) = \alpha - 2\frac{B-C}{BC}$$

so wird:

$$B \equiv \alpha\{\beta[ABC\beta+4(B-C)A-6AB]+4\frac{(B-C)^2A}{BC}$$
$$-12\frac{A(B-C)}{C}+4\frac{AB}{C}+4[Ax^2(B+C)-(A+B+C)]\}$$
$$= \alpha.\beta.\{ABC.\beta+4(B-C)A-6AB+4A(B+C)\}$$
$$= \alpha.\beta.ABC\left[x^2 - \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\right]$$

Also

$$B \equiv ABC\left\{x^2 - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\right\}\left\{x^2 - \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\right\}$$
$$\times\left\{x^2 - \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\right\} = 0$$

Digitized by Google

giebt die Durchstosspunkte der x-Axe mit der Fläche, die im allgemeinen, wenn A, B, C ungleich sind, und C endlich ist, 6 verschiedene Werte für x liefert.

Die x-Axe kann daher keinen Doppelpunkt unserer Fläche Ω^* enthalten, und damit auch nicht die y- und z-Axe.

„Daraus folgt, dass unsere Fläche Ω^* eine unendlich ferne „dreifache Knotencurve, den Kugelkreis, und zwölf endliche Doppel-„punkte gewöhnlicher Art hat, ausser welchen Ω^* keine Knoten-„curve und keinen Doppelpunkt mehr enthält."

Der ebene Durchschnitt der xy-Ebene mit Ω^* hat, wie jeder Durchschnitt, die unendlich fernen Kreispunkte zu dreifachen Punkten und ausserdem noch vier Doppelpunkte, welche sämtlich dem Kreise angehören:

$$K \equiv x^2 + y^2 - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = 0$$

Benutzt man in der Gleichung des Durchschnitts der xy-Ebene die Function k, so ergiebt sich als Gleichung dieses Durchschnitts:

$$\begin{aligned} C \equiv\; & 8\{Ax^2 + By^2 - 1\} + 4\{Ax^2(B+C) + By^2(C+A) - (A+B+C)\} \\ & \times \left\{k - \frac{2}{C}\right\} + ABC\left\{k - \frac{2}{C}\right\}^3 \\ & = kX - 8\left\{\frac{AB}{C}x^2 + \frac{AB}{C}y^2 - \frac{A+B}{C} + \frac{AB}{C^2}\right\} \\ & = k\left\{X - \frac{8AB}{C}\right\} = 0 \end{aligned}$$

worin X eine Function 4. Grades ist.

Daraus ergiebt sich der Satz:

„Der Durchschnitt der xy-Ebene (also auch derjenige in jeder „der Hauptebenen) mit der Fläche Ω^* zerfällt in einen Kreis und „in eine Curve 4. Ordnung mit den unendlich fernen Kreispunkten „der Ebene, die ja dreifache Punkte des Durchschnitts, aber nur „einfache des Kreises sind, als Doppelpunkten. Diese Kreispunkte „sind in jeder Hauptebene die einzigen Doppelpunkte der Teilcurve „4. Ordnung."

„In jeder Hauptebene trifft der Schnittkreis die Ergänzungs-„curve 4. Ordnung in den sämtlichen 6 Flächendoppelpunkten dieser Ebene."

Diese Durchschnitte in den Hauptebenen der Fläche Ω^* werden ähnlich so entstehen, wie diejenigen in den Hauptebenen der früher behandelten Fläche ω^*. Wir können aber hier nicht näher darauf eingehen.

Digitized by Google

§. 6.

Fortsetzung.

Ein besonders interessanter Fall ist derjenige, dass die Grundfläche ein Paraboloid ist mit der Gleichung:

$$\varphi = By^2 + Cz^2 - 2Ax = 0$$

Dann ergiebt sich die Gleichung des Spitzenorts aller dual-orthogonalen Tangentenkegel der durch $\varphi = 0$ dargestellten Fläche aus

$$\mathrm{A}_1 \equiv 8w^4 . \varphi\Delta^2 + 4(A_1\varphi + \sigma)(A_2\varphi - \psi)\Delta w^2 + (A_1\varphi - \psi)^3 = 0$$

wenn wir darin setzen:

$$\Delta = -A^2BC; \quad \varphi = By^2 + Cz^2 - 2Ax$$

$$A_1\varphi + \sigma = -BC\left\{y^2 + z^2 - \frac{2A}{BC}(B+C)x - \frac{A^2}{BC}\right\}$$

$$A_2\varphi - \psi = -ABC\left\{2x + \frac{A(B+C)}{BC}\right\}$$

Die Gleichung $\mathrm{A}_1 = 0$ wird also in x, y, z vom dritten Grade, und aus der homogen geschriebenen Function A_1 muss w^3 als Factor heraustreten, d. h. aus jedem Punkte der $E_\infty (w = 0)$ wird die Grundfläche durch einen zum orthogonalen dualen Tangentenkegel projicirt. Letztere sind sämtlich parabolische Cylinder, weil auch E_∞ zu ihren Tangentialebenen gehört. Für einen solchen aber, dessen Gleichung geschrieben werden kann:

$$by^2 + 0 . z^2 - 2ax = 0$$

besteht also auch die Bedingung:

$$-8a_3^2 + 4a_1a_2a_3 - a_2^3 = 0$$

worin nach §. 3., 4. $a_1 = -b$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ zu setzen ist, d. h. jeder parabolische Cylinder kann als ein zum orthogonalen dualer Kegel aufgefasst werden. Daher gehört auch E_∞ dem Spitzenorte an.

Streng genommen zerfällt also der jetzige Spitzenort in die dreifach zu nehmende E_∞, von der wir jedoch hinfort absehen wollen, und in eine Fläche 3. Ordnung, die Ω_p^* heissen soll, und als deren homogene Gleichung sich ergiebt:

$$1) \quad \mathrm{A}_p \equiv 8A(By^2 + Cz^2 - 2Awx).w - 4BC\left\{y^2 + z^2 - \frac{2A}{BC}(B+C)xw - \frac{A^2}{BC}.w^2\right\}\left\{2x + \frac{A(B+C)}{BC}.w\right\} - BC\left\{2x + \frac{A(B+C)}{BC}.w\right\}^3 = 0$$

Digitized by Google

welche sich auch, von einem constanten Factor abgesehen, in der unhomogenen Form schreiben lässt:

$$2)\quad A_p \equiv 4y^2\left\{2x - \frac{A(B-C)}{BC}\right\} + 4z^2.\left\{2x + \frac{A(B-C)}{BC}\right\}$$
$$+\left\{2x - \frac{A(B+C)}{BC}\right\}\left\{2x - \frac{A(B-C)}{BC}\right\}\left\{2x + \frac{A(B-C)}{BC}\right\} = 0$$

Diese Gleichungen lehren,

1. „dass $\Omega_p{}^*$ eine Fläche 3. Ordnung ist, welche die Axe des „Grundparaboloids ($y = 0$, $z = 0$) zur Symmetrieaxe, und dessen „Hauptebenen zu Symmetrieebenen hat";

2. „dass die ebene Schnittcurve in $E_\infty (w = 0)$ zerfällt, und „zwar in eine reelle Gerade, die unendlich ferne Gerade der Schei-„teltangentialebene des Grundparaboloids ($x = 0$), die g_∞ heissen „soll, und in den unendlich fernen imaginären Kugelkreis ($K_\infty{}^2$)";

3. „dass jede zur Axe des Paraboloids normale Ebene ($x = r$) „nach 2) die Fläche Ω^* ausser in g_∞ noch in einem centrischen „Kegelschnitt schneidet, welcher zerfällt, wenn die Discriminante der „Gleichung 2) in Bezug auf die Variabeln y und z, nämlich:"

$$\left(2x - \frac{A(B-C)}{BC}\right)^2\left(2x + \frac{A(B-C)}{BC}\right)^2\left(2x - \frac{A(B+C)}{BC}\right) = 0$$

Daraus ergiebt sich ferner:

„dass von den fünf Ebenen des Büschels durch g_∞, in denen „der Restschnitt mit $\Omega_p{}^*$ zerfällt, zwei mal zwei zusammenfallen".

Diese beiden Ebenen sind dargestellt durch:

$$2x = \frac{A(B-C)}{BC};\quad 2x = -\frac{A(B-C)}{BC}$$

Setzt man diese Werte für $2x$ in die Gleichung 2) ein, so ergeben sich die Gleichungen der Geradenpaare in den betreffenden Ebenen, und man erkennt dann, dass diese Geradenpaare in beiden Ebenen zusammenfallen, und zwar in der ersten in die Doppelgerade $z^2 = 0$, die g_1 heissen soll, in der zweiten in die Doppelgerade $y^2 = 0$, die g_2 heissen möge, und welche zu g_1 senkrecht ist.

Endlich ergiebt sich, dass auch noch die durch

$$2x = \frac{A(B+C)}{BC}$$

Digitized by Google

dargestellte Ebene durch g_∞ aus Ω_p^* ein Geradenqaar ausschneidet, und zwar mit der Gleichung

$$Cy^2 + Bz^2 = 0$$

Das Geradenpaar ist also punktirt oder reell, je nachdem das Grundparaboloid ein elliptisches oder hyperbolisches ist.

Wir fanden also,

„dass an g_∞ zwei zu einander senkrechte quaternäre $(g_1\, g_2)$ und „ein Geradenpaar mit unären Geraden, die a', a'' heissen mögen, „hangen". (Cf. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung, Achtes Kapitel, Art. 123 et sqq.)

Das bringt uns auf die Vermutung, dass Ω_p^* 4 Knotenpunkte haben kann, die dann zu je zweien auf g_1 und g_2 liegen.

Dies wird sich zeigen, wenn wir die Ebenen der Büschel durch g_1 und g_2 hinsichtlich ihrer Durchschnitte mit Ω_p^* betrachten.

Setzt man nun in 2) $2x + \frac{A(B-C)}{BC}$ statt $2x$, so ist für die resultirende Flächengleichung g_1 die y-Axe und die Ebene $2x = \frac{A(B-C)}{AB}$ oder $(g_1 g_\infty)$ die yz-Ebene, während die xy-Ebene dieselbe bleibt. Diese Gleichung lautet:

$$4y^2 . 2x + 4z^2 . \left(2x + \frac{2A(B-C)}{BC}\right) + 2x\left(2x + \frac{2A(B-C)}{BC}\right) \times \left(2x - \frac{2A}{B}\right) = 0$$

oder

$$y^2 . x + z^2 . \left(x + \frac{A(B-C)}{BC}\right) + x\left(x + \frac{A(B-C)}{BC}\right)\left(x - \frac{A}{B}\right) = 0$$

Macht man hierin die Substitutionen:

$$\left\{\begin{matrix} x & y & z \\ x\cos\alpha, & y, & x\sin\alpha \end{matrix}\right\}$$

so ergiebt sich die Gleichung des Durchschnitts unserer Fläche mit der als neue xy-Ebene genommenen Ebene durch g_1, welche zur ursprünglichen xy-Ebene die Neigung α hat, nämlich:

$$y^2 . x\cos\alpha + x^2 . \sin^2\alpha \left\{x\cos\alpha + \frac{A(B-C)}{BC}\right\} + x\cos\alpha . \left\{x\cos\alpha + \frac{A(B-C)}{BC}\right\} \left\{x\cos\alpha - \frac{A}{B}\right\} = 0$$

Digitized by Google

Die betrachtete Ebene schneidet die Ω_p^* also ausser in g_1 noch in einem Kreise, dessen Gleichung lautet:

$$K_1 \equiv y^2 \cos\alpha + x^2 \cos\alpha + x\frac{A}{B}\left(\frac{B-C}{C} - \cos^2\alpha\right) - \cos\alpha\,\frac{A^2(B-C)}{B^2C} = 0$$

Alle diese Kreise, die Restschnittcurven der Ebenen des Büschels durch $g_1\,(x=0)$, schneiden also g_1 in denselben Punkten, deren Coordinaten ausser

$$z = 0, \quad x = \frac{A(B-C)}{2BC} \quad \text{sind:} \quad y = \pm\frac{A}{B}\sqrt{\frac{B-C}{C}}$$

„Also ergeben sich auf g_1 zwei Knotenpunkte der Ω_p^*, deren „Coordinaten sind“:

$$\text{I.} \quad x = \frac{A(B-C)}{2BC}, \quad y = \pm\frac{A}{B}\sqrt{\frac{B-C}{C}}, \quad z = 0$$

Die Werte von $\cos\alpha$, für welche der durch $k=0$ dargestellte Kreis in ein (imaginäres) Geradenpaar zerfällt, müssen die Discriminante von $k=0$ verschwinden machen. Diese ist:

$$\varDelta \equiv -\cos^3\alpha \,.\, \frac{A^2(B-C)}{B^2C} - \cos\alpha \,.\, \frac{A^2}{4B^2}\left(\frac{B-C}{C} - \cos^2\alpha\right)^2$$

oder mit Unterdrückung des Factors $-\dfrac{A^2}{4B^2}$

$$\varDelta \equiv \cos\alpha\left\{4\frac{B-C}{C}\cos^2\alpha + \left(\cos^2\alpha - \frac{B-C}{C}\right)^2\right\}$$

$$= \cos\alpha\left\{\cos^2\alpha + \frac{C-B}{C} - 2\cos\alpha\sqrt{\frac{C-B}{C}}\right\}\left\{\cos^2\alpha + \frac{C-B}{C} - 2\cos\alpha\sqrt{\frac{C-B}{C}}\right\}$$

$$= \cos\alpha\left\{\cos\alpha - \sqrt{\frac{C-B}{C}}\right\}^2 \cdot \left\{\cos\alpha + \sqrt{\frac{C-B}{C}}\right\}^2$$

Der Kreis $k=0$ zerfällt also für $\cos\alpha = 0$, d. h. in der Ebene (g_1, g_∞), für

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{C-B}{C}}, \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{C-B}{C}}$$

und zwar sind in den beiden durch die zwei letzten Relationen charakterisirten Ebenen, die α_1 und α_2 bzhw. heissen mögen, jedesmal zwei Dreiecksebenen der allgemeinen Fläche 3. Ordnung vereinigt, d. h. die Doppelpunkte der Geradenpaare in α_1 und α_2 sind Knotenpunkte der Ω_p^*. (cf. R. Sturm, Flächen dritter Ordnung, Cap. 8., Art. 112.) Nun aber geht das Geradenpaar in α_1 sowol

Digitized by Google

als in α_2, wie überhaupt alle Schnittcurven der Ebenen des Büschels durch g_1, durch beide Knotenpunkte auf g_1, andererseits ist aus $k = 0$ leicht zu erkennen, dass keine Gerade beider Geradenpaare mit g_1 zusammenfällt, weil dann für

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{C-B}{C}}$$

in $k = 0$ das absolute Glied verschwinden müsste, was nicht geschieht.

Wir folgern daraus, dass die Doppelpunkte der Geradenpaare in α_1 und α_2 ausserhalb g_1 liegen, und da sie Knotenpunkte der $\Omega_p{}^*$ sind, so können sie nur der quaternären Geraden g_2 angehören.

Dies bestätigt sich, wenn wir in der Flächengleichung 2) statt $2x$ $2x - \frac{A(B-C)}{AC}$ setzen, wodurch g_2 z-Axe wird, und dann die Substitutionen vornehmen

$$\begin{Bmatrix} x & y & z \\ x\cos\alpha, & x\sin\alpha, & z \end{Bmatrix}$$

Die resultirende Gleichung ist dann die Gleichung des ebenen Durchschnitts der als xz-Ebene genommenen Ebene durch g_2, die mit der ursprünglichen xz-Ebene (der zu g_1 normalen Ebene durch g_2) die Neigung α hat.

In dieser Gleichung tritt x als Factor heraus, und es ergiebt sich als Gleichung der Restschnittcurve jeder Büschelebene durch g_2:

$$k_2 \equiv x^2\cos\alpha + z^2\cos\alpha - x\left(\frac{B-C}{B} + \cos^2\alpha\right)\frac{A}{C} + \frac{A^2(B-C)}{BC^2}\cos\alpha = 0$$

Für jeden Wert von α stellt nun $k_2 = 0$ einen Kreis dar, welcher die Gerade g_2 $(x = 0)$ stets in denselben beiden Punkten trifft, die also weitere zwei Knotenpunkte auf $\Omega_p{}^*$ sein müssen.

„Die auf g_2 liegenden Punkte, deren Coordinaten sind:

$$\text{II.} \quad x = -\frac{A(B-C)}{2BC}, \quad y = 0, \quad z = \pm\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{B}}$$

„sind weitere zwei Knotenpunkte der Fläche $\Omega_p{}^*$".

Es ist leicht zu erkennen, dass die Punkte I. reell sind, wenn die Punkte II. imaginär sind, und umgekehrt, im Falle B und C positiv, d. h. das Grundparaboloid elliptisch ist, und dass sämtliche vier Knotenpunkte imaginär werden, wenn B oder C negativ, d. h. das Grundparaboloid ein hyperbolisches ist. Ferner ist unschwer zu

Digitized by Google

sehen, dass die vier gefundenen Punkte I. und II. eben die vier Nabelpunkte des gegebenen Paraboloids sind, die hinsichtlich ihrer Realität oder Imaginarietät ja so beschaffen sind, wie oben gesagt.

Mit der Zahl 4 ist die Maximalzahl der Knotenpunkte einer Fläche 3. Ordnung erreicht. Die Art derselben ergiebt sich aus der Bemerkung, dass sie weder alle noch zur Hälfte biplanar sein können, weil dann die Classe 12 der kubischen Fläche Ω_p^* mindestens bis auf 2 reducirt würde.

Da hiernach auch nicht einer biplanar sein kann, weil die Symmetrie von Ω_p^* dann noch einen zweiten biplanaren Knotenpunkt erfordert, so ergiebt sich,

„dass unsere Fläche Ω_p^* die Maximalzahl der Knotenpunkte „nämlich vier, besitzt, welche mit den vier Nabelpunkten des Grund-„paraboloids zusammenfallen, und dass sämtliche Knotenpunkte ge-„wöhnlicher Art sind. Demgemäss ergiebt sich als Classe unserer „Fläche, wie in §. 11., die Zahl $12-4.2=4$“.

In dem Aufsatze von Cayley: „A memoir on cubic surfaces“ (Philosophical Transactions für 1869) ist auch die Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten behandelt. (cf. Section XVIII, S. 313). Dort benutzt Cayley die Gleichung

$$W(XY+XZ+YZ)+XYZ=0$$

worin $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $W=0$ die Ebenen des Tetraeders der vier Knotenpunkte bedeuten.

Setzen wir nun:

$$X \equiv \sqrt[3]{\frac{4B^2}{C(C-B)}} \cdot \left\{x+z\sqrt{\frac{C-B}{B}}-\frac{A(B-C)}{2BC}\right\}$$

$$Y \equiv \sqrt[3]{\frac{4B^2}{C(C-B)}} \cdot \left\{x-z\sqrt{\frac{C-B}{B}}-\frac{A(B-C)}{2BC}\right\}$$

$$Z \equiv \sqrt[3]{\frac{4C^2}{B(B-C)}} \cdot \left\{x-y\sqrt{\frac{B-C}{C}}+\frac{A(B-C)}{2BC}\right\}$$

$$W \equiv \sqrt[3]{\frac{4C^2}{B(B-C)}} \cdot \left\{x+y\sqrt{\frac{B-C}{C}}+\frac{A(B-C)}{2BC}\right\}$$

so geht die Gleichung unserer Fläche Ω_p^*

Digitized by Google

$$A^2 \equiv 4\delta\kappa . \left\{2x - \frac{A(B-C)}{BC}\right\} + 4z . \left\{2x + \frac{A(B-C)}{BC}\right\}$$
$$+ \left\{2x - \frac{A(B+C)}{BC}\right\} \left\{2x - \frac{A(B-C)}{BC}\right\} \left\{2x + \frac{A(B-C)}{BC}\right\} = 0$$

in die obige Cayley'sche Form über.

„Wir können daher jetzt mit Cayley schliessen, dass die Fläche „Ω_p^* neun Geraden besitzt, unter denen die sechs Kanten des „Knotenpunktstetraeders quaternär, die übrigen drei, welche von „uns g_∞, a', a'' genannt wurden, unär sind".

(Vergleiche auch Sturm, Flächen 3. Ord. Cap. 8. Art. 123.)

Ferner müssen die drei unären Geraden zusammen von allen quaternären getroffen werden. Nennt man nun die auf g_1 und g_2 liegenden Knotenpunkte resp. K_1, K_1' und K_2, K_2', und die Geraden, welche K_1 mit K_2, K_2' verbinden, bzhw. b_1, b_2, und diejenigen, welche K_1' mit K_2, K_2' verbinden, bzhw. b_1', b_2', so wird zunächst g_∞ von g_1 und g_2, nicht aber von den b getroffen, weil die Ebenen der b nicht durch g_∞ gehen. Da aber der Restschnitt von Ω_p^* in E_∞ imaginär ist, so müssen sämtliche Geraden b imaginär sein, und zwar punktirt, wenn zwei der Knotenpunkte auf Ω_p^*, die auch Punkte der b sind, reell sind; sind aber keine reell, so müssen auch die b ganz imaginär sein.

Da die b die Gerade g_∞ nicht treffen, so müssen sie das Geradenpaar $a'a''$ schneiden, und zwar können nur je zwei windschiefe der Geraden b einer Geraden a begegnen. Wenn a' von b_1, b_2' getroffen wird, so wird a'' von b_1', b_2 geschnitten. Hiernach lassen sich folgende Tripel bilden, von denen je zwei untereinanderstehende sich gegenseitig schneiden, sich ergänzen (C. Sturm, Math. Annalen Bd 23. S. 290).

$$a' g_1 g_2, \quad a'' g_1 g_2$$
$$g_\infty b_1 b_2', \quad g_\infty b_1' b_2$$

Da ferner die Verbindungsebene einer unären mit einer quaternären Geraden längs der letzteren die Fläche 3. Ordnung, welcher beide angehören, berührt, so sind die Ebenen:

$$(g_\infty g_1), \quad (g_\infty g_2), \quad (a'b_1), \quad (a'b_2'), \quad (a''b_1'), \quad (a''b_2)$$

„Tangentialebenen der Ω_p^*, so dass jede der 3 unären Geraden, die „ein Dreieck bilden, je zwei Gegenkanten des Knotenpunktstetraeders „trifft und mit ihnen 2 Ebenen bildet, welche längs den Kanten die „Fläche berühren".

(cf. Sturm, Flächen 3. Ord., Cap. 8., Art. 123).

Digitized by Google

Man sieht auch leicht,

„dass jede der quaternären Geraden ausser von diesem einen „Geradenpaar, dessen eine Gerade unär ist und dessen andere mit „der quaternären Geraden zusammenfällt, von 2 andern durch qua- „ternäre Geraden gebildeten Paaren getroffen wird, deren Mittel- „punkte die beiden nicht auf ihr liegenden Knotenpunkte sind und „welche die Gerade selbst in den auf ihr liegenden Knotenpunkten „treffen".

(cf. Sturm, ebendaselbst).

Diese Sätze lassen erkennen, wie die 10 an einer Geraden der allgemeinen Fläche 3. Ordnung hangenden Geradenpaare für $\Omega_p{}^*$ herauskommen.

Ferner ergiebt sich nach Sturm und Cayley, dass die in §. 11. meiner Diss. behandelte Fläche $\omega_p{}^*$ als ein Specialfall der jetzigen erscheint, indem sie durch das Zusammenrücken zweier gepaarter Knotenpunkte (auf g_1 und g_2) in einem biplanaren Knotenpunkt von höherer Singularität (B_4 nach Herrn Cayley's Bezeichnung, weil er die Classe um 4 reducirt) entstanden ist. Aus zwei zusammenfallenden quaternären Geradenpaaren resultirt ein octanäres, während zugleich noch ein Paar unärer Geraden mit einer andern quaternären Geraden, nämlich derjenigen, welche durch den auf obige Weise entstandenen biplanaren Doppelpunkt geht (g_1 oder g_2), zu einer senären Geraden sich vereinigt. Dadurch sind aus den g Geraden der Fläche $\Omega_p{}^*$ die 5 Geraden der Fläche $\omega_p{}^*$ entstanden, von denen stets nur 3 reell sind.

Ist in $\varphi \equiv By^2 + Cz^2 - 2Ax = 0$ etwa $C = \infty$, d. h. ist das Grundparaboloid zu einer als Fläche 2. Classe aufgefassten und in der xy-Ebene liegenden Parabel degenerirt, so ergiebt sich aus der Gleichung 1) nach Division mit $-BC$ die specielle Flächengleichung:

$$-8\frac{A}{B}z^2 + 4\left(y^2 + z^2 - \frac{2A}{B}x\right)\left(2x + \frac{A}{B}\right) - \left(2x + \frac{A}{B}\right) = 0$$

Dies ist für $\frac{A}{B} = p$ die Gleichung der in §. 11. m. Diss. behandelten Fläche, die also hier als Specialfall erscheint.

Die reellen Geraden der jetzigen Fläche $\Omega_p{}^*$ werden aus den das Grundparaboloid tangirenden dual-orthogonalen Kegeln gewiss auf ähnliche Weise entstehen, wie die reellen Geraden der Fläche $\omega_p{}^*$. Jedoch ist mir die synthetische Betrachtung bis jetzt nicht gelungen.

Aus der Betrachtung der Durchschnitte der Ebenen des Büshels durch g_1 oder g_2 ergiebt sich folgende leichte geometrische Construction unserer Fläche:

„Denkt man sich eine Ebene Σ mit einer festliegenden Geraden, „etwa g_1, und eine dazu normale, g_1 nicht treffende Gerade, etwa „g_2, mit dem Fusspunkte P in Σ. Nimmt man dann auf g_2 zwei „gleich weit von P entfernte Punkte zu beiden Seiten von Σ an, „etwa K_2 und K_2', und zieht in jeder Ebene ξ des Büschels um g_2 „den Kreis k durch K_2, K_2' und den Spurpunkt von g_1 in ξ, so „beschreibt dieser Kreis eine Fläche 3. Ordnung, wie wir sie hier „behandelt haben".

Endlich wollen wir noch einen Specialfall unserer Fläche anführen.

Ist in der Gleichung:

$$\varphi \equiv By^2 + Cz^2 - 2Ax = 0 \quad B = C$$

d. h. das Grundparaboloid ein durch Rotation einer Parabel um ihre Axe entstandenes, so geht die Flächengleichung 2) über in:

$$y^2x + z^2x + x^2\left(x - \frac{A}{B}\right) \equiv x\left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{A}{B}x\right) = 0$$

„Die Fläche $\Omega_p{}^*$ zerfällt also in diesem Falle in eine Ebene „und eine sie berührende Kugel. Die Ebene ist die Scheiteltangentialebene des Grundparaboloids; die Kugel hat den Radius $\frac{A}{2B}$ und „ihr Mittelpunkt liegt auf der Axe des Grundparaboloids um $\frac{A}{2B}$ „vom Scheitel entfernt, ist also identisch mit dem Brennpunkte der „Meridianparabel des Grundparaboloids. Zugleich sind die vier „Knotenpunkte der allgemeinen Fläche in den Anfangspunkt, d. h. „in den gemeinsamen Punkt der Teile der jetzt zerfallenen Fläche „3. Ordnung zusammengerückt".

Digitized by Google

XIV.

Ueber eine Anwendung der Taylor'schen Reihe und einige bestimmte Integrale.

Von

Reinhard Mildner,

Professor der Landesrealschule in Römerstadt.

Angenommen $f(z+h)$ lasse sich entwickeln in eine Potenzreihe geordnet nach positiv ganzen Potenzen von z, so hat man:

$$1)\quad f(z+h) = f(h) + \frac{f'(h)}{1!}z + \frac{f''(h)}{2!}z^2 + \frac{f'''(h)}{3!}z^3 + \dots$$

Gesetzt die Reihe convergire für alle zwischen $+\lambda$ und $-\lambda$ liegenden z, so folgt durch Substitution von re^{-ax} in die vorangehende Gleichung:

$$2)\quad f(h+re^{-ax}) = f(h) + \frac{f'(h)}{1!}re^{-ax} + \frac{f''(h)}{2!}r^2e^{-2ax} + \frac{f'''(h)}{3!}r^3e^{-3ax} + \dots$$

wobei selbstverständlich r für $a > 0$ zwischen denselben Grenzen wie z liegen muss, also der Relation genügt: $-\lambda < r < +\lambda$. Wird in der letzten Gleichung a durch b ersetzt, so ist:

$$3)\quad f(h+re^{-bx}) = f(h) + \frac{f'(h)}{1!}re^{-bx} + \frac{f''(h)}{2!}r^2e^{-2bx} + \frac{f'''(h)}{3!}r^3e^{-3bx} + \dots$$

Digitized by Google

Verbindet man die zwei letzten Gleichungen durch Subtraction und integrirt zwischen den Grenzen 0 und ∞, so folgt, nachdem man zuvor die Differenz durch x dividirt:

$$\int_0^\infty \frac{f(h+re^{-ax})-f(h+re^{-bx})}{x}\,dx = \frac{f'(h)}{1!}\,r\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

$$+\frac{f''(h)}{2!}\int_0^\infty \frac{e^{-2ax}-e^{-2bx}}{x}\,dx+\frac{f'''(h)}{3!}\int_0^\infty \frac{e^{-3ax}-e^{-3bx}}{x}\,dx+\ldots$$

Da die einzelnen Integrale rechter Hand den gemeinschaftlichen Wert $\log\frac{b}{a}$ besitzen, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\int_0^\infty [f(h+re^{-ax})-f(h+re^{-bx})]\,\frac{dx}{x}$$

$$=\left[\frac{f'(h)}{1!}r+\frac{f''(h)}{2!}r^2+\frac{f'''(h)}{3!}r^3+\ \ldots\right]\log\frac{b}{a}$$

und es folgt unter Berücksichtigung des Taylor'schen Satzes für das nachstehende Integral die einfache Formel:

$$4)\quad \int_0^\infty [f(h+re^{-ax})-f(h+re^{-bx})].\frac{dx}{x}=[f(h+r)-f(h)].\log\frac{b}{a}$$

welche Gleichung für $h=0$ die einfache Form annimmt:

$$5)\quad \int_0^\infty [f(re^{-ax})-f(re^{-bx})].\frac{dx}{x}=[f(r)-f(0)].\log\frac{b}{a}$$

gültig für $a>0$ und $b>0$. Ersetzt man in der Gleichung 4) a und b beziehungsweise durch $p\log a$ und $q\log b$, so gibt dies:

$$6)\quad \int_0^\infty [f(h+ra^{-px})-f(h+rb^{-qx})].\frac{dx}{x}$$

$$=[f(r+h)-f(h)].\log\frac{q\log b}{p\log a}$$

p und q müssen hier positiv, ausserdem $a>1$ und $b>1$ sein.

Führt man in der Gleichung 4) die neue Veränderliche y mittelst der Gleichung $e^{-x}=y$ ein, so nimmt das betreffende Integral die Form an:

Digitized by Google

$$7)\quad \int_0^1 [f(h+ry^a)-f(h+ry^b)]\,\frac{dy}{y\log y} = [f(r+h)-f(h)]\log\frac{a}{b}$$

Zu einem allgemeineren Resultate führt die Formel 5), wenn daselbst a mit $a+bi$, ferner b mit $a-bi$ und r mit $re^{\varphi i}$ vertauscht wird, wobei jedoch der reelle Bestandteil a positiv sein muss. Dadurch gelangt man zu der Gleichung:

$$8)\quad \int_0^\infty \{f[re^{-ax+(\varphi+bx)i}]-f[re^{-ax+(\varphi-bx)i}]\}.\frac{dx}{x}$$
$$= 2i[f(re^{\varphi i})-f(0)].\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

welche für $\varphi = 0$ in die folgende übergeht:

$$9)\quad \int_0^\infty [f(re^{-ax+bxi})-f(re^{-ax-bxi})].\frac{dx}{x} = 2i[f(r)-f(0)].\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Behufs Anwendung der Formeln 4) und 7) setze man beispielsweise:

$$f(h+z) = \log(1+z)$$

so folgt durch diese Substitution das specielle Resultat:

$$\int_0^\infty \log\frac{1+re^{-ax}}{1+re^{-bx}}\cdot\frac{dx}{x} = \int_0^1 \log\frac{1+ry^b}{1+ry^a}\cdot\frac{dy}{y\log y} = \log(1+r).\log\frac{b}{a}$$

gültig für $-1 < r \leqq +1$.

Die einfachere Gleichung 5) gibt für

$$f(z) = e^{e^z}$$

den Wert des Integrals:

$$\int_0^\infty \left(e^{e^{-ax}} - e^{e^{-bx}}\right)\cdot\frac{dx}{x} = (e^e-e).\log\frac{b}{a};\quad \text{für } a>0,\quad b>0$$

und aus der Formel 6) erhält man für $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$ und $h = 0$:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+a^{px}} - \frac{1}{1+b^{qx}}\right)\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{1+r}\log\frac{\log b^q}{\log a^p}$$

dabei muss $-1 < r < +1$ sein.

Digitized by Google

Aus der Formel 8) ergeben sich für

$$f(z) = \log(1+z)$$

die Werte der folgenden Integrale:

$$\int_0^\infty \log \frac{e^{2ax}+2re^{ax}\cos(\varphi-bx)+r^2}{e^{2ax}+2re^{ax}\cos(\varphi+bx)+r^2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= 4 \operatorname{arctg} \frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \left[\operatorname{arctg} \frac{r\sin(\varphi+bx)}{e^{ax}+r\cos(\varphi+bx)} - \operatorname{arctg} \cdot \frac{r\sin(\varphi-bx)}{e^{ax}+r\cos(\varphi-bx)}\right] \frac{dx}{x}$$

$$= \log(1+2r\cos\varphi+r^2) \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

wobei das letztere für $\varphi = 0$ das einfache Resultat liefert:

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{r\sin bx}{e^{ax}+r\cos bx} \cdot \frac{dx}{x} = \log(1+r) . \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

In diesen Integralen muss

$$-1 \overline{\overline{<}} r \overline{\overline{<}} +1$$

sein. Schliesslich findet man für

$$f(z) = e^z$$

aus der Gleichung 9):

$$\int_0^\infty e^{r\cos bx e^{-ax}} . \sin(r\sin bx\, e^{-ax}) . \frac{dx}{x} = (e^r-1) . \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

gültig für $a > 0$.

Es ist bekanntlich unter der Voraussetzung $f(0) = 0$:

$$\int_0^\infty f(re^{-ax})\,dx = \frac{1}{a} \int_0^r \frac{f(x)}{x}\,dx$$

und man hat, wenn daselbst a durch $a-bi$ ersetzt wird:

10) $$\int_0^\infty f(re^{-ax} . e^{bxi})\,dx = \frac{a+bi}{a^2+b^2} \int_0^r \frac{f(x)}{x}\,dx, \quad \text{für } a > 0$$

Digitized by Google

Das erste Integral kann man folgendermassen umformen:

$$\int_0^\infty f(re^{-ax}.e^{bxi})\,dx = \int_0^{2\pi} f(re^{-ax}.e^{bxi})\,dx + \int_{2\pi}^\infty f(re^{-ax}.e^{bxi})\,dx$$

Der letzte Teil lässt sich, sobald b als ganze Zahl angenommen wird, auf das Integral linker Hand zurückführen, wenn man die neue Variable

$$x = 2\pi + y$$

einführt. Es ist alsdann:

$$\int_{2\pi}^\infty f(re^{-ax}.e^{bxi})\,dx = \int_0^\infty f(re^{-2a\pi}.e^{-ay}.e^{byi})\,dy$$

welches Integral in die vorige Gleichung substituirt mit Rücksicht auf die Formel 10) gibt:

$$11)\qquad \int_0^{2\pi} f(re^{-ax}.e^{bxi})\,dx = \frac{a+bi}{a^2+b^2}\int_{re^{-2a\pi}}^{r} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

Aehnlich folgt der Wert des nachstehenden Integrals:

$$12)\qquad \int_0^{\pi} f(re^{-ax}.e^{bxi})\,dx = \frac{a+bi}{a^2+b^2}\int_{(-1)^b re^{-a\pi}}^{r} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

In den letzten zwei Resultaten muss $f(0) = 0$ sein, während b als ganze Zahl vorausgesetzt wird.

Behufs Anwendung der Formel 10) auf ein specielles Beispiel sei

$$f(z) = ze^z$$

so folgen daraus sofort die Werte der zwei Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-ax+r\cos bx e^{-ax}}.\cos(bx + r\sin bx\, e^{-ax})\,dx = \frac{a(e^r-1)}{r(a^2+b^2)}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax+r\cos bx e^{-ax}}.\sin(bx + r\sin bx\, e^{-ax})\,dx = \frac{b(e^r-1)}{r(a^2+b^2)}$$

und für

Digitized by Google

$$f(z) = \frac{z}{1+z}$$

gibt die Gleichung 11):

$$\int_0^{2\pi} \frac{r + e^{ax}\cos bx}{e^{2ax} + 2r\, e^{ax}\cos bx + r^2}\, dx = \frac{a}{r(a^2+b^2)} \cdot \log \frac{1+r}{1+r\, e^{-2a\pi}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ax}\sin bx}{e^{2ax} + 2r\, e^{ax}\cos bx + r^2}\, dx = \frac{b}{r(a^2+b^2)} \cdot \log \frac{1+r}{1+r\, e^{-2a\pi}}$$

a ist in diesen speciellen Resultaten positiv und b in den **letzten** zwei Formeln als ganze Zahl vorausgesetzt.

Unter Benutzung des bekannten Integrals:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \,.\, \cos bx}{x}\, dx = \begin{cases} 0; & \text{für } a < b \\ \frac{\pi}{4}; & \text{für } a = b \\ \frac{\pi}{2}; & \text{für } a > b \end{cases}$$

erhält man mühelos nach Entwicklung der Function unterm Integralzeichen in eine Reihe die nachstehenden Resultate, wobei selbstverständlich g als positiv ganze Zahl vorausgesetzt wird:

13)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin gx}{x} \left[f(re^{xi}) + f(re^{-xi}) \right] dx =$$

$$\pi \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!} r + \frac{f''(0)}{2!} r^2 + \ldots + \frac{f^{(g-1)}(0) r^{g-1}}{(g-1)!} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{f^{(g)}(0)}{g!} r^g \right]$$

14)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} \left[f(re^{xi}) + f(re^{-xi}) \right] dx =$$

$$\pi \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!} r + \frac{f''(0)}{2!} r^2 + \ldots + \frac{f^{(g)}(0)}{g!} r^g \right]$$

gültig für $(g+1) > \lambda > g$.

Auf demselben Wege gelangt man noch zu den Werten der folgenden Integrale, die sich gleichfalls einzig und allein nur durch Reihenentwicklungen erledigen lassen:

Digitized by Google

15) $$\int_0^\infty \frac{\cos gx}{x}\left[f(re^{xi})-f(re^{-xi})\right]dx =$$

$$\pi i\left[f(r)-f(0)-\frac{f'(0)}{1!}r-\frac{f''(0)}{2!}r^2-\ldots-\frac{f^{(g-1)}(0)}{(g-1)!}r^{g-1}\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{f^{(g)}(0)}{g!}r^g\right]$$

16) $$\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{x}\left[f(re^{xi})-f(re^{-xi})\right]dx =$$

$$\pi i\left[f(r)-f(0)-\frac{f'(0)}{1!}r-\frac{f''(0)}{2!}r^2-\ldots-\frac{f^{(g)}(0)}{g!}r^g\right]$$

ebenfalls gültig für $(g+1)>\lambda>g$.

Ausserdem findet man für $\lambda=\infty$:

17) $$\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{x}\left[f(re^{xi})-f(re^{-xi})\right]dx = 0$$

Setzt man beispielsweise in den Formeln 13) und 15)

$$f(z)=e^z$$

und in den Formeln 14) und 16)

$$f(z)=\log(1+z)$$

so folgen die Werte der speciellen Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\sin gx}{x}\cdot e^{r\cos x}\cdot\cos(r\sin x)\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\ldots+\frac{r^{g-1}}{(g-1)!}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r^g}{g!}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos gx}{x}\cdot e^{r\cos x}\cdot\sin(r\sin x)\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[e^r-1-\frac{r}{1!}-\frac{r^2}{2!}-\ldots-\frac{r^{g-1}}{(g-1)!}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r^g}{g!}\right]$$

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} \cdot \log(1+2r\cos x+r^2)\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[r-\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}+\ldots+(-1)^{g+1}\cdot\frac{r^g}{g}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x} \cdot \operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1+r\cos x}\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\log(1+r)-r+\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}+\ldots+(-1)^g\frac{r^g}{g}\right]$$

wobei die zwei letzten Gleichungen nur für $(g+1) > \lambda > g$ gültig sind.

Es ist ferner bekannt, dass, sobald $F(x)$ die nachstehende Bedingung erfüllt:

18) $$F(n\pi \pm x) = F(x)$$

alsdann die Gleichung stattfindet:

19) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot F(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi F(x)\,dx$$

Die Function:

$$F(x) = \frac{\sin(2g+1)x}{\sin x}\left[f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})\right]$$

erfüllt in der Tat die geforderte Bedingung 18), weshalb man hat:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(2g+1)x}{\sin x}\left[f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})\right]dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2g+1)x}{x}\left[f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})\right]dx$$

Durch die Substitution $2x = y$ geht das Integral rechter Hand genau in das Integral 14) über, so dass die linke Seite durch das letztere ausgedrückt erscheint. $F(z)$ möge bei der Entwicklung in eine Potenzreihe nur ungerade Potenzen von z enthalten, also

$$F(z) = A_1 z + A_3 z^3 + A_5 z^5 + \ldots$$

sein, so folgt durch Substitution von $k.e^{xi}$ und $k.e^{-xi}$ für z:

Digitized by Google

$$F(ke^{xi})+F(ke^{-xi}) = a_1\cos x + a_3\cos 3x + a_5\cos 5x + \ldots$$

wobei es hier auf die Grösse der Coefficienten nicht ankommt, wenn nur die Reihe eine convergente ist, ebenso findet man:

$$f(re^{2xi})+f(re^{-2xi}) = b_0 + b_2\cos 2x + b_4\cos 4x + \ldots$$

Dies beachtend ergibt sich die identische Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}[F(ke^{xi})+F(ke^{-xi})][f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})]\,dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}(a_1\cos x + a_3\cos 3x + \ldots)\cdot(b_0 + b_2\cos 2x + b_4\cos 4x + \ldots)\,dx$$

Die einzelnen Integrale sind von der Form:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}.\cos(2g+1)x\cos 2px\,dx$$

und verschwinden, sobald $\lambda < 1$ vorausgesetzt wird, und man gelangt demnach zu dem einfachen Resultate:

20) $$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}[F(ke^{xi})+F(ke^{-xi})][f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})]\,dx = 0$$

Auf demselben Wege folgt der Wert des nachstehenden Integrals:

21) $$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}[F(ke^{xi})-F(ke^{-xi})][f(re^{2xi})-f(re^{-2xi})]\,dx = 0$$

Für

$$F(z) = f(z) = \log\frac{1+z}{1-z}$$

erhält man:

$$\int_0^\infty \log\frac{1+2k\cos x+k^2}{1-2k\cos x+k^2}.\log\frac{1+2r\cos 2x+r^2}{1-2r\cos 2x+r^2}.\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0,$$

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{2k\sin x}{1-k^2}.\operatorname{arctg}\frac{2r\sin 2x}{1-r^2}.\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0$$

Digitized by Google

Dabei muss sowol k als auch r zwischen $+1$ und -1 enthalten sein. Den zwei letzten Integralen kann man die Form geben:

$$\int_0^\infty \log\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}.\log\frac{1+b\cos 2x}{1-b\cos 2x}\,.\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0$$

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg}(c\sin x).\operatorname{arctg}(m\sin 2x)\,.\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0$$

Hier sind a und b zwischen denselben Grenzen enthalten wie k und r, während c und m beliebig reell sein können.

Behufs Anwendung der allgemeinen Formeln 20) und 21) sei noch

$$F(z) = \log\frac{1+z}{1-z} \quad \text{und} \quad f(z) = e^z$$

gegeben. Durch diese specielle Annahme findet man noch die Werte der Integrale:

$$\int_0^\infty \log\frac{1+2k\cos x+k^2}{1-2k\cos x+k^2}\,.\,e^{r\cos 2x}.\cos(r\sin 2x)\,.\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0$$

$$\int_0^\infty e^{r\cos 2x}\,.\sin(r\sin 2x)\operatorname{arctg}(c\sin x)\;.\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0$$

r und c sind in den zwei letzten Gleichungen beliebige reelle Zahleen, k dagegen ein echter Bruch.

Die bekannte leicht beweisbare Formel:

$$\int_0^\pi \frac{f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})}{1-2q\cos 2x+q^2}\,dx = \frac{2\pi}{1-q^2}\,.f(rq)$$

kann zur Herleitung eines neuen Resultats verwendet werden, wenn man zu diesem Zwecke der Kürze halber den Zähler unter dem Integralzeichen mit $\varphi(x)$ bezeichnet, also

$$\varphi(x) = f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})$$

setzt. Man hat alsdann:

Digitized by Google

$$\int_0^\pi \frac{(1-q^2)\,.\,\varphi(x)}{1-2q\cos 2x+q^2}\,dx = \int_0^\pi \varphi(x)\,dx - q\int_0^\pi \frac{(2q-2\cos 2x).\varphi(x)}{1-2q\cos 2x+q^2}\,dx$$

$$= 2\pi f(rq)$$

Der erste Teil verschwindet, sobald

$$f(0)=0$$

vorausgesetzt wird, und es erscheint dann das letzte Integral in der Form:

$$\int_0^\pi \frac{(2q-2\cos 2x)\,.\,\varphi(x)}{1-2q\cos 2x+q^2}\,dx = -\frac{2\pi}{q}\,.\,f(rq)$$

welche Gleichung nach q zwischen den Grenzen 0 und q integrirt gibt:

$$\int_0^\pi [f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})]\,.\,\log(1-2q\cos 2x+q^2)\,dx =$$

$$-2\pi\int_0^q \frac{f(rq)}{q}\,dq = -2\pi\int_0^{rq}\frac{f(x)}{x}\,dx$$

Da die Function unter dem Integralzeichen der Bedingungsgleichung 18) genügt, so gelangt man unter Benutzung der Gleichung 19) zu der nachfolgenden einfachen Formel:

22) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,[f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})]\,.\,\log(1-2q\cos 2x+q^2)\,dx =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi [f(re^{2xi})+f(re^{-2xi})]\,.\,\log(1-2q\cos 2x+q^2)\,dx$$

$$= -\pi\int_0^{rq}\frac{f(x)}{x}\,dx$$

welche an die Bedingung

$$f(0)=0$$

gebunden ist.

Als Anwendung dieser Formel sei

$$f(z) = \log(1+z)$$

gegeben, so hat man, nachdem vorher q durch $-q$ ersetzt worden:

$$23)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \log(1+2r\cos 2x + r^2) \,.\, \log(1+2q\cos 2x+q^2)\,dx =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \log(1+2r\cos 2x+r^2) \,.\, \log(1+2q\cos 2x+q^2)\,dx$$

$$= -\pi \int_0^{-rq} \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \pi\left[\frac{qr}{1^2} + \frac{(qr)^2}{2^2} + \frac{(qr)^3}{3^2} + \ldots\right]$$

wobei q und r zwischen $+1$ und -1 enthalten sein müssen.

Die Grenzfälle für

$$k = r = \pm 1$$

führen nach kurzer Rechnung zu den bemerkenswerten Ergebnissen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}[\log\cos^2 x]^2 dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}[\log\sin^2 x]^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi [\log\cos^2 x]^2 dx = \tfrac{1}{2}\int [\log\sin^2 x]^2 dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi(\log 2)^2.$$

Römerstadt im November 1889.

Digitized by Google

XV.

Darstellung der harmonischen Reihen durch Factorenfolgen.

Von

Franz Rogel.

Das Product der unendlichen Factorenfolge

$$\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\right)\left(\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right)\left(\frac{1}{5^0}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots\right)\cdots$$

$$=\prod_{p=2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^n}}=\Pi_m$$

worin für p der Reihe nach alle Primzahlen von 2 angefangen zu setzen sind, wird gebildet, wenn jedes Glied eines Factors mit jedem Gliede aller andern Factoren so vereinigt wird, dass jeder dieser als Factoren fungirenden geometrischen Reihen in einer und derselben Complexion nur durch ein einziges Individuum vertreten ist. Mit andern Worten, diese Factorenfolge wird identisch mit der Summe von Ausdrücken von der Form

$$\frac{1}{2^{\alpha n}.3^{\beta n}.5^{\gamma n}\ldots p^{\pi n}\ldots}$$

wenn den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \pi \ldots$ alle möglichen positiven Werte von 0 angefangen erteilt werden. Der Nenner ist

$$=(2^\alpha.3^\beta.5^\gamma\ldots p^\pi)^m$$

es gilt somit:

Digitized by Google

$$\prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p^m}} = \sum^{\infty} \frac{1}{(2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots p^\pi \ldots)^m} \tag{1}$$

Wenn nun die Exponenten α, β, $\gamma \ldots \pi \ldots$ alle Werte von 0 bis ∞ erhalten, so gehen aus dem Producte $2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots p^\pi \ldots$ sämtliche natürliche Zahlen hervor und jede derselben nur ein einziges Mal. Um das allgemeine Glied obiger Summe, d. h. die reciproke $n$te Potenz irgend einer Zahl

$$z = 2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots p^\pi \ldots$$

aus der Factorenfolge Π_n zu erhalten, muss das $(\alpha+1)$te Glied der ersten Reihe mit dem $(\beta+1)$ten Gliede der zweiten, mit dem $(\gamma+1)$ten Gliede der dritten, ... mit dem $(\pi+1)$ten Gliede der der Zahl p entsprechenden Reihe und endlich mit den ersten Gliedern $(=1)$ aller jener Reihen multiplicirt werden, welche jenen Primzahlen, die in z nicht enthalten sind, entsprechen, daher in

$$z = 2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots p^\pi$$

den Exponenten 0 haben. Demnach ist:

$$\prod_{p=2}^{\infty} \frac{p^n}{p^n - 1} = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = S_n \tag{2}$$

Die Summirung erstreckt sich über alle Werte von $z = 1$ bis $z = \infty$ Ist $n = 1$, so divergirt die Reihe rechts, denn sie ist dann die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots = \infty$$

und obige Gleichung hat dann nur eine rein formale Bedeutung; es lässt sich jedoch in diesem Falle der Schluss ziehen, dass, da

$$\Pi_1 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{5} \cdot \tfrac{11}{10} \ldots = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots = \infty$$

ist, notwendig

$$(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{7})(1-\tfrac{1}{11}) \ldots = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5}\ \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{10}{11} = 0$$

sein muss. Dies geht übrigens aus einem allgemeinen Satze über die Grenzwerte unendlicher Producte hervor, nachdem

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \ldots$$

eine divergente Reihe bildet.

Fehlt in Π_n der erste Factor $\frac{2^n}{2^n - 1}$, so entsteht die der Potenzreihe T_n der ungeraden Zahlen entsprechende Factorenfolge:

Digitized by Google

$$T_n = \prod_{p=3}^{\infty} \frac{p^n}{p^n - 1} \tag{3)}$$

Ebenso können die Potenzreihen der ungeraden Zahlen mit Zeichenwechsel in Factorenfolgen transformirt werden. Es ist

$$U_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \ldots = \Sigma \frac{(-1)^z}{(2z+1)^n} = \prod_{p=3}^{\infty} \frac{p^n}{p^n + (-1)^{\frac{p+1}{2}}}$$

$$= \frac{3^n}{3^n+1} \cdot \frac{5^n}{5^n-1} \cdot \frac{7^n}{7^n+1} \cdot \frac{11^n}{11^n+1} \cdots \tag{4)}$$

Die Richtigkeit dieses Ansatzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass das Product von Primzahlen der Form $4k+1$ eine Zahl derselben Form; das Product einer ungeraden Anzahl von Primfactoren der Form $4k+3$ ebenfalls eine Zahl derselben Form, das einer geraden Anzahl jedoch eine Zahl von der Form $4k+1$ hervorbringt. Jedem Primfactor der Form $4k+3$ das negative Zeichen vorgesetzt, wird das Vorzeichen irgend einer Zahl von der Anzahl gleicher oder ungleicher Primfactoren der Form $4k+3$, welche in ihr enthalten sind, abhangen.

Diese schon von Euler gekannten und von Lejeune-Dirichlet zu zahlentheoretischen Untersuchungen benutzten Umformungen harmonischer Reihen mit oder ohne Zeichenwechsel gestatten verschiedene weitere Anwendungen.

1.

Wird die Factorenfolge für eine beschränkte, endliche Anzahl, etwa für r Primzahlen $a, b, c \ldots k$ gebildet, so giebt sie eine Potenzreihe

$$\prod_{p=a}^{k} \frac{p^m}{p^m - 1} = \Sigma_q \frac{1}{q^m} \tag{5)}$$

in welcher für q alle jene Zahlen zu setzen sind, welche mit dem Producte $abc \ldots k$ mindestens einen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Umfasst $a, b, c \ldots$ k das Gebiet der sämtlichen Primzahlen von $p_2 = 2$ bis p_r, so wird durch die Factorenfolge $\prod_{2}^{p_r} \frac{p^n}{p^n - 1}$ eine Reihe gegeben welche in ihren $(p_r + 1)$ten Gliedern sich von der Reihe S_n nicht unterscheiden wird.

Digitized by Google

2.

Es ist

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{\prod\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p^n}{p^n - 1}}{\prod\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p^{2n}}{p^{2n} - 1}} = \prod_2 \left(1 + \frac{1}{p^n}\right)$$

oder

$$S_n = S_{2n} \prod_{p=2}^{\infty} \frac{p^n}{p^n + 1} \qquad 6)$$

woraus die Summen ungerader Ordnung, für welche bis jetzt noch keine Formel gefunden wurde, aus den genau summirbaren und für sehr grosse n auf 15 Decimalstellen berechneten S_{2n} bestimmt werden können. Zur wirklichen Berechnung genügt eine verhältnismässig geringe Factorenreihe.

Sei z. B. $n = 13$, so ist

$$S_{13} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{p^{13}}{p^{13} - 1} = \left(1 - \frac{1}{2^{13}}\right)\left(1 - \cdot \frac{1}{3^{13}}\right)\left(1 - \frac{1}{5^{13}}\right) \cdot 1 - \frac{1}{7^{13}}\Big)$$
$$= 1 \cdot 00012\,2713\,347$$

wo die 12te Stelle noch richtig und der Fehler $< \frac{1}{2.10^{13}}$ ist. Mit selbst nur 3 Factoren würde sich die 10te Stelle noch richtig ergeben haben. Dieselbe Genauigkeit durch unmittelbares Summiren von S_{13} zu erzielen, würde die Inanspruchnahme von mindestens 15 Reihengliedern erfordern. Zudem zeichnen sich die Factorenfolgen durch die vorzügliche Eignung zur logarithmischen Behandlung aus.

Zur Berechnung der ebenfalls noch nicht genau summirbaren Reihen U_{2n} kann in ähnlicher Weise die Formel $n-4$ mit Vorteil herangezogen werden.

Aus

$$\frac{T_{2n}}{U_n} = \frac{\prod\limits_{p=3}^{\infty} \frac{p^{2n}}{p^{2n} - 1}}{\prod\limits_{3} \frac{p^n}{p^n + (-1)^{\frac{p+1}{2}}}} = \prod \frac{p^n}{p^n + (-1)^{\frac{p-1}{2}}}$$
$$= 1 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} \pm \cdots$$

entsteht eine Potenzreihe, in welcher die Primzahlen von der Form $4k+3$ (und die Potenzen derselben) das positive, und jene von der Form $4k+1$ das negative Vorzeichen haben.

Digitized by Google

3.

Jede Factorenfolge gebrochener Functionen der Primzahlen $\prod_{2}^{\infty}\frac{\varphi(p)}{f(p)}$ lässt sich durch die harmonischen Summen S ausdrücken, wenn $\varphi(p)$ und $f(p)$ sich in Factoren der Form $p^{\lambda}-1$ zerlegen lassen.

Factorenfolgen von der Form

$$\prod_{2}^{\infty}\frac{p^m}{p^m+p^{m-1}+\ldots+p+1}$$

verschwinden; denn es ist

$$S_{m+1}=\Pi\frac{p^{m+1}}{p^{m+1}-1}=\prod_{2}^{\infty}\frac{p}{p-1}\cdot\prod_{2}^{\infty}\frac{p^m}{p^m+p^{m-1}+\ldots+p+1}$$

Da nun das erstere Product

$$\Pi_1=S_1=\infty$$

ist, so muss das zweite der Null gleich sein, damit das Product beider eine endliche Zahl S_{m+1} ergiebt.

4.

Die harmonischen Reihen gerader Ordnung mit Zeichenfolge und jene ungerader mit Zeichenwechsel sind genau summirbar und zwar ist wie bekannt:

$$S_{2n}=\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}$$

und

$$U_{2n+1}=\frac{E_{2n}\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}$$

worin B_{2n-1} und E_{2n} die Bernoulli'schen, bzhw. Euler'schen Zahlen sind. Die Gleichstellung mit den gleichwertigen Factorenfolgen ergiebt:

$$\pi=\tfrac{1}{2}\sqrt[2n]{\frac{2(2n)!}{B_{2n-1}}}\prod_{p=2}^{\infty}\frac{p}{\sqrt[2n]{p^{2n}-1}} \qquad 7)$$

$$\pi=2\sqrt[2n+1]{\frac{2(2n)!}{E_{2n}}}\prod_{p=3}^{\infty}\frac{p}{\sqrt[2n+1]{p^{2n+1}+(-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}}} \qquad 8)$$

Digitized by Google

neue Ausdrücke für die Transcendente π, in welchen sie durch eine unendliche Folge von algebraischen Functionen der aufeinander folgenden Primzahlen dargestellt erscheint.

Bei unendlich wachsendem n nähern sich beide Factorenfolgen in Nr. 7) und 8) der Einheit, ebenso $\sqrt[2n]{2}$ und $\sqrt[2n+1]{2}$, folglich ist dann

$$\pi = \tfrac{1}{2} \lim \sqrt[2n]{\frac{(2n)!}{B_{2n-1}}} \qquad 9)$$

$$\pi = 2 \lim \sqrt[2n+1]{\frac{(2n)!}{E_{2n}}} \qquad 10)$$

und durch Gleichsetzung beider Grenzwerte ergiebt sich:

$$\lim E_{2n} = \lim 4^{2n+1} B_{2n-1} \qquad 11)$$

5.

Durch die in der Formel Nr. 2) zum Ausdruck gebrachte Entwicklung wird die Potenzirung und Radicirung der harmonischen Reihen ermöglicht; deren Coefficienten-Bildungsgesetz ein leicht erkennbares ist. Es ist nämlich

$$(S_n)^r = \prod_{p=2}^{\infty} \left(\frac{p^n}{p^n-1}\right)^r = \prod_2^{\infty} \left(1-\frac{1}{p^n}\right)^{-r} \qquad (n > 1)$$

$$= \prod_2^{\infty} \left[1 - \binom{-r}{1}\frac{1}{p^n} + \binom{-r}{2}\frac{1}{p^{2n}} - \ldots\right]$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \pm \frac{\binom{-r}{s}}{p^{ns}}\right) = \Sigma \pm \frac{\binom{-r}{\alpha}\binom{-r}{\beta}\binom{-r}{\gamma}\cdots}{(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)^n} \qquad 12)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma \ldots = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty)$$

Indem für $a, b, c \ldots$ alle möglichen Primzahlen und für die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ alle Werte von 0 bis ∞ gedacht werden, entsteht wieder eine Potenzreihe, da die n ten Potenzen der natürlichen Zahlen zu Nennern werden; die Zähler hangen von r und den Primzahlen-Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in der gegebenen Weise ab. Demgemäss kann auch geschrieben werden:

$$S_n{}^r = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\binom{-r}{\alpha}\binom{-r}{\beta}\binom{-r}{\gamma}\cdots}{z^n} \qquad 13)$$

Digitized by Google

wo α, β, γ . . . wieder die Exponenten der sämtlichen in z aufgehenden Primzahlen bedeuten.

Werden die Glieder mit demselben Zähler zu Gruppen vereinigt, so werden dieselben offenbar nur symmetrische Functionen der reciproken $n$ten Potenzen der Primzahlen derselben Ordnung umfassen, welche sich wie bekannt stets durch die Summe von Potenzen der Wurzeln ausdrücken lassen. Werden letztere

$$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{11^m}+\ldots=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^m}=\mathfrak{S}_m$$

gesetzt, so geht daraus hervor, dass jede Potenz einer harmonischen Reihe durch die Potenzreihen $\mathfrak{S}$ der sämtlichen Primzahlen ausdrückbar ist. Bezeichne $[\alpha, \beta, \gamma \ldots]$ die symmetrische Function $\Sigma \frac{1}{(p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots)^n}$, so ist

$$S_n^r = 1+c_1[1]+\{c_2[2]+c_2'[1, 1]\}+\{c_3[3]+c_3'[2, 1]$$
$$+c_3''[1, 1, 1]\}+\ldots$$

das 3te Glied besteht aus den sämtlichen symmetrischen Functionen der 3ten Ordnung und ist zunächst:

$$[1]=\mathfrak{S}_n,\quad [2]=\mathfrak{S}_{2n},\quad [1, 1]=\tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_n^2-\tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_{2n},$$
$$[2, 1]=[2][1]-[3],\quad [1, 1, 1]=\tfrac{1}{6}[1]^3-\tfrac{1}{2}[2][1]+\tfrac{1}{3}[3]$$

etc., ferner

$$c_1=r,\quad c_2=\binom{-r}{2},\quad c_2'=r^2,\quad c_3=-\binom{-r}{3}$$
$$c_3'=-\binom{-r}{1}\binom{-r}{2},\quad c_3''=+r^3$$

etc., somit:

$$S_n^r=1+r\mathfrak{S}_n+\binom{r+1}{2}\mathfrak{S}_{2n}+\frac{r^2}{2}(\mathfrak{S}_n^2-\mathfrak{S}_{2n})+\binom{r+2}{3}\mathfrak{S}_{3n}$$
$$+r\binom{r+1}{2}(\mathfrak{S}_{2n}\mathfrak{S}_n-\mathfrak{S}_{3n})+\frac{r^3}{6}{}_n^3(\mathfrak{S}-3\mathfrak{S}_{2n}\mathfrak{S}_n$$
$$+2\mathfrak{S}_{3n})+\ldots \qquad 13')$$

Unter den reellen und complexen Werten, welche r annehmen kann, ist vor Allem $r=-1$ erwähnenswert

$$\frac{1}{S_n}=\prod_{p=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)=\sum_{z=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}{z^n}$$

Digitized by Google

$$= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n}$$

$$- \frac{1}{12^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{14^n} + \frac{1}{15^n} + - \dots \qquad 14)$$

die Reihe ist eine einfache Potenzreihe, sämtliche Coefficienten sind $= 1$ und jedes Glied bekommt das positive oder negative Vorzeichen, jenachdem die Summe der Exponenten der im Nenner z aufgehenden Primzahlen gerade oder ungerade ist. Durch die Primzahlen-Reihen $\mathfrak{S}$ ausgedrückt, schreibt sich

$$\frac{1}{S_n} = 1 - [1] + \{[2] + [1, 1]\} - \{[3] + [2, 1] + [1, 1, 1]\} + - \dots$$

$$= 1 - \mathfrak{S}_n + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}_n^2 + \mathfrak{S}_{2n}) - \tfrac{1}{3}\mathfrak{S}_{3n} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_{2n}\mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n^3 \pm \dots \qquad 15)$$

Zahlentheoretisches Interesse bietet die Annahme $r = 2$.

Wie vom Verfasser in seinem Artikel „Ueber eine besondere Art von Reihen" (s. Archiv d. Math. u. Ph. 2. Reihe, T. VII. pag. 392. 1889) bewiesen wurde, entsteht eine Reihe $\sum\limits_{z=1}^{\infty} \frac{\lambda_z}{z^n}$, in welcher der Coefficient λ_z gleich der Anzahl der Teiler der Zahl z ist.

Die Coefficienten der höhern Potenzen von S_n hangen ebenfalls mit den Teilern zusammen, nur in einer verwickelteren Art.

Die Coefficienten von S_n^2 sind identisch mit denen der Lambertschen Reihe

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n, \quad x^2 < 1$$

dies lässt sich deutlich erkennen, wenn

$$S_n^2 = \frac{1}{1^n} S_n + \frac{1}{2^n} S_n + \frac{1}{3^n} S_n + \dots$$

gesetzt, und nach ausgeführter Multiplication gleiche Potenzen zusammen gezogen werden: es ist derselbe Vorgang der aus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n$ entstehen lässt.

Diese Identität ermöglicht die independente Darstellung der Coefficienten von

$$S_n^2 = \frac{\lambda_1}{1^n} + \frac{\lambda_2}{2^n} + \frac{\lambda_3}{3^n} + \dots$$

Digitized by Google

Die nämlichen Coefficienten müssen ja auch bei der Anwendung des Mac Laurin'schen Satzes auf $L(x)$ hervorgehen; es wird

$$\lambda_n = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n L(x)}{dx^n}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n!}\left\{\sum_m \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^m}{1^m - x^m}\right)\right\}_{x=0}$$

sein. Im allgemeinen ist der Differentialquotient einer Reihe nicht notwendig der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Glieder gleich; für den speciellen Wert $x = 0$ hat jedoch obiger Ansatz seine Richtigkeit.

Nun ist der $n$te Differentialquotient irgend eines Gliedes

$$\frac{x^m}{1-x^m} = x^m + x^{2m} + \ldots$$

gleich

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)\,x^{m-n} = n!\binom{m}{n}x^{m-n}$$

der Nullwert daher $= n!$ oder $= 0$, jenachdem n ein Vielfaches von m ist oder nicht.

Um dies durch eine Formel wiedergeben zu können, muss ein Discontinuitätsfactor gefunden werden, welcher gleich der Einheit wenn n ein Vielfaches von m ist, sonst aber verschwindet. Ein solcher Factor ist aber

$$\left(m \left| \frac{n+m-1}{m} \right|\right)^{n} = fm$$

wo das Symbol $\left|\frac{m+n-1}{m}\right|$ die grösste in dem Bruche $\frac{n+m-1}{m}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Denn es ist für ein $n = km$

$$fm = \left(m \left| \frac{n+km-1}{m} \right|\right)^{km} = \left| \begin{matrix} m\,k \\ m\,k \end{matrix}\right) = 1$$

hingegen für ein kleineres n, etwa $= mk - \mu$, $(\mu < m)$

$$fm = \left(m \left| \frac{m+mk-\mu-1}{m} \right|\right)^{mk-\mu} = 0$$

weil

$$\left| \frac{m+mk-\mu-1}{m} \right| = k$$

ist, da der grösste Wert den μ annehmen kann, $m-1$ und der

Digitized by Google

kleinste 0 ist, daher $m-\mu-1$ zwischen $m-1$ und 0 liegt, und der Binomialcoefficient fm in diesem Falle der Null gleich wird. Folglich gilt

$$\left\{D^{(n)}\left(\frac{x^m}{1-x^m}\right)\right\}_{x=0} = \left(m \,\middle|\, \frac{\overset{m}{m+n-1}}{m}\right) n!$$

somit auch

$$\lambda_n = \frac{1}{n!}\left\{D^{(n)} L(x)\right\}_{x=0} = \frac{1}{n!}\left\{\sum_{m-1}^{\infty} D^{(n)}\left(\frac{x^m}{1-x^m}\right)\right\}_{x=0}$$

$$= 1 + \left(2 \,\middle|\, \frac{\overset{n}{n+1}}{2}\right) + \left(3 \,\middle|\, \frac{\overset{n}{n+2}}{3}\right) + \left(4 \,\middle|\, \frac{\overset{n}{n+3}}{4}\right) + \ldots$$

$$+ \left(r \,\middle|\, \frac{\overset{n}{n+r-1}}{r}\right) + \ldots \qquad 16)$$

Damit erscheint auch die A u f g a b e gelöst:

„Die Anzahl λ_n der Teiler einer beliebigen Zahl n zu finden, „deren Zusammensetzung unbekannt ist."

6.

Bei der in der Einleitung gegebenen Entwicklung der harmonischen Reihen in unendliche Factorenfolgen wurde keine Voraussetzung über den Ordnungs-Exponenten n gemacht. In der Tat ist diese Umwandlung von der Natur des Exponenten n gänzlich unabhängig; deren Richtigkeit wird selbst dann, wenn $n = 1$ ist, wo eine d i v e r g e n t e R e i h e zum Vorschein kommt, nicht beeinflusst.

Die daher zulässige Annahme eines complexen $n = a + bi$ ergiebt:

$$S_n = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z^{a+bi}} = \Sigma\, z^{-a}[\cos(b \log z) - i \sin(b \log z)]$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1 - p^{-a}[\cos(b\log p) + i\sin(b\log p)]}$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1 - p^{-a}[\cos(b\log p) - i(\sin b\log p)]}{1 - 2p^{-a}\cos(b\log p) + p^{-2a}}$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \left[\frac{1 - p^{-a}\cos(b\log p)}{1 - 2p^{-a}\cos(b\log p) + p^{-2a}}\right.$$

$$\left. + i\,\frac{p^{-a}\sin(b\log p)}{p - 2p^{-a}\cos(b\log p) + p^{-2a}}\right]$$

Digitized by Google

Diese Gleichung zerfällt durch Gleichstellung der reellen bzhw. der imaginären Bestandteile in die folgenden zwei Gleichungen:

$$\sum_1^\infty z^{-a}\cos(b\log z) = \left\{\prod_{p=2}^\infty \frac{1-p^{-a}\cos(b\log p)}{1-2p^{-a}\cos(b\log p)+p^{-2a}}\right\}\times$$
$$.\ \{1-\Sigma C_2+\Sigma C_4-\Sigma C_6+\ldots\} \qquad 17)$$

$$\sum_1^\infty z^{-a}\sin(b\log z) = -\left\{\prod_{p=2}^\infty \frac{1-p^{-a}\cos(b\log p)}{1-2p^{-a}\cos(b\log p)+p^{-2a}}\right\}\times$$
$$.\ \{\Sigma C_1-\Sigma C_3+\Sigma C_5-\ldots\} \qquad 18)$$

Unter ΣC_n ist hierin die Summe der Combinationen zur $n$ten Classe ohne Wiederholung aus den Elementen

$$\frac{p^a\sin(b\log p)}{1-p^a\cos(b\log p)},\quad (p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\ \ldots)$$

zu verstehen.

Die Reihen

$$\sum_{z=1}^\infty z^{-a}\cos(b\log z) \quad \text{und} \quad \sum_{z=1}^\infty z^{-a}\sin(b\log z)$$

convergiren, wenn $a > 1$ ist.

7.

Die logarithmische Behandlung der Gleichungen 2) und 4) ergiebt sehr einfache Beziehungen zwischen den harmonischen Reihen S, U und den Reihen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{U}$ der Potenzen der reciproken Primzahlen; es ist nämlich:

$$\log S_n = -\log\prod_{p=2}^\infty\left(1-\frac{1}{p^n}\right) = -\sum_{p=2}^\infty\log\left(1-\frac{1}{p^n}\right)$$
$$= \sum_{p=2}^\infty\left[\frac{1}{p^n}+\frac{1}{2p^{2n}}+\frac{1}{3p^{3n}}+\ldots\right] = \frac{\mathfrak{S}_n}{1}+\frac{\mathfrak{S}_{2n}}{2}+\frac{\mathfrak{S}_{3n}}{3}+\ldots \qquad 19)$$

ebenso:

$$\log T_n = \frac{\mathfrak{S}_n'}{1}+\frac{\mathfrak{S}_{2n}'}{2}+\frac{\mathfrak{S}_{3n}'}{3}+\ldots\left(\mathfrak{S}_{rn}'=\mathfrak{S}_{rn}-\frac{1}{2^{rn}}\right) \qquad 19')$$

und

$$\log U_n = -\log\Pi\left(1+\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^n}\right) = -\sum_{e=5}^\infty\log\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$$
$$-\sum_{d=3}^\infty\log\left(1+\frac{1}{d^n}\right)$$

Digitized by Google

wenn d und e Primzahlen von der Form $4k+3$ bzhw. $4k+1$ vorstellen; nun ist

$$-\log\left(1-\frac{1}{e^n}\right)=\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2e^{2n}}+\frac{1}{3e^{3n}}+\dots$$

und

$$+\log\left(1+\frac{1}{d^n}\right)=\frac{1}{d^n}-\frac{1}{2d^{2n}}+\frac{1}{3d^{3n}}-\dots$$

daher

$$\begin{aligned}\log U_n &= \Sigma\left[\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2e^{2n}}+\frac{1}{3e^{3n}}+\dots-\frac{1}{d^n}+\frac{1}{2d^{2n}}-\frac{1}{3d^{3n}}+\dots\right]\\ &= \Sigma\left[\left(\frac{1}{e^n}-\frac{1}{d^n}\right)+\tfrac{1}{2}\frac{1}{p^{2n}}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{e^{3n}}-\frac{1}{d^{3n}}\right)+\tfrac{1}{4}\frac{1}{p^{4n}}+\dots\right]\end{aligned}$$

somit

$$\log U_n=\frac{\mathfrak{U}_n}{1}+\frac{\mathfrak{S}_{2n}'}{2}+\frac{\mathfrak{U}_{3n}}{3}+\frac{\mathfrak{S}_{4n}'}{4}+\dots \tag{20}$$

wenn

$$-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+-\dots+\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^n}\pm\dots=\mathfrak{U}_n$$

und

$$\mathfrak{S}_{2n}-\frac{1}{2_{2n}}=\mathfrak{S}_{2n}'$$

gesetzt wird.

Da $\mathfrak{S}_n'<S_n$, so convergiren die Potenzreihen der Primzahlen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{U}_n$, mit Ausnahme von

$$\mathfrak{S}_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}+\dots$$

welches divergirt.

Die Reihensummen $\mathfrak{S}_n$ mit geradem Ordnungszeiger sind von Euler bis zu $\mathfrak{S}_{36}=0\cdot{}^{10}14551$ auf 15 Decimalstellen genau berechnet worden, ohne hiefür jedoch eine Formel aufgestellt zu haben. Eine solche kann auf folgende Art gefunden werden.

Sei c_m eine Combination ohne Wiederholung der $m$ten Classe von Primzahlen (mit Ausschluss der Einheit), und wird aus der Gleichung 19)

$$\log S_n=\frac{\mathfrak{S}_n}{1}+\frac{\mathfrak{S}_{2n}}{2}+\frac{\mathfrak{S}_{3n}}{3}+\dots$$

ein System auf die Weise gebildet, dass für n nach und nach alle mit m multiplicirten Combinationen C_m gesetzt, sodann von $\log S_n$ jene mit $\frac{1}{c_{2m-1}}$ multiplicirten $\log S_{c_{2m-1}}$ subtrahirt, und die mit $\frac{1}{c_{2m}}$ $(m=1, 2, 3 \dots)$ multiplicirten $\log S_{c_{2m}}$ addirt werden, so heben

Digitized by Google

ſich alle $\mathfrak{S}$ bis auf $\mathfrak{S}_n$, welches dann dem log nat. einer unendlichen jedoch convergenten Factorenfolge gleich wird; denn es ist

$$
\begin{array}{lcl}
\log S_n & = & \frac{\mathfrak{S}_n}{1} + \frac{\mathfrak{S}_{2n}}{2} + \frac{\mathfrak{S}_{3n}}{3} + \frac{\mathfrak{S}_{4n}}{4} + \frac{\mathfrak{S}_{5n}}{5} + \frac{\mathfrak{S}_{6n}}{6} + \dots \\
-\frac{1}{2}\log S_{2n} & = & -\frac{\mathfrak{S}_{2n}}{2} \qquad - \frac{\mathfrak{S}_{4n}}{4} \qquad - \frac{\mathfrak{S}_{6n}}{6} - \dots \\
-\frac{1}{3}\log S_{3n} & = & -\frac{\mathfrak{S}_{3n}}{3} \qquad - \frac{\mathfrak{S}_{6n}}{6} - \dots \\
\dots & & \dots \\
+\frac{1}{2.3}\log S_{2,3.n} & = & + \frac{\mathfrak{S}_{6n}}{6} + \dots \\
\dots & & \dots
\end{array}
$$

$$\log \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{p=2} (S_{n c_m})^{\frac{(-1)^m}{c_m}} = \mathfrak{S}_n \tag{21}$$

und

$$\log \prod_{0} \prod (T_{n c_m})^{\frac{(-1)^m}{c_m}} = \mathfrak{S}_n - \frac{1}{2^n} = \mathfrak{S}_n' \tag{21'}$$

wo ſich das kleinere erste Productzeichen Π auf alle Combinationen einer und derſelben Claſſe ohne Wiederholung der ſämtlichen Primzahlen, das zweite auf die Combinationsclaſſe m bezieht, wobei $C_0 = 1$ zu ſetzen ist Daſs wirklich jedes einem $C_m < 1$ entſprechende $\mathfrak{S}_n c_m$ verſchwinden muſs, geht aus der Form jener Zahl hervor, welche anzeigt, wie oft $\mathfrak{S}_n c_m$ im obigen Syſteme erſcheint; dieſelbe ist aber gleich

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots = (1-1)^m = 0$$

für jedes m.

In der Gleichung Nr. 20, anwendbar für jedes $n > 1$, $n = 2r$ und

$$S_{2r c_m} = \frac{(2\pi)^{2r c_m} B_{2r c_m - 1}}{2(2r c_m)!}$$

geſetzt, ferner berückſichtigt, daſs die Anzahl der Combinationen ungerader Claſſenanzahl um 1 gröſser als jene von gerader ſind, alle Potenzen von 2π herausfallen; daſs weiters der Exponent der zuſammengezogenen Potenzen von 2 gleichkommt:

Digitized by Google

$$(2r-1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2r\,c_m-1}{c_{2m}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2r\,c_{2m-1}-1}{c_{2m-1}}$$

$$=-1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{c_{2m}}\right)=-(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{7})=0$$

nach der gleich Eingangs gemachten Bemerkung; dass endlich

$$\prod_{m=0}^{\infty}\Pi\left(\frac{1}{2r\,e_m}\right)^{\left(\frac{-1}{c_m}\right)^m}=(2r)^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{2.3}-\ldots+\frac{1}{2.3.5}+-\ldots}\times$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\ldots(2.3.5)^{\frac{1}{2.3.5}}}{(2.3)^{\frac{1}{2.3}}\,.\,(2.5)^{\frac{1}{2.5}}\,.\,(3.5)^{\frac{1}{3.5}}\ldots}$$

$$=(2r)^{-(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots}\,2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\ldots}\,3^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})\ldots}\,5^{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{7})\ldots}\ldots$$

ist, wo jeder der Exponenten verschwindet, nimmt $\mathfrak{S}_{2r}$ folgende Form an:

$$\mathfrak{S}_{2r}=\log\prod_{m=0}^{\infty}\Pi_{p=2}\left(\frac{B_{2r}\,c_m-1}{(2r\,e_m-1)!}\right)^{\frac{(-1)^m}{e_m}} \tag{22)}$$

Letztere Factorenreihe convergirt ungleich rascher als die Potenzreihe $\mathfrak{S}_{2r}$ und kann daher auch zu ihrer Berechnung mit Vorteil angewendet werden.

Sind jedoch die Summen $S_{2r\,c_m}$ gegeben, so wird die Verwendung der Formel Nr. 20) dieser vorgezogen werden müssen. Für $r=1$ ist:

$$\mathfrak{S}_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots$$

$$=\log\frac{S_2 S_{2(2\cdot3)}^{\frac{1}{2.3}}\,S_{2(2\cdot5)}^{\frac{1}{2.5}}\,.\,S_{2(3\cdot5)}^{\frac{1}{3.5}}\ldots}{S_{2\cdot2}^{\frac{1}{2}}\,S_{2\cdot3}^{\frac{1}{3}}\,S_{2\cdot5}^{\frac{1}{5}}\ldots\,S_{2(2\cdot3\cdot5)}^{\frac{1}{2.3.5}}\ldots}$$

Die Inanspruchnahme der einzelnen Factoren wird am zweckmässigsten in der Weise erfolgen können, dass die als Zeiger fungirenden Combinationen c_m für ein bestimmtes Gebiet von Primzahlen vollständig aufgestellt werden, wie es in letzterem Ausdrucke geschah, wobei Zähler und Nenner selbstverständlich gleich viel Factoren aufweisen müssen. Werden die Combinationen c_m nur für die Primzahlen 2, 3 und 5 gebildet, so wird, da

$$S_2=1{,}644\,9341\ldots,\qquad S_4=1{,}1082\,3232\ldots,$$

Digitized by Google

$$S_6 = 1{,}017\,3431\ldots, \qquad S_{10} = 1{,}000\,9945\ldots$$

$$S_{12} = 1{,}000\,2461\ldots, \qquad \log \frac{S_{2(2\cdot5)}^{\frac{1}{2.5}} \,.\, S_{2(3\cdot5)}^{\frac{1}{3.5}}}{S_{2(2\cdot3\cdot5)}^{\frac{1}{2.3.5}}} < 0\cdot{}^{6}1$$

$$\mathfrak{S}_2 = 1.45225 \quad (f < 0\cdot{}^{5}5)$$

direct berechnet wären 66 Reihenglieder erforderlich gewesen.

Die Primzahlenreihen $\mathfrak{U}$ lassen sich in ganz ähnlicher Weise wie die $\mathfrak{S}$ durch die Summen T und U darstellen.

Aus Nr. 20) folgt unmittelbar die Relation:

$$\log \frac{U_n}{\sqrt{T_{2n}}} = \frac{\mathfrak{U}_n}{1} + \frac{\mathfrak{U}_{3n}}{3} + \frac{\mathfrak{U}_{5n}}{5} + \ldots \tag{23}$$

mittelst welcher wieder ein ähnliches Gleichungs-System aufgebaut werden kann, wie jenes, welches zu den Gleichungen Nr. 21) und Nr. 21′) führte, nur dürfen für n nur Combinationen c_m' der ungeraden Primzahlen und ebensolche Coefficienten $\frac{1}{c_m'}$ eingeführt werden. Es ist:

$$\mathfrak{U}_n = \log \prod_{m=0} \prod_{p=3} \left[\frac{U_n c_m'}{\sqrt{T_{2n} c_m'}}\right]^{\frac{(-1)^m}{c_m'}} \tag{24}$$

Bei ungeradem n sind die U_n summirbar:

$$U_{2r+1} = \frac{E_{2r}\,\pi^{2r+1}}{2^{2r+2}(2r)!}$$

sämtliche Potenzen von π fallen aus, und ist dann:

$$\mathfrak{U}_n = \log \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{p=3} \left\{\frac{1}{\sqrt{2^{2nc_m}-1}} \,.\, \frac{\sqrt{(2nc_m-1)!}}{(nc_m-1)!} \,.\, \frac{E_n c_m' - 1)}{\sqrt{B_{2nc_m'-1}}}\right\} \tag{25}$$

$$(n = 2r+1).$$

8.

Wenn in $\log S_n$ ein complexes

$$n = a + bi$$

vorausgesetzt wird, so ist, weil dann

Digitized by Google

$$S_n = \sum_1^\infty z^{-a}[\cos(b\log z) - i\sin(b\log z)]$$
$$= \prod_{p=2}^\infty \left[\frac{1-p^{-a}\cos(b\log p)}{1-2p^{-a}\cos(b\log p)+p^{-2a}} + i\,\frac{p^{-a}\sin(b\log p)}{1-2p^{-a}\cos(b\log p)+p^{-2a}}\right]$$

ist, mit Benutzung der bekannten Formel

$$\log(x \pm iy) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) \pm i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

nach Gleichsetzung der reellen bzhw. der imaginären Bestandteile:

$$\tfrac{1}{2}\log\left\{\left[\sum_{z=1}^\infty \frac{\cos(b\log z)}{z^a}\right]^2 + \left[\sum_{z=1}^\infty \frac{\sin(b\log z)}{z^a}\right]^2\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_{p=2}^\infty \log\left\{\left(\frac{1-p^{-a}\cos(b\log p)}{1-2p^{-a}\cos(b\log p)+p^{-2a}}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{p^{-a}\sin(b\log p)}{1-2p^{-a}\cos(b\log p)+p^{-2a}}\right)^2\right\}$$

oder

$$\left[\sum_{z=1}^\infty \frac{\cos(b\log z)}{z^a}\right]^2 + \left[\sum_{z=1}^\infty \frac{\sin(b\log z)}{z^a}\right]^2$$
$$= \prod_{p=2} \frac{p^{2a}}{1-2p^a\cos(b\log p)+p^{2a}} \qquad 26)$$

und

$$\mathrm{arctg}\left\{\frac{\sum\limits_{z=1}^\infty \frac{\sin(b\log z)}{z^a}}{\sum\limits_{z=1}^\infty \frac{\cos(b\log z)}{z^a}}\right\} = -\sum_{p=2}^\infty \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(b\log p)}{p^a - \cos(b\log p)}\right) \qquad 27)$$

Die Convergenz der Reihen $\Sigma\frac{1}{z^{a+bi}}$ und $\Sigma\frac{1}{p^{a+bi}}$ lässt sich aus der Reihe der Moduli der Terme beurteilen; die Moduli der aufeinander folgenden Glieder bilden eine convergente Reihe, wenn $a > 1$ ist. Den Formeln Nr. 26) und Nr. 27) ist daher als Bedingung $a > 1$ hinzuzufügen.

Werden aus den Primzahlen alle jene Combinationen $q = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, bei welchen die Exponenten α, β, γ ... der Primzahlen a, b, c ausser der Einheit keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, gebildet, und jede derselben zu allen möglichen Potenzen (mit von null verschiedenen ganzen Exponenten) erhoben, so werden **alle** ganzen Zahlen und jede nur einmal hervorgehen. Wenn nun die Gieder der Reihen

Digitized by Google

$$\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\cos(b \log z)}{z^a} \quad \text{und} \quad \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\sin(b \log z)}{z^a}$$

so geordnet werden, dass alle ein und dasselbe q enthaltende Glieder eine Gruppe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b \log q^n)}{q^{an}} \quad \text{bzhw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b \log q^n)}{q^{an}}$$

bilden, so kann jede derselben mit Benutzung der Formeln

$$r \cos\varphi + r^2 \cos 2\varphi + \ldots = \frac{r\cos\varphi - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$$

und

$$r \sin\varphi + r^2 \sin 2\varphi + \ldots = \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$$

summirt werden.

Es ergiebt sich:

$$\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\cos(b\log z)}{z^a} = \sum_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b\log q^n)}{q^{an}} = \sum_q \sum \frac{\cos(nb\log q)}{(q^a)^n}$$

$$= \sum_q \frac{q^a \cos(b\log q) - 1)}{q^{2a} - 2q^a \cos(b\log q) + 1}$$

und

$$\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\sin(b\log z)}{z^a} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b\log q^n)}{q^{an}} = \sum_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nb\log q)}{(q^a)^n}$$

$$= \sum_q \frac{q^a \sin(b\log q)}{q^{2a} - 2q^a\cos(b\log q) + 1}$$

Diese Ergebnisse in die Formeln Nr. 26) und Nr. 27) eingesetzt, führen zu den Beziehungen:

$$\left[\sum_q \frac{q^a\cos(b\log q) - 1}{q^{2a} - 2q^a\cos(b\log q) + 1}\right]^2 + \left[\sum_q \frac{q^a\sin(b\log q)}{q^{2a} - 2q^a\cos(b\log q) + 1}\right]^2$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \frac{p^{2a}}{p^{2a} - 2p^a\cos(b\log p) + 1} \qquad 28)$$

$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sum \frac{q^a\sin(b\log q)}{q^{2a} - 2q^a\cos(b\log q) + 1}}{\sum \frac{q^a\cos(b\log q)}{q^{2a} - 2q^a\cos(b\log q) + 1}}\right\}$$

$$= -\sum_{p=2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(b\log p)}{p^a - \cos(b\log p)}\right) \quad (a < 1) \qquad (29)$$

Aus $\log U_n$ werden unter Voraussetzung eines complexen n in ähnlicher Weise folgende Relationen abgeleitet:

Digitized by Google

$$\left[\sum_{1.3.5}^{\infty}(-1)^{\frac{z+1}{2}}\frac{\cos(b\log z)}{z^a}\right]^2+\left[\sum_{1.3.5}^{\infty}(-1)^{\frac{z+1}{2}}\frac{\sin(b\log z)}{z^a}\right]^2$$

$$=\prod_{p=3}^{\infty}\frac{p^{2a}}{1+(-1)^{\frac{p+1}{2}}2p^a\cos(b\log p)+p^{2a}} \qquad 30)$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sum_{1.3.5}(-1)^{\frac{z+1}{2}}\frac{\sin(b\log z)}{z^a}}{\sum_{1.3.5}(-1)^{\frac{z+2}{2}}\frac{\cos(b\log z)}{z^a}}\right\}$$

$$=\sum_{p=3}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}\sin(b\log p)}{p^a+(-1)^{\frac{p+1}{2}}\cos(b\log p)}\right) \quad a>1 \qquad 31)$$

$$\Sigma(-1)^{\frac{z+1}{2}}\frac{\cos(b\log z)}{z^a}=\sum_q(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q^a\cos(b\log q)+1}{q^{2a}+2q^a\cos(b\log p)+1}$$

$$\Sigma(-1)^{\frac{z+1}{2}}\frac{\sin(b\log z)}{z^a}=\sum_q(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q^a\sin(b\log q)}{q^{2a}+2q^a\cos(b\log q)+1}$$

$$\left[\Sigma(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q^a\cos(b\log q)+1}{q^{2a}+2q^a\cos(b\log q)+1}\right]^2$$

$$+\left[\Sigma(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q^a\sin(b\log q)}{q^{2a}+2q^a\cos(b\log q)+1}\right]^2$$

$$=\prod_{p=3}\frac{p^{2a}}{p^{2a}+(-1)^{\frac{p+1}{2}}2p^a\cos(b\log p)+1} \qquad 32)$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\Sigma(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q^a\sin(b\log q)}{q^{2a}+2q^a\cos(b\log q)+1}}{\Sigma(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q^a\cos(b\log q)+1}{q^{2a}+2q^a\cos(b\log q)+1}}\right\}$$

Digitized by Google

$$-\sum_{p=3}\text{arc tg}\left(\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}\sin(b\log p)}{p^a+(-1)^{\frac{p+1}{2}}\cos(b\log p)}\right) \qquad 33)$$

Sämtliche hier vorkommende Zahlen sind ungerade.

9.

Die Ausdrücke für $\log S_n$ und $\log U_n$ (Nr. 19) und Nr. 20)) ermöglichen die Entwicklung von S_n^r und U_n^r durch die Primzahlenreihen $\mathfrak{S}$ bzhw. $\mathfrak{U}$ in einer sehr übersichtlichen Weise. Aus Nr. 19) entsteht

$$S_n^r = e^{r\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{S}_{mn}}{m}\right)} = 1+\frac{r}{1!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{S}_{mn}}{m}+\frac{r^2}{2!}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{S}_{mn}}{m}\right)^2+\dots \qquad 34)$$

und aus Nr. 20):

$$U_n^r = e^{r\Sigma\left(\frac{\mathfrak{S}_{2\mu n}'}{2\mu}+\frac{\mathfrak{U}_{(2\mu-1)n}}{2\mu-1}\right)}$$

oder

$$U_n^r = \sqrt{T_{2n}}\left[1+\frac{r}{1!}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{U}_{(2\mu-1)n}}{2\mu-1}+\frac{r^2}{2!}\left(\Sigma\frac{\mathfrak{U}_{(2\mu-1)n}}{2\mu-1}\right)^2+\dots\right] \qquad 35)$$

Die Formel Nr. 34) hätte sich übrigens auch, jedoch minder einfach aus Nr. 13') durch Ordnung der Glieder nach den aufsteigenden Potenzen von r ergeben.

10.

Die harmonischen Reihen sind nicht die einzigen, die sich in Producte umgestalten lassen. Diese Eigentümlichkeit besitzen alle Reihen $\sum\limits_{z=1}^{\infty}\psi(z)$, wenn $\psi(z)$ der Bedingung

$$\psi(x)\,\psi(y) = \psi(xy) \qquad 86)$$

unter x, y ganze Zahlen verstanden, genügt.

Die einfachste Function dieser Art ist die Potenz z^n; aus ihr geben die harmonischen Reihen hervor.

Andre Functionen sind:

Die Anzahl $\varphi(z)$ der zu z relativen Primzahlen $< z$,

Digitized by Google

die Anzahl der Teiler von z,

die Summe der Teiler,

das Product der Exponenten der in einer Zahl aufgehenden Primzahlen u. s. w.

Ist $\psi(z)$ eine derartige Function, so erfüllt auch $[\psi(z)]^{\pm n}$, sowie auch jede Combination mit oder ohne Wiederholung von Functionen $\psi(z)$ und $\frac{1}{\psi(z)}$ die obige Bedingung.

Alle die eingangs gemachten Schlüsse gelten nun auch für die Reihe $\sum\limits_{z=1}^{\infty}\psi(z)$, d. h. es wird

$$\sum_{z=1}^{\infty}\psi(z) = \Sigma\psi(a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots) = \prod_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi(p^n)\right) \qquad 37)$$

gesetzt werden können.

Mittelst dieser Umgestaltung und einer nachfolgenden logarithmischen Behandlung gelingt es meist genannte Reihen, deren Glieder unstetiger Natur sind in andre umzuformen, die in übersichtlicher Weise aus den Potenzreihen der reciproken Primzahlen gebildet sind, und deren Terme sich independent bestimmen lassen.

Bemerkenswerte Beispiele von Reihen dieser Art sind folgende.

a. $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$, d. i. die reciproke Anzahl der zu z relativen Primzahlen $< z$ mit Einschluss der Einheit.

$$\sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(z)} = \prod_{p=2}^{\infty}\left[1+\frac{1}{\varphi(p)}+\frac{1}{\varphi(p^2)}+\ldots\right]$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty}\left[1+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p(p-1)}+\frac{1}{p^2(p-1)}+\ldots\right]$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty}\left[1+\frac{p}{(p-1)^2}\right]$$

$$\log\sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{p=2}^{\infty}\log\left[1+\frac{p}{(p-1)^2}\right]$$

$$= \sum_{p=2}^{\infty}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^2-\frac{1}{2p^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^4+-\ldots\right]$$

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^{2m} = \frac{1}{p^m}+\binom{2m}{1}\frac{1}{p^{m+1}}+\binom{2m+1}{2}\frac{1}{p^{m+2}}$$

$$+\binom{2m+3}{3}\frac{1}{p^{m+3}}+\ldots$$

Digitized by Google

$m = 1, 2, 3 \ldots$ gesetzt, die erhaltenen Reihen addirt und nach den Potenzen von p geordnet giebt:

$$\log \sum_1^\infty \frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{p=2}^\infty \left[\frac{1}{p} + \left(\binom{2}{1} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{p^2}\right.$$
$$\left. + \left(\binom{3}{2} - \frac{1}{2}\binom{4}{1} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{p^3} + \ldots\right] = \sum_{n=1}^\infty k_n \mathfrak{S}_n$$
$$k_n = \binom{n}{n-1} - \frac{1}{2}\binom{n+1}{n-2} + \frac{1}{3}\binom{n+2}{n-3} - + \ldots$$

daher

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\varphi(z)} = e^{\sum_1^\infty k_n \mathfrak{S}_n} \qquad 38)$$

b. $\sum_1^\infty \psi(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{z\vartheta(z)}$, unter $\vartheta(z)$ die Summe der Teiler von z verstanden.

Die grössten Werte besitzen hier die den Primzahlen entsprechenden Glieder, also

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{13.14} + \ldots < \mathfrak{S}_2$$

daher ist obige Reihe $< S_2$ somit convergent.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{z\vartheta(z)} = \prod_{p=2}^\infty \left[1 + \frac{p-1}{p(p^2-1)} + \frac{p-1}{p^2(p^3-1)} + \frac{p-1}{p^3(p^4-1)} + \ldots\right]$$
$$= \prod_{p=2}^\infty p\left[\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^3-1} + \frac{1}{p^4-1} + \ldots\right]$$
$$= \prod_{p=2}^\infty p\left[L\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p-1}\right]$$

unter $L\left(\frac{1}{p}\right)$ die Lambert'sche Reihe verstanden.

Da $\sum_1^\infty \frac{1}{z\vartheta(z)}$ einen endlichen, $\prod_{p=2}^\infty p$ einen unendlich grossen Wert hat, muss notwendig

$$\prod_{p=2}^\infty \left[L\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p-1}\right] = 0 \text{ sein.}$$

c. Die Reihe der reciproken Producte aus den $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen in das Product der Exponenten E_n der in denselben enthaltenen Primzahlen ist eine convergente Reihe, wenn $n > 1$ ist.

Digitized by Google

$$\sum_1 \frac{1}{E_z z^n} = \sum \frac{1}{\alpha\beta\gamma \ldots (a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)^n}$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1p^n} + \frac{1}{2p^{2n}} + \frac{1}{3p^{3n}} + \ldots\right)$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \log\left(1 - \frac{1}{p^n}\right)\right)$$

$$\log\left\{\sum_1^{\infty} \frac{1}{E_z z^n}\right\} = \sum_{p=2}^{\infty} \log\left[1 - \log\left(1 - \frac{1}{p^n}\right)\right]$$

Die Function unter dem Summenzeichen nach dem **Mac-Laurin'schen** Satz entwickelt, ergiebt sofort eine brauchbare Reihe. Zur Ermittlung der Nullwerte der höheren Differentialquotienten dieser Function eignet sich besonders der fruchtbare Hoppe'sche Satz über die independente Darstellung höherer Differentialquotienten, weil seine Anwendung die verlangten Reihen-Coefficienten in einer Form hervorgehen lässt, welche ihr Bildungsgesetz zu erkennen giebt.

Bedeutet C_r^n den $r$ten Facultäten-Coefficienten zum Exponenten n gehörig, so ist nach leichter Rechnung:

$$\log\left\{\sum_1^{\infty} \frac{1}{E_z z^n}\right\} = \frac{C_0^1}{1!}\mathfrak{S}_n + \frac{1}{2!}(C_1^2 - C_0^2)\mathfrak{S}_{2n} + \frac{1}{3!}(C_2^3 - C_1^3 + 2!\,C_0^3)\mathfrak{S}_{3n}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{r!}(C_{r-1}^r - C_{r-2}^r + 2!\,C_{r-3}^r - 3!\,C_{r-4}^r +$$

$$+ - \ldots + (-1)^{r-1}(r-1)!\,C_0^r)\mathfrak{S}_{rn} + \ldots$$

d. Die Reihe, deren $z$tes Glied die Einheit geteilt durch das Product der $n$ten Potenz von z in das Product $\mathfrak{p}(z)$ der Factoriellen $\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots$ der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der in $z = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ aufgehenden Primzahlen $a, b, c \ldots$ convergent für $n > 1$, ist:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{p}(z) z^n} = \prod_{p=2} \left(1 + \frac{1}{1!\,p^n} + \frac{1}{2!\,p^{2n}} + \ldots\right) = \prod_{p=2} e^{\frac{1}{p^n}} = e^{\mathfrak{S}_n}$$

daher

$$\mathfrak{S}_n = \log\left\{{}_z\sum_1^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{p}(z) z^n}\right\} = \log\left\{\sum \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots a^{\alpha n} b^{\beta n} c^{\gamma n} \ldots}\right\} \qquad 39)$$

und

$$\mathfrak{U}_n = \log\left\{\sum \frac{(-1)^{\frac{z-1}{2}}}{\mathfrak{p}(z) z^n}\right\} \qquad 40)$$

Unter Voraussetzung eines complexen $n = a + bi$, $a > 1$, ist

$$\Sigma \frac{\cos(b \log z)}{\mathfrak{p}(z) z^a} = e^{\Sigma \frac{\cos(b \log p)}{p^a}} + \cos\left[\Sigma \frac{\sin(b \log p)}{p^a}\right]$$

$$\Sigma \frac{\sin(b \log z)}{\mathfrak{p}(z) z^a} = \sin\left[\Sigma \frac{\sin(b \log p)}{p^a}\right]$$

ferner

$$\left[\Sigma \frac{\cos(b \log z)}{\mathfrak{p}(z) z^a}\right]^2 + \left[\Sigma \frac{\sin(b \log z)}{\mathfrak{p}(z) z^a}\right]^2 = \Sigma \frac{\cos(b \log p)}{p^a}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\Sigma \frac{\sin(b \log z)}{\mathfrak{p}(z) z^a}}{\Sigma \frac{\cos(b \log z)}{\mathfrak{p}(z) z^a}} = \Sigma \frac{\sin(b \log p)}{p^a}$$

Wenn $a > 1$ ist, so sind sämtliche hier vorkommende Reihen convergent.

Digitized by Google

XVI.

Die vierte Rechenstufe.

Auszug aus der Programmarbeit des Friedrichs-Gymnasiums zu Berlin, Ostern 1890.

Von

Emil Schulze.

Am Schluss der Einleitung meines Aufsatzes „die vierte Rechenstufe“, welchen ich in Teil III. der 2. Reihe dieser Zeitschrift veröffentlicht habe, sprach ich die Absicht aus, eine Fortsetzung folgen zu lassen. Lange Zeit habe ich mein Vorhaben unausgeführt gelassen, weil ich zu der Ueberzeugung gelangt bin, dass die Einführung der 3., 4„ 5., . . . n Rechenstufe überflüssig ist. Die Beachtung jedoch, welche mein Aufsatz von verschiedenen Seiten gefunden hat (z. B. Fortschritte der Math. Jahrgang 1886) und den Beweis liefert, dass die Mathematiker der 4. Rechenstufe Interesse entgegen bringen, haben mich veranlasst, die Frage, ob die Einführung der 4. Rechenstufe notwendig ist oder nicht, noch einmal in der oben genannten Programmarbeit zu behandeln. Weil dieselbe als Fortsetzung meines ersten Aufsatzes aufgefasst werden kann, sei es mir gestattet, einen kurzen Auszug daraus an dieser Stelle zu liefern.

Weierstrass hat zuerst den Gedanken ausgesprochen, dass es sich bis jetzt nicht als notwendig herausgestellt hat, ausser Addition und Multiplication nebst ihren Umkehrungen noch andere Grundoperationen anzunehmen (vgl. Kossack, d. Elem. d. Arith. S. 29). Zunächst mag festgestellt werden, was man unter einer Grundoperation zu verstehen hat: „Eine Operation soll in dem Falle eine Grundoperation genannt werden, wenn sie durch neue Zahlengebilde

Digitized by Google

ihre Einführung erhalten, welchen mit Hülfe der bereits bekannten Grundoperationen keine Bedeutung beigelegt werden kann." Hiernach sind Addition, Subtraction und Division Grundoperationen, weil durch sie die positiven, die negativen und die gebrochenen Zahlen ihre Einführung erhalten. Was die Multiplication betrifft, so würde sie, wenn man nur mit ganzen Zahlen rechnete, nicht als Grundoperation anzusehen sein; als Addition lässt sie sich jedoch für die negativen und gebrochenen Zahlen nicht mehr erklären, deshalb ist sie wirklich eine neue, von der Addition verschiedene Grundoporation.

Daraus, dass die wiederholte Addition derselben Zahl zu einer Grundoperation, der Multiplication hinüber geleitet hat, den Schluss ziehen zu wollen, dass nun allemal die wiederholte Anwendung einer Grundoperation zu einer neuen Grundoperation führen muss, dazu liegt durchaus keine Nötigung vor. Schon eine eingehendere Untersuchung der Operation der 3. Rechenstufe lässt das Verkehrte dieses Schlusses erkennen. Das Potenziren und dessen Umkehrungen haben zwar lange Zeit als Grundoperationen gegolten, weil sie zur Erfindung der irrationalen und imaginären Zahlen die Veranlassung gegeben haben. Die neuern Untersuchungen haben jedoch zu dem Ergebniss geführt, dass diese Art der Einführung jener Zahlen weder eine notwendige noch eine erschöpfende ist, und deshalb sind Potenziren und seine Umkehrungen keine Grundoperationen (vergl. Thomae, Theor. der an. Funkt. S. 6).

Ebenso wenig haben die Operationen der nächst höheren Rechenstufen Anspruch darauf, Grundoperationen zu sein. Dadurch verliert ihre Untersuchung wesentlich an Bedeutung, zumal da keins der 3 Grundgesesetze, das Assotiations-, das Commutations- und das Distributionsgesetz in Bezug auf sie Gültigkeit hat.

Immerhin dürfte wenigstens die Function der 4. Stufe

$$Z = z^{(z^{(z^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(z}}}}})}$$

interessant genug sein, dass ihre Untersuchung sich lohnt. Bis jetzt haben sich meines Wissens nur Gerlach (Zeitschr. f. math. u. nat. Unt. 13. J. 4. H.) und Paugger (T. 35. dieser Zeischrift), auch sie nur oberflächlich, mit ihr beschäftigt. Ersterer, dessen Bezeichnungsweise ich mich angeschlossen habe, setzt:

Digitized by Google

$$z^{(z} = {}^{2}z \qquad z^{(z^{(z}} = {}^{3}z \qquad z^{(z^{(z^{\cdot^{\cdot^{\cdot(z}}}}} \quad (g \text{ mal gesetzt}) = {}^{g}z$$

Ist ${}^{g}z = Z$, so bezeichnet er die Umkehrung durch $z = \overline{Z}\overset{g}{\surd}$.

Die Function $Z = {}^{g}z$. Der Definition gemäss ist g eine ganze positive Zahl, während z als complex vorausgesetzt werden darf. Die einzige Formel, welche existirt, ist

$${}^{g}z = z^{({}^{g-1}z}$$

Eingehender wird nur der Fall behandelt, wo reelle positive Werte der Variablen zugelassen werden. Zunächst lässt sich die Richtigkeit folgender Ungleichungen mühelos beweisen:

$$\left.\begin{array}{l} {}^{1}z < {}^{2}z < {}^{3}z < \ldots < {}^{g}z < \ldots \\ {}^{1}z < {}^{3}z < {}^{5}z < \ldots < {}^{2\gamma+1}z < \ldots < {}^{2\gamma}z < \ldots < {}^{4}z < {}^{2}z < 1 \end{array}\right\} \text{ für } \begin{array}{l} z > 1 \\ z < 1 \end{array} \qquad (1)$$

Die Curve $Z = {}^{g}z$ beginnt für $z = 0$ entweder im Punkte 1 oder im Punkte 0, je nachdem g gerade oder ungerade ist, denn es ist

$$\lim_{z=0} {}^{2\gamma}z = 1, \qquad \lim_{z=0} {}^{2\gamma+1}z = 0$$

sie muss daher, weil für $z = 1$ auch $Z = 1$ ist, bei geradem g ein Minimum besitzen. Es wird gezeigt, dass dieses Minimum, wie gross auch g sei, nicht unter die Grösse $\frac{1}{e}$ sinken kann; sind $z_2, z_4, \ldots z_{2\gamma}$ die Werte von z, die den Minimis entsprechen, so finden die Ungleichungen statt:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \text{Min } {}^{2}z > \text{Min } {}^{4}z > \ldots > \text{Min } {}^{2\gamma}z > \ldots > \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e} = z_2 > z_4 > \ldots > z_{2\gamma} > \ldots > \left(\frac{1}{e}\right)^{e} \end{array} \qquad (2)$$

Die Function ${}^{g}z$ lässt sich in eine nach Potenzen von $\omega = \log z$ fortschreitende für jeden endlichen Wert von z absolut convergente Reihe entwickeln, und zwar haben die ersten $g + 1$ Coefficienten der Reihe

Digitized by Google

$${}^{g}z = a_{g.0} + a_{g,1}\omega + a_{g,2}\omega^2 + \ldots a_{g,f}\omega^f + \ldots a_{g,g}\omega^g + a_{g,g+1}\omega^{g+1} + \ldots$$

sehr einfache von g unabhängige Werte, nämlich

$$a_{g,f} = \frac{(f+1)^{f-1}}{f!}$$

während die Coefficienten $a_{g,g+2}$, $a_{g.g+2}$, ... von g abhängig sind. Die Coefficienten einiger Reihen habe ich berechnet und gefunden:

$$\begin{aligned}
{}^{1}z &= 1+\omega+0{,}5\omega^2+0{,}167\omega^3+0{,}042\omega^4+0{,}008\omega^5+0{,}001\omega^6+\ldots\\
{}^{2}z &= 1+\omega+1{,}5\omega^2+1{,}667\omega^3+1{,}708\omega^4+1{,}633\omega^5+1{,}468\omega^6+\ldots\\
{}^{3}z &= 1+\omega+1{,}5\omega^2+2{,}667\omega^3+4{,}208\omega^4+6{,}3\ \ \omega^5+9{,}177\omega^6+\ldots\\
{}^{4}z &= 1+\omega+1{,}5\omega^2+2{,}667\omega^3+5{,}208\omega^4+9{,}4\ \ \omega^5+17{,}843\omega^6+\ldots\\
{}^{5}z &= 1+\omega+1{,}5\omega^2+2{,}667\omega^3+5{,}208\omega^4+10{,}4\ \ \omega^5+22{,}343\omega^6+\ldots\\
{}^{6}z &= 1+\omega+1{,}5\omega^2+2{,}667\omega^3+5{,}208\omega^4+10{,}4\ \ \omega^5+23{,}343\omega^6+\ldots
\end{aligned}$$

Wählt man beispielsweise $\omega = \pm 0{,}1$, so ist hiernach (auf 7 Decm.-stellen)

$$\begin{array}{ll}
{}^{1}z = 1{,}105\,1710 & {}^{1}z = 0{,}904\,8374 \\
{}^{2}z = 1{,}116\,8554 & {}^{3}z = 0{,}912\,6992 \\
{}^{3}z = 1{,}118\,1612 & {}^{5}z = 0{,}912\,7686 \\
{}^{4}z = 1{,}118\,3031 & {}^{7}z = 0{,}912\,7692 \\
{}^{5}z = 1{,}118\,3194 & {}^{8}z = 0{,}912\,7692 \\
{}^{6}z = 1{,}118\,3212 & {}^{6}z = 0{,}912\,7693 \\
{}^{7}z = 1{,}118\,3214 & {}^{4}z = 0{,}912\,7753 \\
{}^{8}z = 1{,}118\,3214 & {}^{2}z = 0{,}913\,4892
\end{array} \qquad (3)$$

Die Function ${}^{\infty}z = \lim_{g=\infty} {}^{g}z$ Eisenstein, welcher sich in einem kleinen Aufsatz (Crelle Bd. 28.) mit der unendlich langen Kette

$${}^{\infty}z = z^{\left(z^{\left(z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)}\right)}$$

beschäftigt hat, setzt

$$z^{\left[z^{\left(z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)}\right]} = y$$

und nimmt, ohne einen Beweis für nötig zu halten, an, dass für $1 > z > 0$ $z^y = y$ ist, so dass, wenn $f(z) = y$ die Umkehrung der

Digitized by Google

Function $z = y^{\frac{1}{y}}$ bedeutet, die Functionen ${}^{\infty}z = y$ und $f(z) = y$ im Intervall $1 > z > 0$ als identisch hingestellt werden. Ein Blick jedoch auf die Gleichungen (3) legt die Vermutung nahe, dass g_z auch für Werte von z, die grösser als 1 sind, für wachsende g einer Grenze zustreben werde, während andererseits für kleine Werte von z ${}^{2\gamma+1}z$ wenig von null verschieden ist, ${}^{2\gamma}z$ dagegen den Ungleichungen (2) gemäss nicht unter die Grösse $\frac{1}{e}$ sinken kann, wie gross auch γ sei, so dass für kleine Werte von z die Function ${}^{g}z$ bei wachsendem g sich keiner bestimmten Grenze nähert. Die Behauptung Eisenstein's muss in der Tat dahin berichtigt werden, dass die Identität der Functionen ${}^{\infty}z = y$ und $f(z) = y$ nicht im Intervall $1 > z > 0$, sondern im Intervall $e^{\frac{1}{e}} \geqq z \geqq \left(\frac{1}{e}\right)^e$ statt hat. Um die Richtigkeit dieses Satzes zu beweisen, werden die Ungleichungen

$$y > {}^{g}z > y^{\alpha_g} \qquad \text{für} \quad e^{\frac{1}{e}} \geqq z \geqq 1$$

$$\left.\begin{aligned} y &< {}^{2\gamma}z < y^{\beta_{2\gamma}} \\ y &> {}^{2\gamma+1}z > y^{\beta_{2\gamma+1}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{für} \quad \left(\frac{1}{e}\right)^e \leqq z \leqq 1$$

abgeleitet und gezeigt, dass

$$\lim_{g=\infty} \alpha_g = 1, \qquad \lim_{g=\infty} \beta_g = 1$$

ist. Von der Reihe

$$ {}^{g}z = 1 + \frac{2^0}{1!}\omega + \frac{3^1}{2!}\omega^2 + \frac{4^2}{3!}\omega^3 + \ldots \frac{(g+1)^{g-1}}{g!}\omega^g + a_{g,g+1}\,\omega^{g+1} + \\ + \ldots a_{g,k}\,\omega^k + \ldots $$

ist bewiesen, dass sie für jeden endlichen Wert von z und g absolut convergirt. Jetzt wird gezeigt, dass die Reihenentwickelung unter der Convergenzbedingung

$$e^{\frac{1}{e}} \geqq z \geqq e^{-\frac{1}{e}}$$

auch für über alle Grenzen wachsende Werte von g Gültigkeit behält, d. h. dass

$${}^{\infty}z = 1 + \frac{2^0}{1!}\omega + \frac{3^1}{2!}\omega^2 + \ldots \frac{(g+1)^{g-1}}{g!}\omega^g + \ldots \frac{(k+1)^{k-1}}{k!}\omega^k + \ldots$$

Die Function $z = \overline{Z}\overset{g}{\sqrt{}}$. Setzt man $W = \log Z$, so wird nachgewiesen, dass die Reihen

$$\overline{Z}\overset{g}{\sqrt{}} = A_{g,0} + A_{g,1}W + A_{g,2}W^2 + \ldots A_{g,g}W^g + \ldots A_{g,k}W^k + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{h}{\sqrt{}} = A_{h,0} + A_{h,1}W + A_{h,2}W^2 + \ldots A_{h,g}W^g + \ldots A_{h,k}W^k + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{\infty}{\sqrt{}} = A_0 + A_1 W + A_2 W^2 + \ldots A_g W^g + \ldots A_k W^k + \ldots$$

in den ersten $g+1$ Gliedern ($g < h$ vorausgesetzt) übereinstimmen, ein Ergebniss, ganz analog demjenigen, welches bei Untersuchung der Reihen

$${}^{g}z = a_{g,0} + a_{g,1}\omega + a_{g,2}\omega^2 + \ldots a_{g,g}\omega^g + \ldots a_{g,k}\omega^k + \ldots$$
$${}^{h}z = a_{h,0} + a_{h,1}\omega + a_{h,2}\omega^2 + \ldots a_{h,g}\omega^g + \ldots a_{h,k}\omega^k + \ldots$$
$${}^{\infty}z = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots a_g\omega^g + \ldots a_k\omega^k + \ldots$$

gefunden worden ist. Auch hier habe ich die Coefficienten einiger Reihen berechnet und gefunden:

$$\overline{Z}\overset{1}{\sqrt{}} = 1 + W + 0{,}5\,W^2 + 0{,}167\,W^3 + 0{,}042\,W^4 + 0{,}008\,W^5 + 0{,}001\,W^6 + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{2}{\sqrt{}} = 1 + W - 0{,}5\,W^2 + 0{,}667\,W^3 - 1{,}125\,W^4 + 2{,}133\,W^5 - 4{,}340\,W^6 + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{3}{\sqrt{}} = 1 + W - 0{,}5\,W^2 - 0{,}333\,W^3 + 1{,}375\,W^4 - 1{,}533\,W^5 - 0{,}965\,W^6 + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{4}{\sqrt{}} = 1 + W - 0{,}5\,W^2 - 0{,}333\,W^3 + 0{,}375\,W^4 - 0{,}967\,W^5 - 1{,}632\,W^6 + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{5}{\sqrt{}} = 1 + W - 0{,}5\,W^2 - 0{,}333\,W^3 + 0{,}375\,W^4 - 0{,}033\,W^5 + 0{,}868\,W^6 + \ldots$$

$$\overline{Z}\overset{\infty}{\sqrt{}} = 1 + W - 0{,}5\,W^2 - 0{,}333\,W^3 + 0{,}375\,W^4 - 0{,}033\,W^5 - 0{,}132\,W^6 + \ldots$$

Beispielsweise ist für $W = \pm 0{,}1$ (auf 7 Decimstellen)

$\overline{1{,}1051\,710}\overset{1}{\sqrt{}} = 1{,}1051\,710$	$\overline{0{,}9048\,374}\overset{1}{\sqrt{}} = 0{,}9048\,374$
$\overline{1{,}1051\,710}\overset{2}{\sqrt{}} = 1{,}0955\,712$	$\overline{0{,}9048\,374}\overset{3}{\sqrt{}} = 0{,}8954\,851$
$\overline{1{,}1051\,710}\overset{3}{\sqrt{}} = 1{,}0947\,879$	$\overline{0{,}9048\,374}\overset{5}{\sqrt{}} = 0{,}8953\,720$
$\overline{1{,}1051\,710}\overset{4}{\sqrt{}} = 1{,}0947\,123$	$\overline{0{,}9048\,374}\overset{\infty}{\sqrt{}} = 0{,}8953\,710$
$\overline{1{,}1051\,710}\overset{5}{\sqrt{}} = 1{,}0947\,048$	$\overline{0{,}9048\,374}\overset{4}{\sqrt{}} = 0{,}8953\,595$
$\overline{1{,}1051\,710}\overset{\infty}{\sqrt{}} = 1{,}0947\,038$	$\overline{0{,}9048\,374}\overset{2}{\sqrt{}} = 0{,}8941\,951$

Digitized by Google

Aus dem Beispiel ist ersichtlich, dass die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{Z}\sqrt[1]{} > \overline{Z}\sqrt[2]{} > \overline{Z}\sqrt[3]{} > \ldots > \overline{Z}\sqrt[\infty]{} \\ \overline{Z}\sqrt[1]{} > \overline{Z}\sqrt[3]{} > \overline{Z}\sqrt[5]{} > \ldots > \overline{Z}\sqrt[\infty]{} > \ldots \overline{Z}\sqrt[4]{} > \overline{Z}\sqrt[2]{} \end{array}\right\} \text{für} \begin{array}{l} Z > 1 \\ Z < 1 \end{array}$$

Gültigkeit haben, ein Ergebniss, entsprechend dem, welches durch die Ungleichungen (1) zum Ausdruck gebracht ist.

Die für $\overline{Z}\sqrt[g]{}$ abgeleitete Reihe convergirt bei ungeradem g für jeden Wert von Z, während bei geradem g die Convergenzbedingung $\text{Min } Z < Z < \frac{1}{\text{Min } Z}$ ist.

Die Function ${}^{z}a$. Der Definition gemäss hat ${}^{g}a$ nur einen Sinn, wenn der Exponent g eine positive ganze Zahl ist. Wählt man als Definitionsgleichung für einen beliebigen reellen positiven Exponenten $+z$, welcher zwischen g und $g+1$ liege, die folgende:

$$ {}^{+z}a = a^{(a^{(a^{\cdot^{\cdot^{(a^{(a^{z-g}}}}}}} \quad (g \text{ mal gesetzt})$$

so ist dieselbe wol brauchbar, weil sie den Fall, wo z ganz ist, als speciellen Fall enthält. Endlich kann man auch negative reelle Exponenten zulassen; setzt man zur Abkürzung

$$\log^a(\log^a g) = \log^a(2)g, \quad \log^a(\log^a(2)g) = \log^a(3)g$$

u. s. f., so werde ${}^{-z}a$, wo

$$g+1 \geqq z \geqq g$$

sei, durch die Gleichung definirt:

$${}^{-z}a = \log a(g)(a^{z-g})$$

Nachdem die der Function ${}^{+z}a$ entsprechende Curve untersucht und die Function ${}^{+z}a$ in eine Reihe entwickelt worden ist, wird zum Schluss noch die Function ${}^{-z}e$ behandelt und gefunden, dass dieselbe für $z=2$ complex wird, und zwar nimmt, wenn sich z von g bis $g+1$ stetig ändert, der reelle Teil von ${}^{-z}e$, für $z=g$ unendlich gross, bis zu einem gewissen Minimum ab, um darauf wieder für $z=g+1$ in's Unendliche zu wachsen, während der imaginäre Teil, für $z=g$ unendlich klein, bis zu einem gewissen Maximum wächst, um darauf wieder für $z=g+1$ bis zu einer unendlich kleinen Grösse abzunehmen.

Digitized by Google

XVII.

Miscellen.

1.

Erweiterung der Sätze über das Tetraeder, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen.

Das Tetraeder von der genannten Eigenschaft ist schon Gegenstand mancher synthetischen Arbeiten gewesen. Die analytische Behandlung scheint nun schon deshalb lohnend, weil sie so schnell zu einigen sehr einfachen Sätzen führt, besonders aber deshalb, weil sie unmittelbar deren Ausdehnung auf die analogen Gebilde von mehr Dimensionen an die Hand gibt.

Im folgenden werde ich sogleich in voller Ausdehnung 3 Eigenschaften des allgemeinen Gebildes herleiten, dann beweisen, dass die letzte derselben die Grundeigenschaft definirt.

Wie in meinen frühern Schriften nenne ich ein Gebilde von n Dimensionen, sei es unbegrenzt oder ganz oder teilweise begrenzt, „$n$dehnig" oder eine „$n$dehnung". Eine unbegrenzte $n$dehnung heisst „linear", wenn sie nur durch lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten bestimmt wird. Im folgenden sei die Linearität der Kürze wegen überall vorausgesetzt. Nach Vorgang von Sylvester nenne ich das dem Dreieck und Tetraeder analoge Gebilde, nämlich das $n$dehnige $(n+1)$eck, ein „Plasma". Es ist begrenzt von $n+1$ $(n-1)$dehnigen Plasmen, welche seine „Seiten" heissen.

I.

Wir nehmen an, dass die Höhenlote, d. h. die Lote von den $n+1$ Ecken auf ihre Gegenseiten, sich in einem Punkte schneiden, und machen diesen zum Anfang der $n$rechtwinkligen Coordinaten

Digitized by Google

$x, y, z, \ldots$ Seien $x_k, y_k, z_k, \ldots$ die Coordinaten der $k$ten Ecke, $a_k, b_k, c_k \ldots$ die Richtungscosinus des $k$ten Höhenlots nach der Ecke hin, u_k, v_k die Strecken vom Höhenschnitt zur Ecke und vom Fusspunkt zum Höhenschnitt. Dann ist

$$x_k = a_k u_k; \quad y_k = b_k u_k; \quad \ldots$$

und die Gleichung der $h$ten Seite

$$a_h x + b_h y + c_h z + \ldots = -v_h$$

Da nun die $k$te Ecke in jeder andern als der $k$ten Seite liegt, so hat man:

$$(a_k a_h + b_k b_h + c_k c_h + \ldots) u_k = -v_h \tag{1}$$

$$k, h = 1, 2, \ldots n+1; \quad k \gtrless h$$

und nach Vertauschung von k und h:

$$(a_k a_h + b_k b_h + c_k c_h + \ldots) u_h = -v_k$$

woraus:

$$u_k v_k = u_h v_h = N \tag{2}$$

Erste Eigenschaft des Höhenschnitt-Plasmas: „Die Producte der „Höhenabschnitte sind für alle Höhen gleich".

Bezeichnet w_{kh} den Winkel zwischen dem $k$ten und $h$ten Höhenlote oder zwischen der $k$ten und $h$ten Seite, so ist nach Gl. (1), dann nach Gl. (2)

$$\cos w_{kh} = -\frac{v_h}{u_k} = -\frac{v_k v_h}{N} \tag{3}$$

woraus:

$$\frac{\cos w_{kh}}{\cos w_{kg}} = \frac{v_h}{v_g} = \frac{\cos w_{lh}}{\cos w_{lg}} \tag{4}$$

Zweite Eigenschaft: „Die Verhältnisse der Cosinus der von 2 „bestimmten Höhenloten mit allen andern gebildeten Winkel sind „einander gleich."

Ferner ist einerseits nach Gl. (3) (2)

$$u_k u_h \cos w_{kh} = -u_h v_h = -N$$

Bezeichnet l_{kh} die Kante, welche die Ecken k und h verbindet, also mit u_k und u_h ein Dreieck bildet, so ist andrerseits nach bekanntem Dreieckssatze

$$2 u_k u_h \cos w_{kh} = u_k^2 + u_h^2 - l_{kh}^2$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$u_k^2 + u_h^2 - l_{kh}^2 = -2N$$

und da N unabhängig von k und h:

Digitized by Google

$$u_h^2 + u_g^2 - l_{hg}^2 = -2N$$
$$u_g^2 + u_k^2 - l_{gk}^2 = -2N$$

Die letzte Gleichung von der Summe der 2 vorigen abgezogen, gibt:

$$2(u_h^2 + N) - l_{kh}^2 = l_{hg}^2 - l_{gk}^2$$

Die Linke ist unabhängig von g; setzt man f dafür, so wird

$$l_{hg}^2 + l_{kf}^2 = l_{kg}^2 + l_{hf}^2 \qquad (5)$$

Die l auf beiden Seiten sind Gegenkanten des Tetraeders $khgf$.

Dritte Eigenschaft: „In jedem Grenztetraeder haben die 3 Pare „von Gegenkanten gleiche Quadratsumme.“

II.

Es würde sich leicht beweisen lassen, dass aus dieser dritten Eigenschaft eines Tetraeders folgt, dass sich seine Höhen in einem Punkte schneiden; doch will ich, um Wiederholungen zu meiden, erst den nicht so einfachen Beweis für das allgemeine Plasma führen.

Die $(n+1)$te Ecke sei jetzt Anfang der wie vorher bezeichneten Coordinaten. Es bezeichne jM die Unterdeterminante zum Element M irgend einer Determinante, und sei

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

und für beliebige n Grössen $p_1, p_2, \dots$

$$\begin{aligned} x_1 p_1 + y_1 p_2 + \dots &= q_1 \\ x_2 p_1 + y_2 p_2 + \dots &= q_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ x_n p_1 + y_n p_2 + \dots &= q_n \end{aligned}$$

dann gibt die Auflösung des Systems nach den p:

$$\begin{aligned} q_1 jx_1 + q_2 jx_2 + \dots q_n jx_n &= \varDelta p_1 \\ q_1 jy_1 + q_2 jy_2 + \dots q_n jy_n &= \varDelta p_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Die Determinante der Coefficienten ist, als adjungirte zu $\varDelta$, $= \varDelta^{n-1}$; daher gibt die Auflösung nach q_m:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} jx_1 & jx_2 & \dots & jx_{m-1} & jx_{m+1} & \dots & jx_n & p_1 \\ jy_1 & jy_2 & \dots & jy_{m-1} & jy_{m+1} & \dots & jy_n & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \pm \Delta^{n-2} q_m \qquad (6)$$

Sei $p_1 = x_k - x_h;\quad p_2 = y_k - y_h;\ \dots$

und zwar seien m, k, h verschiedene der Zahlen 1, 2, ... n; dann wird

$$q_m = x_m(x_k - x_h) + y_m(y_k - y_h) + \dots$$

Nun ist

$$l_{mk}^2 = x_m^2 + y_m^2 + \dots + x_k^2 + y_k^2 + \dots - 2(x_m x_k + y_m y_k + \dots)$$

daher

$$2(x_m x_k + y_m y_k + \dots) = l_{mn+1}^2 + l_{kn+1}^2 - l_{mk}^2$$

ebenso

$$2(x_m x_h + y_m y_h + \dots) = l_{mn+1}^2 + l_{hn+1}^2 - l_{mh}^2$$

und nach Subtraction vermöge der vorausgesetzten Eigenschaft (5):

$$2q_m = (l_{kn+1}^2 + l_{mh}^2) - (l_{hn+1}^2 + l_{mk}^2) = 0$$

folglich verschwindet die linke Seite von Gl. (6). Da jx_k, jy_k, ... den Richtungscosinus des $k$ten Lotes a_k, b_k, ... proportionirt sind, so kann man das Resultat schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_{m+1} & \dots & a_n & x_k - x_h \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_{m+1} & \dots & b_n & y_k - y_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

$$k \gtrless m; \qquad h \gtrless m$$

Da nun die Gleichungen des $k$ten Lotes

$$x = x_k + \lambda a_k; \qquad y = y_k + \lambda b_k; \ \dots$$

sind, mithin in Gl (7) für die Coordinaten der Ecken die von Punkten auf den da beginnenden Loten gesetzt werden können, so ist der Sinn der Gl. (7):

„Je $n-1$ Höhenlote eines n dehnigen Plasmas von der dritten „Eigenschaft liegen auf einer $(n-1)$ dehnung."

Vom $(n+1)$ten Lote sehen wir jetzt ab. Fielen nun zwei jener $(n-1)$ dehnungen zusammen, so enthielten sie alle n Lote, d. h., sofern die Ecken 1, 2, ... n die Seite $n+1$ bestimmen, die Lote lägen in dieser Seite und ihre n Basen stünden auf ihr senkrecht Dies ist unmöglich, weil sie sich in der Ecke $n+1$ treffen sollen.

Digitized by Google

el können nicht zwei jener $(n-1)$ dehnungen sein, weil
samе Punkte haben Folglich schneiden sie sich in einer
ehnung, und in dieser müssen alle gemeinsamen Lote liegen,
Anzahl $n-2$ ist. Es hat sich ergeben:

„Unter den $n-1$ Loten, welche in einer $(n-1)$ dehnung liegen,
egen je $n-2$ in einer $(n-2)$ dehnung."

Auch von diesen $(n-2)$ dehnungen können weder 2 zusammenfallen noch parallel sein, sie müssen sich in einer $(n-3)$ dehnung schneiden, welche die $n-3$ gemeinsamen Lote enthält; der Beweis ist ganz entsprechend. Man hat daher:

„Unter den $n-2$ Loten, welche in einer $(n-2)$ dehnung liegen, „liegen je $n-3$ in einer $(n-3)$ dehnung"; und so fort, endlich:

„Unter den 4 Loten, welche in einem Raume liegen, liegen je „2 in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte."

Dies kann nur stattfinden, wenn entweder alle 3 Lote in einer Ebene liegen oder sich in einem Punkte schneiden. Im erstern Falle würden die Basen der 3 Lote auf dieser Ebene senkrecht stehen, sich also nicht in einem Punkte treffen. Schneiden sich aber je 3 Lote in einem Punkte, so schneiden sich alle Lote in einem Punkte.

Die dritte Eigenschaft (5) ist also ausreichende Bedingung, unter der alle Höhenlote sich in einem Punkte schneiden.

III.

Ist $n=3$, so lautet Gl. (7):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

und drückt sogleich aus, dass die Höhenlote 1 und 2 in einer Ebene liegen, woraus dann leicht folgt, dass sie sich in einem Punkte schneiden, und mit Vertauschung von 1, 2, 3, 4, dass alle 4 Lote sich in einem Punkte schneiden. Man kann nun den als dritte Eigenschaft ausgesprochenen Satz mit Umkehrung so fassen:

Die Höhenlote eines Plasmas schneiden sich in einem Punkte, wenn alle Grenztetraeder diese Eigenschaft besitzen, und letzteres ist der Fall bei jedem Höhenschnitt-Plasma.

Digitized by Google

Hieraus geht ferner hervor, dass alle Grenzplasmen eines Höhenschnitt-Plasmas selbst Höhenschnitt-Plasmen sind.

R. Hoppe.

2.

Ueber einige Formen von Densimetern, bei welchen gleichen Dichteintervallen gleiche Teilstrichdistanzen entsprechen.

Die Scalen derjenigen Instrumente zur Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit, welche unter dem Namen „Densimeter" bekannt sind, zeigen in ihrem unteren Teile eine Häufung der Markenteilstriche, so dass für Dichten, die um wenig verschieden sind von der höchsten Dichte, welche das Instrument überhaupt noch angibt, eine verhältnismässig geringe Empfindlichkeit vorhanden ist. Nichtsdestoweniger entsprechen diese Densimeter den Anforderungen, die an sie gestellt werden, zur Genüge, und es hat daher die leichte Untersuchung, die in der Ueberschrift angedeutet ist, lediglich nur ein theoretisches Interesse..

Wir bezeichnen das Gewicht des Aräometers mit G, Längen die auf der Axe desselben vom Wasserpunkt an gemessen werden, mit z, die äusseren Querschnitte mit Ω, das beliebig geformte Volumen des Instrumentes vom Wasserpunkt nach unten mit v, Dichten mit d und das specif. Gewicht des Wassers mit σ. — Wir haben zunächst ein Instrument vor Augen, welches für Dichten < 1 bestimmt ist, zählen die posit. z unter 1 mithin vom Wasserpunkt nach oben. Wenn wir nun noch bezeichnen mit H die Entfernung des Wasserpunktes von jenem (am Instrument natürlich nicht angegebenen) Punkte, bis zu welchem das vollständige Aräometer in einer hypothetischen Flüssigkeit von der Dichte 0 einsinken würde so können wir den analytischen Ausdruck für die Bedingung „gleichen Dichteintervallen entsprechen gleiche Teilstrichdistanzen" offenbar geben durch

1) $$d = k(H - z)$$

worin k eine bestimmte Constante bedeutet, deren Wert sich ergibt, wenn wir $z = 0$, $d = 1$ setzen. wodurch wir erhalten $k = \frac{1}{H}$. Die Substitution dieses Wertes in 1) gibt der Bedingungsgleichung die Form

1*) $$d = 1 - \frac{z}{H}$$

Digitized by Google

Mit Berücksichtigung derselben geht die Fundamentalgleichung der Aräometrie

2) $$G = (v + \int_0^z \Omega\, dz)\, d\,.\,\sigma$$

über in

2*) $$G = (v + \int_0^z \Omega\, dz)\left(1 - \frac{z}{H}\right)\sigma$$

aus welcher es uns obliegt Ω zu berechnen. Zu dem Behufe differentiren wir 2*) nach z und erhalten

3) $$-\frac{v}{H} - \frac{1}{H}\int_0^z \Omega\, dz + \left(1 - \frac{z}{H}\right)\Omega = 0$$

welche Gleichung sich auch darstellen lässt durch

3*) $$\Omega\,(H - z) = \frac{GH}{\sigma\,(H - z)}$$

und so unmittelbar für Ω den Wert gibt

4) $$\Omega = \frac{GH}{\sigma\,(H - z)^2}$$

Gestalten wir die Querschnitte alle kreisförmig, so haben wir zu setzen $\Omega = x^2\pi$ und erhalten als Gleichung des Meridians jener Rotationsfläche, welche die sogenannte Spindel des Densimeters formirt,

5) $$x\,(H - z) = \sqrt{\frac{GH}{\sigma\,\pi}}$$

die, wie man sieht, einer gleichseitigen Hyperbel angehört, welche die z-Axe und die zur x-Axe parallele Gerade $z = H$ zu Asymptoten hat. Selbstverständlich kommt nur jener Ast dieser Curve zur Geltung, der von Punkten erfüllt ist, für die besteht $0 < z < H$. Die Spindel ist also in dem Falle nichts anders als ein Stück eines „spitzen Hyperboloids". [1])

Setzen wir in der auf das Quadrat erhobenen Gleichung 5) an die Stelle von π die Zahl 4, so repräsentirt die so erhaltene Gleichung

---

1) Dieser wol nicht allgemein bekannte Name jener Fläche, welche eine gleichseit. Hyperbel bei der Rotation um eine ihrer Asymptoten erzeugt, ist von Evangelista Toricelli, dem Schüler Galilei's, zuerst gebraucht worden in dessen Abhandlung „de Solido hyperbolico acuto". (Florenz 1644.) S. Marie, Histoire, t. IV., pag. 135.

Digitized by Google

$$6)\qquad x^2(H-z)^2 = \frac{GH}{4\sigma}$$

einen (aus zwei gleichseitigen Hyperbeln bestehenden) Hauptlängsschnitt der Spindel, deren Querschnitte (gegeben durch $\Omega = 4x^2$) nunmehr quadratisch vorauszusetzen sind. Es ist klar, dass der zweite, auf dem ersten normale Hauptlängsschnitt, dem die Gleichung

$$6^*)\qquad y^2(H-z)^2 = \frac{GH}{4\sigma}$$

zukommt, congruent mit dem ersteren ist.

Schliesslich sei noch eines einfachen Falles gedacht. Es werde nämlich die Spindel cylindrisch gebaut vorausgesetzt, so zwar, dass sämtliche Querschnitte Rechtecke sind, die alle eine Dimension $= 2a$ haben, und man somit hat $\Omega = 2a.2x$. Die Leitlinie wird dann gegeben sein durch

$$7)\qquad x(H-z)^2 = \frac{GH}{4a\sigma}$$

Sie ist also die bekannte Parabel-Differentialcurve und hat, wie es in der Natur der Sache liegt, gleichfalls $z = H$ und $x = 0$ zu Asymptoten.

Wenn wir in 3*) setzen $G = v\sigma$, $z = 0$, $\Omega = \Omega_0$, so erhalten wir hieraus

$$8)\qquad v = \Omega_0 H$$

eine Formel, die uns lehrt, dass das Volumen v seiner Grösse nach nicht willkürlich ist Dieser Umstand ist bei Herstellung eines derartigen Instrumentes wol zu erwägen, worauf wir indes nicht mehr einzugehen brauchen.

Wien, im März 1889.

Eduard Janisch.

3.

Ein Discontinuitätsfactor.

Für jedes x ist

$$(1+x+\ldots x^{n-1})^p = \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^p =$$

$$\frac{x^{np} - \binom{p}{1}x^{n(p-1)} + \binom{p}{2}x^{n(p-2)} - \ldots + (-1)^p}{x^p - \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} - \ldots + (-1)_p}$$

Digitized by Google

welcher Ausdruck für $x = 1$ in der Form $0:0$ erscheint, durch p-maliges Differentiiren des Zählers und Nenners aber leicht ausgewertet werden kann. Dadurch findet man:

$$n^p = \binom{np}{p} - \binom{p}{1}\binom{n(p-1)}{p} + \binom{p}{2}\binom{n(p-2)}{p} - \dots - (-1)^p \binom{n}{p} \tag{1}$$

Diese bemerkenswerte Identität, in welcher eine Potenz durch Binomialcoefficienten ausgedrückt erscheint, kann durch Einführung der Facultäten-Coefficienten C_r^p, gebildet aus den Elementen $1, 2, \dots p-1$, leicht umgestaltet werden, wenn man die in den Binomialcoefficienten entaltenen Producte

$$np(np-1)(np-2)\dots, \quad n(p-1)(n(p-1)-1)\dots, \quad \text{etc.}$$

nach Potenzen von np, $n(p-1)$, etc. entwickelt; es ist dann

$$\begin{array}{l}
n^p p! = \overline{np}^p - \overline{np}^{p-1} C_1 + \overline{np}^{p-2} C_2 \dots - (-1)^p np\, C_{p-1} \\
- \binom{p}{1}\left[\overline{n(p-1)}^p - \overline{n(p-1)}^{p-1} C_1 \dots \quad \dots - (-1)^p n(p-1) C_{p-1}\right] \\
+ \binom{p}{2}\left[\overline{n(p-2)}^p - \overline{n(p-2)}^{p-1} C_1 \dots \quad \dots - (-1)^p n(p-2) C_{p-1}\right] \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\pm \binom{p}{p-2}\left[\overline{n.2}^p - \overline{n.2}^{p-1} C_1 + \dots \quad \dots - (-1)^p n.2\, C_{p-1}\right] \\
\mp \binom{p}{p-1}\left[n^p - n^{p-1} C_1 + \dots \quad \dots - (-1)^p n\, C_{p-1}\right]
\end{array}$$

Nach Verticalreihen geordnet und die gemeinschaftlichen Potenzen von n sowie die Facultäten-Coefficienten herausgestellt, ergiebt:

$$\begin{array}{l}
n^p p! = n^p\left[p^p - \binom{p}{1}(p-1)^p + \binom{p}{2}(p-2)^p - \dots - (-1)^p \binom{p}{p-1}\right] \\
\quad - n^{p-1} C_1 \left[p^{p-1} - \binom{p}{1}(p-1)^{p-1} + \binom{p}{2}(p-2)^{p-1} - \dots \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \dots - (-1)^p \binom{p}{p-1}\right] \\
\quad + n^{p-2} C_2 \left[p^{p-2} - \binom{p}{1}(p-1)^{p-2} + \binom{p}{2}(p-2)^{p-2} - \dots \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \dots - (-1)^p \binom{p}{p-1}\right] \\
\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\quad - (-1)^p n C_{p-1} \left[p - \binom{p}{1}(p-1) + \binom{p}{2}(p-2) - \dots \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \dots - (-1)^p \binom{p}{p-1}\right]
\end{array}$$

Digitized by Google

Nach einem Satze von den unbestimmten Coefficienten folgt hieraus, dass (2)

$$\frac{1}{p!}\left[p^m - \binom{p}{1}(p-1)^m + \binom{p}{2}(p-2)^m - \ldots - (-1)^p\binom{p}{p-1}\right]$$

$= 1$ oder $= 0$ ist, jenachdem $m = p$ oder $m < p$.

Die Bündigkeit dieses Schlusses wird durch die Bemerkung erkannt, dass der vorstehende Ausdruck (2) für $m = p$ in den von Schlömilch sobenannten „Facultäten-Coefficient mit negativem Exponent“ C_0^{-p} übergeht, welcher für einen negativen untern Zeiger (entsprechend dem Falle $m < p$) verschwinden muss.

Brünn, im August 1890.

Franz Rogel.

Digitized by Google

XVIII.

Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien.

Von

Friedrich Hermann Wehner.

Bei der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze von zwei homogenen, unkrystallinischen, vollkommen durchsichtigen Medien handelt es sich darum, für das reflectirte und gebrochene Licht die Fortpflanzungsrichtung, Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellenlänge, Schwingungsdauer, Schwingungsamplitude und Schwingungsphase als Functionen der Bestimmungselemente des einfallenden Lichtes und gewisser, von der Natur der beiden Medien abhängiger Constanten anzugeben. Das Gesetz für die Fortpflanzungsrichtung ist bereits seit Snellius und Descartes vollständig bekannt, zunächst experimentell gefunden und dann in der Emanations- und Undulationstheorie begründet worden. Das Gesetz, welches die Geschwindigkeiten und Wellenlängen regelt, hängt eng damit zusammen. Die Schwingungsdauer hat für Licht von derselben Farbe in allen Medien denselben Wert. Die Amplituden oder die Intensitäten und die Phasen machten hingegen soviel Schwierigkeiten, dass man vor Lambert nicht einmal experimentelle Versuche darüber unternahm. Auch Lamberts Bemühungen waren vergeblich. Erst Fresnel [1]) und etwas später F. E. Neumann [2]) erzielten auf Grund der von Malus entdeckten Polarisation des Lichtes durch Spiegelung und der Gesetze über die Interferenz polarisirten Lichtes überraschende Er-

1) Ann. de chim. et de phys. XLVI. 1831.

2) Abhdlg. der Berl. Ak. vom Jahre 1835.

Digitized by Google

folge. Beiden Forschern gelang es, auf verschiedenem Wege Formeln abzuleiten, welche mit den Tatsachen der Erfahrung in grosser Uebereinstimmung stehen. Aber ihre Theorien sind keineswegs einwurfsfrei. Deshalb ist das Problem seit dieser Zeit oft und auf mannigfaltige Art behandelt worden [1]), ohne dass es gelungen wäre, gewisse Schwierigkeiten zu überwinden, und hat gegenwärtig etwa folgende Gestalt: Unter der Annahme des Lichtäthers, welcher ausgestattet ist mit den Eigenschaften eines festen, vollkommen elastischen Körpers, und für welchen deshalb die Gesetze der Elasticitätstheorie gelten, sollen die Formeln für die Reflexion und Brechung des Lichtes abgeleitet werden. Es sollen also zwei homogene, vollkommen elastische Medien in einer Ebene an einander grenzen. Die Elasticitätstheorie liefert für jedes der beiden Medien drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung und für die Grenzfläche sechs Bedingungen. Diese Grenzbedingungen können nur dann befriedigt werden, wenn neben solchen particulären Lösungen der Differentialgleichungen, welche transversal schwingende Wellen darstellen, auch solche eingeführt werden, welche eine reflectirte und eine gebrochene longitudinale Welle darstellen. Diese letzteren stehen aber in Widerspruch mit bekannten Gesetzen der Lichterscheinungen. Alle Bemühungen, diesen Widerspruch zu beseitigen, laufen im Grunde darauf hinaus, die longitudinalen Wellen in endlicher Entfernung von der Grenzfläche zum Verschwinden zu bringen. Man hat sich dabei verschiedener Mittel bedient. Cauchy und seine Nachfolger setzen die eine Elasticitätsconstante oder, was dasselbe ist, das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für longitudinale Wellen negativ. Nun hat aber bereits Green erkannt, dass diese Annahme den Gesetzen der Elasticitätstheorie widerspricht. Deshalb kann Cauchy's und seiner Nachfolger Theorie der Reflexion und Brechung nicht aufrecht erhalten werden, obgleich die Resultate den Tatsachen der Beobachtung gemäss sind.

Green und seine Nachfolger beseitigen die longitudinalen Wellen dadurch, dass sie die eine Elasticitätsconstante unendlich gross oder wenigstens sehr gross setzen. Aber auch mit dieser Annahme ist bis jetzt noch keine befriedigende Theorie erlangt worden Green rechnet zunächst mit einem plötzlichen Uebergang zwischen den beiden Medien. Die Formeln, die sich dabei ergeben, widersprechen der Erfahrung. Später suchte er seine Formeln durch die Annahme eines allmählichen Ueberganges oder einer Uebergangsschicht zwischen den beiden Medien zu verbessern. Aber seine Rechnungen sind nicht

---

1) Eine Angabe der Litteratur und ein Bericht über diese Arbeiten finden sich in den Abhandlungen des Herrn Prof. Von der Mühll, Math. Ann. V. S. 471 und Math. Ann. XXVII. S. 506.

Digitized by Google

frei von Fehlern [1]). Auch seinen Nachfolgern S. Haughton und J. W. Strutt ist es nicht gelungen, eine fehlerfreie Theorie aufzustellen.

Herr Prof. Von der Mühll [2]) hat in seiner Abhandlung über Reflexion und Brechung des Lichtes Herrn C. Neumanns Hypothese von der Incompressibilität des Lichtäthers verwendet. Da die Greensche Voraussetzung, die eine Elasticitätsconstante sei unendlich gross, die Inconpressibilität des Lichtäthers zur Folge hat, so besteht zwischen den Formeln Green's und des Herrn Von der Mühll ein enger Zusammenhang, wenn auch die Herleitung durchaus verschieden ist. Ausserdem sind die Formeln des Herrn Von der Mühll allgemeiner und strenger begründet. Die grössere Allgemeinheit beruht darauf, dass über die Gleichheit der elastischen Constanten in verschiedenen Medien nicht willkürlich verfügt wird, die strengere Begründung in der richtigen Durchführung der Rechnungen für einen allmählichen Uebergang von dem einen Medium zum anderen. Aber auch diese allgemeineren und strenger begründeten Formeln stellen der Anpassung an die Tatsachen der Beobachtung grosse Schwierigkeiten entgegen.

In der Abhandlung Math. Ann. XXVII. S. 506 hat Herr Prof. Von der Mühll einen neuen Weg angegeben, auf welchem das Problem der Reflexion und Brechung behandelt werden kann: „Man „braucht nicht den Lichtäther incompressibel zu setzen, die Green- „sche Constante A unendlich gross. Vielmehr kann die Möglichkeit „einer ungeschwächten Fortpflanzung longitudinaler Wellen bestehen „bleiben, wenn nur von dem einen Medium zum anderen ein solcher „Uebergang stattfindet, dass die reflectirten und gebrochenen longi- „tudinalen Strahlen keinen merklichen Teil der lebendigen Kraft in „Anspruch nehmen“ [3]).

Durch Herrn Prof. Von der Mühll auf diesen neuen Weg hingewiesen, hat der Verfasser der vorliegenden Arbeit versucht, denselben zu betreten.

---

1) Vergl. Von der Mühll, Math. Ann. XXVII. S. 506.

2) Math. Ann. V. S. 471.

3) Vergl. Math. Annal. XXVII, S. 513.

Digitized by Google

I.

Zwei homogene, unkrystallinische Medien, welche in einer Ebene an einander grenzen.

Es sollen zwei homogene, unkrystallinische Medien von verschiedener Dichtigkeit und Elasticität in einer Ebene an einander grenzen. Bezeichnet man für irgend eine Stelle x, y, z des ersten die Componenten der äusseren Kräfte mit X, Y, Z, die Componenten der Verrückungen eines Molecüls aus der natürlichen Gleichgewichtslage mit u, v, w, die Dichtigkeit mit ε, zwei Elasticitätsconstanten mit ϱ und μ und setzt

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

so lassen sich auf verschiedenen Wegen folgende Differentialgleichungen aufstellen:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right) = \varrho\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z} - \mu\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right) = \varrho\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} - \mu\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right) = \varrho\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} - \mu\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

Unterscheidet man von den obengenannten Grössen des ersten Mediums die entsprechenden des zweiten Mediums durch den Index 1, so gelten die entsprechenden Differentialgleichungen auch für das zweite Medium. An der Grenze der beiden Medien müssen die Bedingungen erfüllt werden:

$$\bar{v} = \bar{v}_1, \quad \bar{u} = \bar{u}_1, \quad \bar{w} = \bar{w}_1$$

$$\mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right) = \mu_1\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y}\right)$$

$$\mu\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = \mu_1\left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z}\right)$$

$$\varrho\bar{\theta} - 2\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) = \varrho_1\bar{\theta}_1 - 2\mu_1\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y}\right)$$

Die Grenzgleichungen gelten unter der Annahme, dass die Z Axe

Digitized by Google

senkrecht zur Grenzfläche liegt. Ferner sei für das erste Medium $z < 0$, für das zweite $z > 0$. Die in der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Wellen positiv gerechnete Wellennormale soll in den Quadranten $(+X)(+Z)$ zu liegen kommen.

In unserem Falle pflanzen sich nur ebene Wellen fort, welche alle derselben Geraden parallel sind. Wählen wir diese zur Y Axe des Coordinatensystems, so werden die Verrückungen u, v, w unabhängig von y. Da ferner keine äusseren Kräfte einwirken, so vereinfachen sich die Differentialgleichungen zu

$$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \tag{1a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varrho \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}{\partial x} - \mu \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varrho \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}{\partial z} + \mu \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial x} \end{aligned} \right. \tag{1b}$$

und die Grenzgleichungen zu

$$\bar{v} = \bar{v}_1, \quad \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \mu_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \tag{2a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{u} = \bar{u}_1, \qquad \bar{w} = \bar{w}_1 \\ & \mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \mu_1 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} \right) \\ & \varrho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \varrho_1 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} \right) - 2\mu_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \end{aligned} \right. \tag{2b}$$

Unsere Aufgabe ist nun, solche Lösungen der Differentialgleichungen (1a), (1b) zu finden, welche die Grenzbedingungen (2a), (2b) erfüllen und das vorhandene Licht darstellen.

Da in diesen Gleichungen die Grössen v vollständig getrennt sind von den u und w, so können wir den Teil des Lichtes, welcher senkrecht zur Einfallsebene schwingt, und denjenigen, welcher in der Einfallsebene schwingt, für sich besonders behandeln.

a. Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Bezeichnet man für das senkrecht zur Einfallsebene schwingende Licht in den beiden Medien mit T die Schwingungsdauer γ, mit

Digitized by Google

resp. λ_1 die Wellenlängen, mit φ den Einfallswinkel und mit φ_1 den Brechungswinkel, so sind zur symbolischen Darstellung resp. des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Lichtes geeignet:

$$v = Pe^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda}\right)} + P'e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda}\right)}$$

$$v_1 = P_1 e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1}\right)}$$

Die longitudinalen Wellen geben keine Schwingungen in Richtung der Y Axe. Sollen die vorstehenden Werte die Differentialgleichungen (1a) erfüllen, so muss sein:

$$\lambda = T\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \lambda_1 = T\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$

Die Grenzgleichungen (2a) werden für $z = 0$ befriedigt, wenn

$$(3) \qquad \frac{\sin\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1}$$

und

$$P + P' = P_1$$

$$(P - P')\,\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi = P_1\,\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1$$

Setzen wir:

$$(4) \quad M = 1, \quad N = 0, \quad M' = 0, \quad N' = \frac{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}{\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$$

so erhalten wir:

$$(5) \quad P_1 = M(P + P') + iN(P - P') = iM'(P + P') + N'(P - P')$$

Für die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erhalten wir stets diese Gleichungen, auch wenn wir bloss transversale Wellen annehmen oder die Voraussetzungen Cauchy's, Green's oder Von der Mühll's zu Grunde legen.

b. Schwingungen in der Einfallsebene.

Nehmen wir zur früheren Bezeichnung hinzu: ν bezüglich ν_1 für die Länge der longitudinalen Wellen in den beiden Medien, ψ für den Reflexions- und ψ_1 für den Brechungswinkel derselben und setzen wir:

$$\lambda = T\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \lambda_1 = T\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \nu = T\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon}}, \quad \nu_1 = T\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}}$$

Digitized by Google

so ergeben sich als particuläre Lösungen für die Differentialgleichungen (1b):

$$u_i = S\cos\varphi e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda}\right)}$$

$$w_i = -S\sin\varphi e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda}\right)}$$

zur symbolischen Darstellung der einfallenden, transversalen Wellen,

$$u_r = S'\cos\varphi e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda}\right)}$$

$$w_r = S'\sin\varphi e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda}\right)}$$

zur symbolischen Darstellung der reflectirten, transversalen Wellen,

$$u_l = L\sin\psi e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi + z\cos\psi}{\nu}\right)}$$

$$w_l = L\cos\psi e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi + z\cos\psi}{\nu}\right)}$$

zur symbolischen Darstellung der reflectirten, longitudinalen Wellen,

$$u_d = S_1\cos\varphi_1 e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1}\right)}$$

$$w_d = -S_1\sin\varphi_1 e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1}\right)}$$

zur symbolischen Darstellung der gebrochenen, transversalen Wellen, und

$$u_{l_1} = L_1\sin\psi_1 e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi_1 + z\cos\psi_1}{\nu_1}\right)}$$

$$w_{l_1} = L_1\cos\psi_1 e^{2\pi i\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi_1 + z\cos\psi_1}{\nu_1}\right)}$$

zur symbolischen Darstellung der gebrochenen, longitudinalen Wellen.

Damit diese particulären Lösungen die Gleichungen (2b) befriedigen, muss sein:

(6) $$\frac{\sin\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1} = \frac{\sin\psi}{\nu} = \frac{\sin\psi_1}{\nu_1}$$

Hiernach sind die longitudinalen Wellen der Richtung nach demselben Reflexions- und Brechungsgesetz unterworfen wie die transversalen.

Digitized by Google

Weiter folgt aus den Grenzgleichungen (2b):

$$(S+S')\cos\varphi + L\sin\psi = S_1\cos\varphi_1 + L_1\sin\psi_1$$
$$(S-S')\sin\varphi - L\cos\psi = S_1\sin\varphi_1 - L_1\cos\psi_1$$

$$(S-S')\,\varepsilon\sin\varphi(1-2\sin^2\varphi)+2L\,\varepsilon\sin^2\varphi\cos\psi$$
$$= S_1\,\varepsilon_1\sin\varphi_1(1-2\sin^2\varphi_1)+2L_1\,\varepsilon_1\sin^2\varphi_1\cos\psi_1$$

$$2(S+S')\,\varepsilon\sin^2\varphi\cos\varphi - L\,\varepsilon\sin\psi(1-2\sin^2\varphi)$$
$$= 2S_1\,\varepsilon_1\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1 - L_1\,\varepsilon_1\sin\psi_1(1-2\sin^2\varphi_1)$$

Eliminiren wir L und L_1 aus diesen vier Gleichungen und setzen zur Abkürzung:

$$\omega = 2(\varepsilon\sin^2\varphi - \varepsilon_1\sin^2\varphi_1)$$

so erhalten wir zur Bestimmung der Grössen S' und S_1:

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&S_1\,\varepsilon_1\cos\varphi_1\,[(\varepsilon_1+\omega)\,\mathrm{tang}\,\psi_1-(\varepsilon-\omega)\,\mathrm{tang}\,\psi]\\
&\qquad=(S+S')\cos\varphi\,[(\varepsilon_1+\omega)^2\,\mathrm{tang}\,\psi_1-\varepsilon\varepsilon_1\,\mathrm{tang}\,\psi]\\
&\qquad+(S-S')(\varepsilon_1-\varepsilon+\omega)^2\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\psi\,\mathrm{tang}\,\psi_1\\
&S_1\,\varepsilon_1\sin\varphi_1\,[(\varepsilon_1+\omega)\,\mathrm{tang}\,\psi_1-(\varepsilon-\omega)\,\mathrm{tang}\,\psi]\\
&\qquad=-(S+S')\,\omega^2\cos\varphi+(S-S')\sin\varphi\,[\varepsilon\varepsilon_1\,\mathrm{tang}\,\psi_1\\
&\qquad\quad-(\varepsilon-\omega)^2\,\mathrm{tang}\,\psi]
\end{aligned}\right.$$

Dass die longitudinalen Wellen in endlicher Entfernung von der Grenzfläche verschwinden, erreichen wir entweder durch die Green-sche Annahme $\varrho=\infty$, $\varrho_1=\infty$, oder durch die Cauchy'sche Annahme $\varrho<0$, $\varrho_1<0$.

c. Green's Annahme $\varrho=\infty$, $\varrho_1=\infty$.

Wegen

$$\nu = T\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon}},\quad \nu_1 = T\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}},\quad \sin\psi=\sin\varphi\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}$$
$$\sin\psi_1=\sin\varphi\sqrt{\frac{\varrho_1\,\varepsilon}{\mu_1\,\varepsilon_1}}$$

wird für endliche Werte von φ:

$$\nu=\infty,\quad \nu_1=\infty,\quad \sin\psi=\infty,\quad \sin\psi_1=\infty$$
$$\cos\psi=i\infty,\quad \cos\psi_1=-i\infty,\quad \mathrm{tang}\,\psi=-i,\quad \mathrm{tang}\,\psi_1=i$$

Durch die Substitution $\mathrm{tang}\,\psi=-i$, $\mathrm{tang}\,\psi_1=i$ in die Gleichungen (7) verwandeln sich dieselben in

Digitized by Google

$$(7a)\quad \begin{cases} S_1\varepsilon_1(\varepsilon+\varepsilon_1)\cos\varphi_1 = (S+S')[\varepsilon\varepsilon_1+(\varepsilon_1+\omega)^2]\cos\varphi \\ \qquad\qquad -(S-S')(\varepsilon_1-\varepsilon+\omega)^2 i\sin\varphi \\ S_1\varepsilon_1(\varepsilon+\varepsilon_1)i\sin\varphi_1 = -(S+S')\,\omega^2\cos\varphi \\ \qquad\qquad +(S-S')[\varepsilon\varepsilon_1+(\varepsilon-\omega)^2]i\sin\varphi \end{cases}$$

Setzen wir

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = \frac{\varepsilon\varepsilon_1+(\varepsilon_1+\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon+\varepsilon_1)}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}, & \mathrm{N} = -\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon+\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon+\varepsilon_1)}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1} \\ \mathrm{M}' = \frac{\omega^2}{\varepsilon_1(\varepsilon+\varepsilon_1)}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}, & \mathrm{N}' = \frac{\varepsilon\varepsilon_1+(\varepsilon-\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon+\varepsilon_1)}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} \end{cases}$$

so können wir die Gleichungen (7a) in der Form schreiben:

$$(9)\quad S_1 = \mathrm{M}(S+S')+i\mathrm{N}(S-S') = i\mathrm{M}'(S+S')+\mathrm{N}'(S-S')$$

Die Vergleichung unserer Formeln (4), (5), (8) und (9) mit den Formeln (I), (6), (II) und (7) des Herrn Von der Mühll Math. Ann. V. S. 491, 492 und 495 zeigt, dass die Green'sche Annahme $\varrho=\infty$, $\varrho_1=\infty$ dieselben Resultate liefert wie die Annahme, der Lichtäther sei incompressibel. Die Untersuchung, ob unsere Formeln mit den Tatsachen der Beobachtung übereinstimmen, ist also ebenso wie Math. Ann. V. S. 495 bis S. 503. Diese Untersuchung führt zu verschiedenen Bedingungen, je nachdem man annimmt, dass die Schwingungen geradlinig polarisirten Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene oder in derselben stattfinden. Im ersteren Falle stimmen unsere Formeln mit der Erfahrung überein, wenn

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = M\cos\varphi\cos\varphi_1+N'\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \mathrm{N} = N\cos\varphi\cos\varphi_1+M'\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \mathrm{M}' = M'\cos\varphi\cos\varphi_1+N\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \mathrm{N}' = N'\cos\varphi\cos\varphi_1+M\sin\varphi\sin\varphi_1 \end{cases}$$

im letzteren Falle, wenn

$$(10a)\quad \begin{cases} M = \mathrm{M}\cos\varphi\cos\varphi_1+\mathrm{N}'\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ N = \mathrm{N}\cos\varphi\cos\varphi_1+\mathrm{M}'\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ M' = \mathrm{M}'\cos\varphi\cos\varphi_1+\mathrm{N}\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ N' = \mathrm{N}'\cos\varphi\cos\varphi_1+\mathrm{M}\sin\varphi\sin\varphi_1 \end{cases}$$

Diese Bedingungen werden aber von unseren Werten (4) und (8) nur dann erfüllt, wenn

$$\omega = 2(\varepsilon\sin^2\varphi-\varepsilon_1\sin^2\varphi_1) = 0,\quad \varepsilon=\varepsilon_1$$

oder, was dasselbe ist, wenn

$$\mu=\mu_1,\quad \varepsilon=\varepsilon_1$$

Digitized by Google

Da diese beiden Bedingungen zusammen unverträglich sind, so widersprechen unsere Formeln (4), (5), (8) und (9) den Tatsachen der Erfahrung.

d. Cauchy's Annahme $\varrho < 0$, $\varrho_1 < 0$.

Bei der Annahme $\varrho < 0$, $\varrho_1 < 0$ ist die Behandlung der Gleichungen (7) und die Vergleichung der Formeln mit den Tatsachen der Beobachtung ganz entsprechend wie bei der Green'schen Annahme $\varrho = \infty$, $\varrho_1 = \infty$. Man erhält

$$\operatorname{tang} \psi = -i\beta, \quad \operatorname{tang} \psi_1 = i\beta_1$$

Dabei sind β und β_1 bestimmte, reelle Functionen der Winkel φ bezüglich φ_1. Die Substitution dieser Werte in die Gleichungen (7) führt auch hier auf die Gleichungen (9). Nur haben die Grössen M, N, M' und N' jetzt andere Werte als (8). Es treten noch die Functionen β und β_1 darin auf. Auch jetzt findet die Erhaltung der lebendigen Kraft für die transversalen Wellen statt, denn es wird der Gleichung

$$MN' + M'N = \frac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}$$

Genüge geleistet. Die Untersuchung, ob die Formeln der Erfahrung entsprechen, geschieht auch hier dadurch, dass man die Bedingungen feststellt, unter welchen die gefundenen Werte die Gleichungen (10) bezüglich (10a) erfüllen. Diese Untersuchung ist deshalb von geringerem Interesse, weil die Annahme $\varrho < 0$, $\varrho_1 < 0$ den Lehren der Elasticitätstheorie, die wir zur Grundlage gewählt haben, entgegen ist.

II.

Zwei homogene, unkrystallinische Medien, zwischen welchen sich eine Uebergangsschicht befindet.

Weil die vorhergehende Theorie keine befriedigenden Resultate liefert, verändern wir die Voraussetzungen. Es ist im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass an der Grenze zweier verschiedenartiger Medien eine sprungweise Aenderung der Dichtigkeit und Elasticität stattfindet. Wir müssen vielmehr einen stetigen, allmählichen Uebergang annehmen. Die Grenze von zwei verschiedenartigen Medien ist mit anderen Worten nicht eine Fläche, sondern eine Uebergangsschicht von endlicher Dicke. In unserem Falle denken wir uns dieselbe zerlegt in eine beliebig grosse Zahl m sehr dünner, ebener, homogener Schichten von der Dicke bezüglich

Digitized by Google

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3 \quad . \; . \; . \quad c_h, \quad . \; . \; . \quad c_m$$

Die Dichtigkeit und die beiden Elasticitätsconstanten seien für die $h$te Schicht bezüglich ε_h', μ_h', ϱ_h', die Verrückungen eines Teilchens aus der natürlichen Gleichgewichtslage u_h', v_h', w_h', die Wellenlängen λ_h', ν_h', die Brechungswinkel φ_h', ψ_h'. Ferner wollen wir annehmen, dass die $h$te Schicht von $z_h' = 0$ bis $z_h' = c_h$, die $(h+1)$te Schicht von $z_{h+1}' = 0$ bis $z_{h+1}' = c_{h+1}$ reiche. Dann gelten für jede der m Schichten die Differentialgleichungen:

$$\text{(11a)} \qquad \varepsilon_h' \frac{\partial^2 v_h'}{\partial t^2} = \mu_h' \left(\frac{\partial^2 v_h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_h'}{\partial z_h'^2} \right)$$

$$\text{(11b)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_h' \dfrac{\partial^2 u_h'}{\partial t^2} = \varrho_h' \dfrac{\partial \left(\dfrac{\partial u_h'}{\partial x} + \dfrac{\partial w_h'}{\partial z_h'} \right)}{\partial x} - \mu_h' \dfrac{\partial \left(\dfrac{\partial w_h'}{\partial x} - \dfrac{\partial u_h'}{\partial z_h'} \right)}{\partial z_h'} \\[2ex] \varepsilon_h' \dfrac{\partial^2 w_h'}{\partial t^2} = \varrho_h' \dfrac{\partial \left(\dfrac{\partial u_h'}{\partial x} + \dfrac{\partial w_h'}{\partial z_h'} \right)}{\partial z_h'} + \mu_h' \dfrac{\partial \left(\dfrac{\partial w_h'}{\partial x} - \dfrac{\partial u_h'}{\partial z_h'} \right)}{\partial x} \end{cases}$$

$$h = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \quad . \; . \; . \quad (m+1)$$

und an der Grenze der $h$ten mit der $(h+1)$ten Schicht, d. h. für $z_h' = c_h$, $z_{h+1}' = 0$, die Bedingungen:

$$\text{(12a)} \qquad v_h' = v_{h+1}', \qquad \mu_h' \frac{\partial v_h'}{\partial z_h'} = \mu_{h+1}' \frac{\partial v_{h+1}'}{\partial z_{h+1}'}$$

$$\text{(12b)} \qquad \begin{cases} u_h' = u_{h+1}', \qquad w_h' = w_{h+1}' \\[1ex] \mu_h' \left(\dfrac{\partial w_h'}{\partial x} + \dfrac{\partial u_h'}{\partial z_h'} \right) = \mu_{h+1}' \left(\dfrac{\partial w_{h+1}'}{\partial x} + \dfrac{\partial u_{h+1}'}{\partial z_{h+1}'} \right) \\[2ex] \varrho_h' \left(\dfrac{\partial u_h'}{\partial x} + \dfrac{\partial w_h'}{\partial z_h} \right) - 2\mu_h \dfrac{\partial u_h'}{\partial x} = \varrho_{h+1}' \left(\dfrac{\partial u_{h+1})}{\partial x} + \dfrac{\partial w_{h+1}'}{\partial z_{h+1}'} \right) \\[2ex] \qquad\qquad\qquad - 2\mu_{h+1}' \dfrac{\partial u_{h+1}'}{\partial x} \end{cases}$$

$$h = 0, \quad 1, \quad 2 \quad . \; . \; . \quad m$$

Da die Differentialgleichungen (11) auch für die beiden Medien gelten und die Bedingungen (12) ebenfalls für die Grenze des ersten Mediums mit der ersten Uebergangsschicht und für die Grenze der $m$ten Uebergangsschicht mit dem zweiten Medium, so können wir das erste Medium als eine 0te Schicht und das zweite Medium als eine $(m+1)$te Schicht betrachten. Nur wollen wir, um mit unserer früheren Bezeichnung in Einklang zu bleiben, für die 0te und die $(m+1)$te Schicht den Strich oben und den Index 0 weg-

Digitized by Google

lassen und den Index $m+1$ durch den Index 1 ersetzen. Weil auch hier die Gleichungen für v die u und w nicht enthalten, so können wir wieder die beiden Fälle, wo die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene und wo sie in der Einfallsebene stattfinden, von einander trennen.

a. Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Die Ableitung der Formeln für die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene ist übereinstimmend mit derjenigen, welche Herr Von der Mühll Math. Ann. V. S. 509 bis S. 519 gegeben hat. Das Resultat derselben ist: Die Grössen P' und P_1 werden auch hier bestimmt durch die Gleichungen:

$$(5)\quad P_1 = M(P+P')+iN(P-P') = iM'(P+P')+N'(P-P')$$

Dabei ist:

$$(13)\quad M = \overline{Z}_1,\quad N = -\overline{Z}_2 \sin\varphi\cos\varphi,\quad M' = \frac{\overline{Y}_1}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$$

$$N' = \overline{Y}_2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$$

$\overline{Z}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Y}_2$ sind die Werte der particulären Lösungen Z_1, Y_1, Z_2, Y_2 für $z = c$, wobei c die Dicke der Uebergangsschicht bezeichnet. Die particulären Lösungen von Z und Y werden bestimmt durch die Differentialgleichungen:

$$(14)\qquad \frac{dZ}{dz} = Y\frac{\alpha}{\sin^2\varphi'},\quad \frac{d.\varepsilon Y'}{dz} = -\alpha\varepsilon' Z\cos^2\varphi'$$

und die Anfangsbedingungen für $z = 0$:

$$(15)\qquad Z_1 = 1,\quad Y_1 = 0,\quad Z_2 = 0,\quad Y_2 = 1$$

Dabei ist gesetzt:

$$\alpha = 2\pi\frac{\sin\varphi}{\lambda} = 2\pi\frac{\sin\varphi'}{\lambda'}$$

Der Strich oben bezeichnet, dass die betreffenden Werte für die Uebergangsschicht, welche von $z = 0$ bis $z = c$ reicht, zu nehmen sind. Aus den Differentialgleichungen (14) folgt:

$$Z = Z_0 + \alpha\int_0^z \frac{Y dz'}{\sin^2\varphi'}$$

Digitized by Google

$$\varepsilon' Y = \varepsilon Y_0 - \alpha \int_0^z \varepsilon' \cos^2\varphi' Z\, dz$$

Dabei bezeichnen Z_0 und Y_0 die Werte von Z_1, Y_1 bezüglich Z_2, Y_2 für $z = 0$. Setzen wir in den Integralen auf der rechten Seite dieser Gleichungen statt Y und Z die Werte für $z = 0$ ein, so erhalten wir Werte für Z und $\varepsilon' Y$, welche von $z = 0$ bis $z = \delta$ gültig sind, wobei δ unendlich klein ist. Indem wir die so gefundenen Functionen abermals auf der rechten Seite einsetzen, können wir die Gültigkeit der Werte Z und $\varepsilon' Y$ auf das Intervall von $z = 0$ bis $z = \delta_1$ ausdehnen, wobei $0 < \delta < \delta_1$ und δ_1 ebenfalls unendlich klein ist. Indem wir diese Substitution unendlich oft wiederholen, ergiebt sich:

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
Z_1 &= 1 - \alpha^2 \int_0^z \int_0^{z_2} \frac{\varepsilon_1' \cos^2\varphi_1'}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'}\, dz_2\, dz_1 \\
&\quad + \alpha^4 \int_0^z \int_0^{z_4} \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{\varepsilon_1' \cos^2\varphi_1' . \varepsilon_3' \cos^2\varphi_3'}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2' . \varepsilon_4' \sin^2\varphi_4'}\, dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1 - \ldots \\
\varepsilon' Y_1 &= -\alpha \int_0^z \varepsilon_1' \cos^2\varphi_1'\, dz_1 \\
&\quad + \alpha^3 \int_0^z \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{\varepsilon_1' \cos^2\varphi_1' . \varepsilon_3' \cos^2\varphi_3'}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'}\, dz_3\, dz_2\, dc_1 - \ldots \\
\frac{1}{\varepsilon} Z_2 &= \alpha \int_0^z \frac{dz_1}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'} \\
&\quad - \alpha^3 \int_0^z \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{\varepsilon_2' \cos^2\varphi_2'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' . \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}\, dz_3\, dz_2\, dz_1 + \ldots \\
\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} Y_2 &= 1 - \alpha^2 \int_0^z \int_0^{z_2} \frac{\varepsilon_2' \cos^2\varphi_2'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'}\, dz_2\, dz_1 \\
&\quad + \alpha^4 \int_0^z \int_0^{z_4} \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{\varepsilon_2' \cos^2\varphi_2' . \varepsilon_4' \cos^2\varphi_4'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' . \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}\, dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1 - \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Digitized by Google

Die Functionen ε_h' und φ_h' erhält man aus ε' und φ', indem man das Argument gleich z_h setzt.

Ferner folgt aus den Differentialgleichungen (14) die Relation:

$$Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \tag{17}$$

gültig für jeden Wert von $z = 0$ bis $z = c$.

b. Schwingungen in der Einfallsebene.

Zur symbolischen Darstellung der Schwingungen in der Einfallsebene in jeder der $m+2$ Schichten dienen folgende Lösungen der Differentialgleichungen (11b):

$$\begin{aligned}
u_h' = {} & A_h \cos\varphi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_h' + z_h'\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)} \\
& + B_h \cos\varphi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_h' - z_h'\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)} \\
& + L_h \sin\psi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi_h' + z_h'\cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)} \\
& + M_h \sin\psi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi_h' - z_h'\cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_h' = {} & - A_h \sin\varphi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_h' + z_h'\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)} \\
& + B_h \sin\varphi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\varphi_h' - z_h'\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)} \\
& + L_h \cos\psi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi_h' + z_h'\cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)} \\
& - M_h \cos\psi_h'\, e^{i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\sin\psi_h' - z_h'\cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)}
\end{aligned}$$

$$h = 0,\quad 1,\quad 2\ \ldots\ (m+1)$$

Dabei muss sein:

$$A_0 = S,\quad B_0 = S',\quad L_0 = L,\quad M_0 = 0$$
$$A_{m+1} = S_1,\quad B_{m+1} = 0,\quad L_{m+1} = L_1,\quad M_{m+1} = 0$$

ferner:

$$\lambda_h' = T\sqrt{\frac{\mu_h'}{\varepsilon_h'}},\quad \nu_h' = T\sqrt{\frac{\varrho_h'}{\varepsilon_h'}} \tag{18}$$

Die particulären Lösungen erfüllen die Grenzbedingungen (12b), wenn

Digitized by Google

(18a) $$\frac{\sin\varphi_h'}{\lambda_h'} = \frac{\sin\varphi_{h+1}'}{\lambda_{h+1}'} = \frac{\sin\psi_h'}{\nu_h'} = \frac{\sin\psi_{h+1}'}{\nu_{h+1}'}$$

$$h = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ m$$

und

$$(A_{h+1}+B_{h+1})\cos\varphi_{h+1}'+(L_{h+1}+M_{h+1})\sin\psi_{h+1}'$$
$$=(A_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}}+B_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}})\cos\varphi_h'$$
$$+(L_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}}+M_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}})\sin\psi_h'$$

$$(A_{h+1}-B_{h+1})\sin\varphi_{h+1}'-(L_{h+1}-M_{h+1})\cos\psi_{h+1}'$$
$$=(A_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}}-B_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}})\sin\varphi_h'$$
$$-(L_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}}-M_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}})\cos\psi_h'$$

$$(A_{h+1}-B_{h+1})\frac{\mu_{h+1}'}{\lambda_{h+1}'}(1-2\sin^2\varphi_{h+1}')$$
$$+2(L_{h+1}-M_{h+1})\frac{\mu_{h+1}'}{\nu_{h+1}'}\sin\psi_{h+1}'\cos\psi_{h+1}'$$
$$=(A_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}}-B e^{i2\pi\frac{c_h\cos\varphi}{\lambda_h'}})\frac{\mu_h'}{\lambda_h'}(1-2\sin^2\varphi_h')$$
$$+2(L_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}}-M_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}})\frac{\mu_h'}{\nu_h'}\sin\psi_h'\cos\psi_h'$$

$$2(A_{h+1}+B_{h+1})\frac{\mu_{h+1}'}{\lambda_{h+1}'}\sin\varphi_{h+1}'\cos\varphi_{h+1}'$$
$$-(L_{h+1}+M_{h+1})\frac{\varrho_{h+1}'-2\mu_{h+1}'\sin^2\psi_{h+1}'}{\nu_{h+1}'}$$
$$=2(A_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}}+B_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\varphi_h'}{\lambda_h'}})\frac{\mu_h'}{\lambda_h'}\sin\varphi_h'\cos\varphi_h'$$
$$-(L_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}}+M_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\psi_h'}{\nu_h'}})\frac{\varrho_h'-2\mu_h'\sin^2\psi_h'}{\nu_h'}$$

$$h = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ m$$

Diese $4(m+1)$ Gleichungen bestimmen die $4(m+1)$ Grössen $B_0=S'$, $L_0=L$, $A_{m+1}=S_1$, $L_{m+1}=L_1$, A_1, B_1, L_1, $M_1\ \ldots\ A_m$, B_m, L_m, M_m durch $A_0=S$.

Durch die Substitution:

$$A_h+B_h=C_h,\quad A_h-B_h=iD_h,\quad L_h+M_h=E_h,\quad L_h-M_h=iF_h$$

Digitized by Google

$$\mu_h' = \varepsilon_h' \frac{\lambda_h'^2}{T^2}, \quad \varrho_h' = \varepsilon_h' \frac{\nu_h'^2}{T^2}$$

erhalten wir:

$$C_{h+1}\cos\varphi_{h+1}' + E_{h+1}\sin\psi_{h+1}'$$
$$= \left(C_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} + D_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)\cos\varphi_h'$$
$$+ \left(E_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'} + F_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)\sin\psi_h'$$

$$D_{h+1}'\sin\varphi_{h+1}' - F_{h+1}\cos\psi_{h+1}'$$
$$= \left(D_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} - C_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)\sin\varphi_h'$$
$$- \left(F_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'} - E_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)\cos\psi_h'$$

$$D_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin\varphi_{h+1}'(1-2\sin^2\varphi_{h+1}') + 2F_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}'\cos\psi_{h+1}'$$
$$= \left(D_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} - C_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h'(1-2\sin^2\varphi_h')$$
$$+2\left(F_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'} - E_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h'\cos\psi_h'$$

$$2C_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}'\cos\varphi_{h+1}' - E_{h+1}\varepsilon'_{h+1}(1-2\sin^2\varphi_{h+1}')\sin\varphi_{h+1}'$$
$$= 2\left(C_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} + D_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'}\right)\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h'\cos\varphi_h'$$
$$- \left(E_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'} + F_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\psi_h'}{\nu_h'}\right)\varepsilon_h'(1-2\sin^2\varphi_h')\sin\psi_h'$$

$$h = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ m$$

Setzen wir c_h unendlich klein und:

$$\alpha = 2\pi \sin\frac{\varphi_h'}{\lambda_h'} = 2\pi\sin\frac{\psi_h'}{\nu_h'}$$

so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$C_{h+1}\cos\varphi_{h+1}' + E_{h+1}\sin\psi_{h+1}' = (C_h + D_h\alpha c_h \operatorname{ctg}\varphi_h')\cos\varphi_h'$$
$$+ (E_h + F_h\alpha c_h \operatorname{ctg}\psi_h')\sin\psi_h'$$

$$D_{h+1}\sin\varphi_{h+1}' - F_{h+1}\cos\psi_{h+1}' = (D_h - C_h\alpha c_h \operatorname{ctg}\varphi_h')\sin\varphi_h'$$
$$-(F_h - E_h\alpha c_h \operatorname{ctg}\psi_h')\cos\psi_h'$$

$$D_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin\varphi'_{h+1}(1-2\sin^2\varphi_{h+1}') + 2F_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}'\cos\psi_{h+1}'$$
$$= (D_h - C_h\alpha c_h \operatorname{ctg}\varphi_h')\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h'(1-2\sin^2\varphi_h')$$
$$+2(F_h - E_h\alpha c_h \operatorname{ctg}\psi_h')\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h'\cos\psi_h'$$

Digitized by Google

$$2C_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}\cos\varphi_{h+1}'-E_{h+1}\varepsilon_{h+1}'(1-2\sin^2\varphi_{h+1}')\sin\psi_{h+1}'$$
$$=2(C_h+D_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi_p')\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h'\cos\varphi_h'$$
$$-(E_h+F_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\psi_h')\varepsilon_h'(1-2\sin^2\varphi_h')\sin\psi_h'$$

$$h=0,\quad 1,\quad 2\quad \ldots\quad m$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$C_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\cos\varphi_{h+1}'=(C_h+D_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi_h')(\varepsilon_{h+1}'-\Omega_h)\cos\varphi_h'$$
$$+(E_h+F_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\psi_h')(\varepsilon_{h+1}'-\varepsilon_h'-\Omega_h)\sin\psi_h'$$

$$D_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin\varphi_{h+1}'=(D_h-C_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi_h')(\varepsilon_h'+\Omega_h)\sin\varphi_h'$$
$$-(F_h-E_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\psi_h')\,\Omega_h\cos\psi_h'$$

$$E_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\sin\psi_{h+1}'=(C_h+D_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi_h')\,\Omega_h\cos\varphi_h'$$
$$+(E_h+F_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\psi_h')(\varepsilon_h'+\Omega_h)\sin\psi_h'$$

$$F_{h+1}\varepsilon_{h+1}'\cos\psi_{h+1}'=-(D_h-C_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi_h')(\varepsilon_{h+1}'-\varepsilon_h'-\Omega_h)\sin\varphi_h'$$
$$+(F_h-E_h\alpha c_h\operatorname{ctg}\psi_h')(\varepsilon_{h+1}'-\Omega_h)\cos\psi_h'$$

$$h=0,\quad 1,\quad 2\quad \ldots\quad m$$

Dabei ist gesetzt:

$$\Omega_h=2(\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}'-\varepsilon_h'\sin^2\varphi_h')$$

Da diese $4(m+1)$ Gleichungen die $4(m+1)$ Grössen C_1, D_1, E_1, $F_1\ \ldots\ C_{m+1}$, D_{m+1}, E_{m+1}, F_{m+1} durch C_0, D_0, E_0, F_0 bestimmen, setzen wir:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
C_h\cos\varphi_h' &= C_0 l_{1.h}\cos\varphi+D_0 l_{2.h}\sin\varphi+E_0 l_{3.h}\sin\psi+F_0 l_{4.h}\cos\psi\\
D_h\sin\varphi_h' &= C_0 m_{1.h}\cos\varphi+D_0 m_{2.h}\sin\varphi+E_0 m_{3.h}\sin\psi+F_0 m_{4.h}\cos\psi\\
E_h\sin\psi_h' &= C_0 p_{1.h}\cos\varphi+D_0 p_{2.h}\sin\varphi+E_0 p_{3.h}\sin\psi+F_0 p_{4.h}\cos\psi\\
F_h\cos\psi_h' &= C_0 q_{1.h}\cos\varphi+D_0 q_{2.h}\sin\varphi+E_0 q_{3.h}\sin\psi+F_0 q_{4.h}\cos\psi
\end{aligned}\right.$$

$$h=0,\quad 1,\quad 2\quad \ldots\quad m+1$$

Dadurch erhalten wir für die $l_{k,h}$, $m_{k,h}$, $p_{k,h}$, $q_{k,h}$ die Gleichungen:

$$\varepsilon_{h+1}'\,l_{k,h+1}=(l_{k,h}+\alpha c_h\,m_{k,h}\operatorname{ctg}^2\varphi_h')\,(\varepsilon_{h+1}'-\Omega)$$
$$-(p_{k,h}+\alpha c_h\,q_{k,h})\,(\varepsilon_{h+1}'-\varepsilon_h'-\Omega_h)$$

$$\varepsilon_{h+1}'\,m_{k,h+1}=(m_{k,h}-\alpha c_h l_{k,h})\,(\varepsilon_h'+\Omega_h)-(q_{k,h}-\alpha c_h p_{k,h}\operatorname{ctg}^2\psi_h')\,\Omega_h$$

$$\varepsilon_{h+1}'\,p_{k,h+1}=(l_{k,h}+\alpha c_h\,m_{k,h}\operatorname{ctg}^2\varphi_h')\,\Omega_h+(p_{k,h}+\alpha c_h\,q_{k,h})\,(\varepsilon_h'+\Omega_h)$$

$$\varepsilon_{h+1}'\,q_{k,h+1}=-(m_{k,h}-\alpha c_h\,l_{k,h})\,(\varepsilon_{h+1}'-\varepsilon_h'-\Omega_h)$$
$$+(q_{k,h}-\alpha c_h\,p_{k,h}\operatorname{ctg}^2\psi_h')\,(\varepsilon_{h+1}'-\Omega_h)$$

$$k=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\qquad h=0,\quad 1,\quad 2\quad \ldots\quad m$$

Digitized by Google

Diese Gleichungen zusammen mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{array}{llll} l_{1,0} = 1, & l_{2,0} = 0, & l_{3,0} = 0, & l_{4,0} = 0 \\ m_{1,0} = 0, & m_{2,0} = 1, & m_{3,0} = 0, & m_{4,0} = 0 \\ p_{1,0} = 0, & p_{2,0} = 0, & p_{3,0} = 1, & p_{4,0} = 0 \\ q_{1,0} = 0, & q_{2,0} = 0, & q_{3,0} = 0, & q_{4,0} = 1 \end{array}$$

welche sich aus den Gleichungen (19) für $h = 0$ ergeben, bestimmen alle Grössen $l_{k,h}$, $m_{k,h}$, $p_{k,h}$, $q_{k,h}$.

Wenn wir setzen

$$l_{k,m+1} = l_k, \quad m_{k,m+1} = m_k, \quad p_{k,m+1} = p_k, \quad q_{k,m+1} = q_k$$

und ferner berücksichtigen, dass

$$\begin{array}{llll} C_0 = S + S', & D_0 = -i(S - S'), & E_0 = L, & F_0 = -iL \\ C_{m+1} = S_1, & D_{m+1} = -iS_1, & E_{m+1} = L_1, & F_{m+1} = -iL_1 \end{array}$$

so folgt aus den Gleichungen (19) für $k = m + 1$:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 \cos\varphi_1 &= (S + S')\, l_1 \cos\varphi - i(S - S')\, l_2 \sin\varphi \\ &\quad + L(l_3 \sin\psi - il_4 \cos\psi) \\ -iS_1 \sin\varphi_1 &= (S + S')\, m_1 \cos\varphi - i(S - S')\, m_2 \sin\varphi \\ &\quad + L(m_3 \sin\psi - i\, m_4 \cos\psi) \\ L_1 \sin\psi_1 &= (S + S')\, p_1 \cos\varphi - i(S - S')\, p_2 \sin\varphi \\ &\quad + L(p_3 \sin\psi - ip_4 \cos\psi) \\ -iL_1 \cos\psi_1 &= (S + S')\, q_1 \cos\varphi - i(S - S')\, q_2 \sin\varphi \\ &\quad + L(q_3 \sin\psi - iq_4 \cos\psi) \end{aligned} \right.$$

In diesen vier Gleichungen sind die Grössen S', S_1, L und L_1 noch unbestimmt. Denn S und φ sind durch die Natur des einfallenden Lichtes gegeben. Die Grössen φ_1, ψ und ψ_1 werden durch die Gleichungen (18) und (18a) und die Grössen l_k, m_k, p_k und q_k durch obenstehende Gleichungen bestimmt. Jetzt müssen wir aber auch L und L_1 durch die Tatsache bestimmen, dass longitudinale Wellen im ersten und zweiten Medium nicht auftreten dürfen. Es ist:

$$\sin\psi = \sin\varphi \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} \qquad \sin\psi_1 = \sin\varphi \sqrt{\frac{\varrho_1 \varepsilon}{\mu\, \varepsilon_1}}$$

Die Dichtigkeiten ε und ε_1 sind ihrer Bedeutung nach endliche, positive Grössen. Auf Grund gewisser Untersuchungen der Elasticitätstheorie müssen wir auch die Elasticitätsconstanten ϱ, μ, ϱ_1 und μ_1

Digitized by Google

positiv setzen. Sobald wir also nicht ϱ und ϱ_1 unendlich gross annehmen, erhalten wir:

$$\sin\psi < 1 \text{ und reell}, \qquad \sin\varphi_1 < 1 \text{ und reell}$$

für alle Werte:

$$\sin\varphi < \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}, \qquad \sin\varphi < \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_1}{\varrho_1\varepsilon}}$$

Damit für diese Werte von φ die longitudinalen Wellen im ersten und zweiten Medium verschwinden, müssen wir setzen:

$$L = 0, \qquad L_1 = 0$$

Dann sind aber diese Functionen gleich null für alle Werte von φ, weil sie für ein endliches Intervall von φ den Wert null haben. Denn wir müssen offenbar annehmen, dass L und L_1 endliche und stetige Functionen von φ sind. Demnach verwandeln sich die Gleichungen (20) in

$$S_1 = (S+S_1)l_1\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} - i(S-S')l_2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}$$

$$-iS_1 = (S+S')m_1\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1} - i(S-S')m_2\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}$$

$$0 = (S+S')p_1\cos\varphi - i(S-S')p_2\sin p$$

$$0 = (S+S')q_1\cos\varphi - i(S-S')q_2\sin\varphi$$

Aus den zwei ersten dieser Gleichungen folgt:

$$0 = (S+S')\left(\frac{il_1}{\cos\varphi_1}+\frac{m_1}{\sin\varphi_1}\right)\cos\varphi - i(S-S')\left(\frac{il_2}{\cos\varphi_1}+\frac{m_2}{\sin\varphi_1}\right)\sin\varphi$$

Diese Gleichung kann mit den beiden letzten von den vier Gleichungen nur dann zusammen bestehen, wenn die Bedingungen erfüllt werden:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir jetzt

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M} = l_1\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}, \quad \mathrm{N} = -l_2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1} \\ &\mathrm{M}' = m_1\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}, \quad \mathrm{N}' = m_2\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

so erhalten wir zur Bestimmung der Grössen S' und S_1 die früheren Gleichungen:

$$(9) \quad S_1 = M(S+S')+iN(S-S') = M'(S+S')+N'(S-S')$$

Um die Grössen $l_1 \,.\,.\, l_4$, $m_1 \,.\,.\, m_4$, $p_1 \,.\,.\, p_4$, $q_1 \,.\,.\, q_4$ zu bestimmen, nehmen wir die Anzahl m der Uebergangsschichten zwischen den beiden Medien unendlich gross, die Dicke einer jeden unendlich dünn und setzen die Dicke aller Schichten zusammen:

$$c_1+c_2+c_3+ \;\ldots\; c_m = c$$

ferner:

$$c_1+c_2+c_3+ \;\ldots\; c_{h-1} = z, \qquad c_h = dz$$

dann können wir die Grössen:

$$\varepsilon_h', \quad \varphi_h', \quad \psi_h', \quad l_{k,h}, \quad m_{k,h}, \quad p_{k,h}, \quad q_{k,h}$$

für das Intervall $z=0$ bis $z=c$ als stetige Functionen von z betrachten. Wir wollen dieselben

$$\varepsilon', \quad \varphi', \quad \psi', \quad l_k', \quad m_k', \quad p_k', \quad q_k'$$

nennen. Es wird:

$$\varepsilon_{h+1} = \varepsilon'+d\varepsilon', \quad l_{k,h+1} = l_k'+dl_k', \quad m_{k,h+1} = m_k'+dm_k'$$
$$p_{k,h+1} = p_k'+dp_k', \quad q_{k,h+1} = q_k'+dq_k', \quad \Omega_h = 2d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi'.$$

Dadurch verwandeln sich die früheren Gleichungen, welche zur Bestimmung der Grössen $l_{k,h}$, $m_{k,h}$, $p_{k,h}$ und $q_{k,h}$ dienen, in

$$d\,.\,\varepsilon' l_k' = l_k' d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi')+\alpha\varepsilon' m_k'\operatorname{ctg}^2\varphi'\,dz+p_k' d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi')$$
$$d\,.\,\varepsilon' m_k' = 2m_k' d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi' - \alpha\varepsilon' l_k'\,dz - 2q_k' d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi'$$
$$d\,.\,\varepsilon' p_k' = 2l_k' d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi'+2p_k' d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi'+\alpha\varepsilon' q_k'\,dz$$
$$d\,.\,\varepsilon' q_k' = -m_k' d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi')+q_k' d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi')-\alpha\varepsilon p_k'\operatorname{ctg}^2\psi'\,dz$$
$$k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{d(m_k'-q_k')}{dz} = \alpha(p_k'\operatorname{ctg}^2\psi'-l_k')$$

$$\frac{d(l_k'+p_k')}{dz} = \alpha(m_k'\operatorname{ctg}^2\varphi'+q_k')$$

$$\frac{d\,.\,\varepsilon'\{m_k'(1-2\sin^2\varphi'+2q_k'\sin^2\varphi'\}}{dz} = -\alpha\varepsilon'\{l_k'(1-2\sin^2\varphi') + 2p_k'\sin^2\varphi'\operatorname{ctg}^2\psi'\}$$

$$\frac{d\,.\,\varepsilon'\{2l_k'\sin^2\varphi'-p_k'(1-2\sin^2\varphi')\}}{dz} = \alpha\varepsilon'\{2m_k'\cos^2\varphi'-q_k'(1-2\sin^2\varphi'\}$$
$$k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4$$

Digitized by Google

Setzen wir:

$$m_k' - q_k' = X_k', \quad m_k'(1-2\sin^2\varphi') + 2q_k'\sin^2\varphi' = V_k'$$
$$l_k' + p_k' = U_k', \quad 2l_k'\sin^2\varphi' - p_k'(1-2\sin^2\varphi') = W_k'$$
$$k = 1, \ 2, \ 3, \ 4$$

so gelten für die X_k', U_k', V_k', W_k' die Differentialgleichungen:

$$(23) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dz} = -\alpha\left\{U\left(1-\dfrac{2\sin^2\varphi'}{\sin^2\psi'}\right)+\dfrac{W}{\sin^2\psi'}\right\} \\ \dfrac{dU}{dz} = \alpha\left(X+\dfrac{V}{\sin^2\varphi'}\right) \\ \dfrac{d.\varepsilon' V}{dz} = -\alpha\varepsilon'\left\{W\left(1-\dfrac{2\sin^2\varphi'}{\sin^2\psi'}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + U\left(1-4\sin^2\varphi'+\dfrac{4\sin^4\varphi'}{\sin^2\psi'}\right)\right\} \\ \dfrac{d.\varepsilon' W}{dz} = \alpha\varepsilon'(X+V) \end{cases}$$

mit den Bedingungen für $z=0$:

$$\begin{array}{lll} X_1' = 0, & X_2' = 1, & X_3' = 0 \\ U_1' = 1, & U_2' = 0, & U_3' = 1 \\ V_1' = 0, & V_2' = 1-2\sin^2\varphi, & V_3' = 0 \\ W_1' = 2\sin^2\varphi, & W_2' = 0, & W_3' = -(1-2\sin^2\varphi) \end{array}$$

$$X_4' = -1$$
$$U_4' = 0$$
$$V_4' = 2\sin^2\varphi$$
$$W_4' = 0$$

Wir wollen aber X_k, U_k, V_k, W_k als particuläre Lösungen der Differentialgleichungen (23) nehmen mit folgenden Bedingungen für $z=0$:

$$(24) \quad \begin{cases} X_1 = 1, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & X_4 = 0 \\ U_1 = 0, & U_2 = 1, & U_3 = 0, & U_4 = 0 \\ V_1 = 0, & V_2 = 0, & V_3 = 1, & V_4 = 0 \\ W_1 = 0, & W_2 = 0, & W_3 = 0, & W_4 = 1 \end{cases}$$

Dann wird:

$$\begin{array}{ll} X_1' = X_2 + 2X_4\sin^2\varphi, & X_2' = X_1 + X_3(1-2\sin^2\varphi) \\ U_1' = U_2 + 2U_4\sin^2\varphi, & U_2' = U_1 + U_3(1-2\sin^2\varphi) \\ V_1' = V_2 + 2V_4\sin^2\varphi, & V_2' = V_1 + V_3(1-2\sin^2\varphi) \\ W_1' = W_2 + 2W_4\sin^2\varphi, & W_2' = W_1 + W_3(1-2\sin^2\varphi) \end{array}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
X_3' &= X_2 - X_4(1-2\sin^2\varphi), & X_4' &= -X_1 + 2X_3\sin^2\varphi \\
U_3' &= U_2 - U_4(1-2\sin^2\varphi), & U_4' &= -U_1 + 2U_3\sin^2\varphi \\
V_3' &= V_2 - V_4(1-2\sin^2\varphi), & V_4' &= -V_1 + 2V_3\sin^2\varphi \\
W_3' &= W_2 - W_4(1-2\sin^2\varphi), & W_4' &= -W_1 + 2W_3\sin^2\varphi
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen und denjenigen auf Seite 357 folgt:

$$
(25)\quad\left\{
\begin{aligned}
l_1' &= \{U_2+2U_4\sin^2\varphi\}(1-2\sin^2\varphi')+\{W_2+2W_4\sin^2\varphi\} \\
l_2' &= \{U_1+U_3(1-2\sin^2\varphi)\}(1-2\sin^2\varphi') \\
&\qquad +\{W_1+W_3(1-2\sin^2\varphi)\} \\
l_3' &= \{U_2-U_4(1-2\sin^2\varphi)\}(1-2\sin^2\varphi') \\
&\qquad +\{W_2-W_4(1-2\sin^2\varphi)\} \\
l_4' &= \{-U_1+2U_3\sin^2\varphi\}(1-2\sin^2\varphi')+\{-W_1+2W_3\sin^2\varphi\} \\
m_1' &= \{X_2+2X_4\sin^2\varphi\}2\sin^2\varphi'+\{V_2+2V_4\sin^2\varphi\} \\
m_2' &= \{X_1+X_3(1-2\sin^2\varphi)\}2\sin^2\varphi'+\{V_1+V_3(1-2\sin^2\varphi)\} \\
m_3' &= \{X_2-X_4(1-2\sin^2\varphi)\}2\sin^2\varphi'+\{V_2-V_4(1-2\sin^2\varphi)\} \\
m_4' &= \{-X_1+2X_3\sin^2\varphi'\}+\{-V_1+2V_3\sin^2\varphi\} \\
p_1' &= \{U_2+2U_4\sin^2\varphi\}2\sin^2\varphi'-\{W_2+2W_4\sin^2\varphi\} \\
p_2' &= \{U_1+U_3(1-2\sin^2\varphi)\}2\sin^2\varphi'-\{W_1+W_3(1-2\sin^2\varphi)\} \\
p_3' &= \{U_2-U_4(1-2\sin^2\varphi)\}2\sin^2\varphi'-\{W_2-W_4(1-2\sin^2\varphi)\} \\
p_4' &= \{-U_1+2U_3\sin^2\varphi\}2\sin^2\varphi'-\{-W_1+2W_3\sin^2\varphi\} \\
q_1' &= -\{X_2+2X_4\sin^2\varphi\}(1-2\sin^2\varphi')+\{V_2+2V_4\sin^2\varphi\} \\
q_2' &= -\{X_1+X_3(1-2\sin^2\varphi)\}(1-2\sin^2\varphi') \\
&\qquad +\{V_1+V_3(1-2\sin^2\varphi)\} \\
q_3' &= -\{X_2-X_4(1-2\sin^2\varphi)\}(1-2\sin^2\varphi') \\
&\qquad +\{V_2-V_4(1-2\sin^2\varphi)\} \\
q_4' &= -\{-X_1+2X_3\sin^2\varphi\}(1-2\sin^2\varphi')+\{-V_1+2V_3\sin^2\varphi\}
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen liefern für $z=c$ die Werte l_1, l_2 u. s. w., ausgedrückt durch $\overline{X_k}$, $\overline{U_k}$, $\overline{V_k}$, $\overline{W_k}$. Letztere Grössen werden durch die Differentialgleichungen (23) und die Grenzgleichungen (24) bestimmt. Wir erhalten ans den Differentialgleichungen:

$$X = X_0 - \alpha\int_0^z \left\{ U\left(1-\frac{2\sin^2\varphi'}{\sin^2\psi'}\right)+\frac{W}{\sin^2\psi'}\right\} dz$$

$$U = U_0 + \alpha\int_0^z \left(X+\frac{V}{\sin^2\varphi'}\right) dz$$

Digitized by Google

$$\varepsilon' V = \varepsilon V_0 - \alpha \int_0^z \varepsilon' \left\{ W \left(1 - \frac{2\sin^2\varphi'}{\sin^2\psi'}\right) + U\left(1 - 4\sin^2\varphi' + \frac{4\sin^4\varphi'}{\sin^2\psi'}\right)\right\} dz$$

$$\varepsilon' W = \varepsilon W_0 + \alpha \int_0^z \varepsilon'(X + V) dz$$

Dabei bezeichnen X_0, U_0, V_0, W_0 die Werte bezüglich von X_k, U_k, V_k, W_k für $z = 0$. Indem wir auf diese Gleichungen dasselbe Verfahren anwenden wie früher auf die Gleichungen für Z und Y [Seite 349], ergiebt sich:

(26)

$$X_1 = 1 - \alpha^2 \int_0^z \int_0^{z_2} \left\{1 - \frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'} + \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2' \sin^2\psi_2'}\right\} dz_2 dz_1$$

[illegible]

$$-\frac{2\sin^2\varphi_2'(\varepsilon_1'-2\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2')}{\sin^2\psi_2'}\Big\} dz_2\,dz_1$$

$$+\alpha^4\int_0^z\int_0^{z_4}\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Big\{\Big[\varepsilon_1'+\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')+\varepsilon_3'$$

$$-\frac{2\sin^2\varphi_2'(\varepsilon_1'-2\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'+\varepsilon_3')}{\sin^2\psi_2'}+\frac{\varepsilon_1'\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}\Big]\times$$

$$\times\Big(1-\frac{2\sin^2\varphi_4'}{\sin^2\psi_4'}\Big)+\varepsilon_4'\Big[1-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}+\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}$$

$$+\frac{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}-\frac{2\sin^2\varphi_2'(\varepsilon_1'-2\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2')}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_2'\sin^2\varphi_3'}\Big]\times$$

$$\times\Big(1-4\sin^2\varphi_4'+\frac{4\sin^4\varphi_4'}{\sin^4\psi_4'}\Big)\Big\} dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_1-\ldots$$

(26)

$$\varepsilon' W_1=\alpha\int_0^z\varepsilon_1'dz_1-\alpha^3\int_0^z\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Big\{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')+\varepsilon_3'$$

$$-\frac{2\sin^2\varphi_2'(\varepsilon_1'-2\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'+\varepsilon_3')}{\sin^2\psi_2'}+\frac{\varepsilon_1'\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\sin\psi_2'}\Big\} dz_3 dz_2 dz_1+\ldots$$

$$X_2=-\alpha\int_0^z\Big(1-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}\Big)dz_1$$

$$+\alpha^3\int_0^z\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Big\{\Big[1-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_1'\sin^4\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\Big]\Big(1-\frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\Big)$$

$$+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_3'}+\frac{2\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2')}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'}\Big\}$$

$$dz_3 dz_2 dz_1-\ldots$$

$$U_2=1-\alpha^2\int_0^z\int_0^{z_2}\Big\{1-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_1'\sin^4\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\Big\} dz_2\,dz_1$$

$$+\alpha^4\int_0^z\int_0^{z_4}\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Big\{\Big[1-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}$$

Digitized by Google

$$+\frac{4\varepsilon_1'\sin^4\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_1{}^2}\Bigg]\Bigg[1-\frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}+\frac{\varepsilon_3'(1-4\sin^2\varphi_3')}{\varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_3'\sin^4\varphi_3'}{\varepsilon_4'\sin^2\psi_3'\sin^2\varphi_4'}\Bigg]+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_3'}$$

$$+\frac{2\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2')}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_3'}$$

$$+\left[\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'+\frac{2\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2')}{\sin^2\psi_1'}\right]\times$$

$$\times\frac{\sin^2\psi_3'-2\sin^2\varphi_3'}{\varepsilon_4'\sin^2\psi_3'\sin^2\varphi_4'}\Bigg\}dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_1-\ldots$$

(26)

$$\varepsilon' V_2=-\alpha\int_0^z\varepsilon_1'\left(1-4\sin^2\varphi_1'+\frac{4\sin^4\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}\right)dz_1$$

$$+\alpha^3\int_0^z\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Bigg\{\Bigg[\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'$$

$$+\frac{2\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2')}{\sin^2\psi_1'}\Bigg]\left(1-\frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right)$$

$$+\varepsilon_3'\Bigg[1-\frac{2\sin^4\varphi_1'}{\sin^2\psi_2'}+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_1'\sin^4\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_1'}\Bigg]\left(1-4\sin^2\varphi_3'+\frac{4\sin^4\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right)\Bigg\}dz_3dz_2dz_1-\ldots$$

$$\varepsilon' W_2=-\alpha^2\int_0^z\int_0^{z_2}\Bigg\{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'$$

$$+\frac{2\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2')}{\sin^2\psi_1'}\Bigg\}dz_2\,dz_1$$

$$+\alpha^4\int_0^z\int_0^{z_4}\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Bigg\{\Bigg[\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'+\varepsilon_4'$$

$$+\frac{2\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2'-\varepsilon_4')}{\sin^2\varphi_1'}+\frac{\varepsilon_1'\varepsilon_4'(1-4\sin^2\varphi_1')}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_1'\varepsilon_4'\sin^4\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\Bigg]\left(1-\frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right)$$

$$+\varepsilon_3'\Bigg[1-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}+\frac{\varepsilon_1'(1-4\sin^2\varphi_1')}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_1'\sin^4\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\Bigg]\left(1-4\sin^2\varphi_3'+\frac{4\sin^4\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right)$$

Digitized by Google

$$+\frac{\varepsilon_1'\varepsilon_4(1-4\sin^2\varphi_1')+\varepsilon_2'\varepsilon_4'}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_3'}$$

$$+\frac{2\varepsilon_4'\sin^2\varphi_1'(2\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'-\varepsilon_2')}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'}\Big\}\,dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_1-\dots$$

(26)

$$\frac{1}{\varepsilon}X_3=-\alpha^2\int_0^z\int_0^{z_2}\Big\{\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}$$

$$-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'}\Big\}\,dz_2\,dz_1+$$

$$+\alpha^4\int_0^z\int_0^{z_4}\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Big\{\Big[\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}\Big(\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}\Big)$$

$$+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_3')}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\varphi_1'\sin^2\varphi_3'}+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\varphi_2'\sin^2\psi_2'\sin^2\varphi_3'}\Big]\times$$

$$\times\Big(1-\frac{2\sin^2\varphi_4'}{\sin^2\psi_4'}\Big)+\frac{1}{\varepsilon_4'\sin^2\psi_4'}+\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_4'\sin^2\psi_2'\sin^2\psi_4'}$$

$$+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')+\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'\varepsilon_4'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_4'}+\frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\varepsilon_4'\sin^2\psi_2'\sin^2\psi_4'}+$$

$$+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'-2\varepsilon_3'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_4'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'\sin^2\psi_4'}\Big\}\,dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_1-\dots$$

$$\frac{1}{\varepsilon}U_3=\alpha\int_0^z\frac{dz_1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}-\alpha^3\int_0^z\int_0^{z_3}\int_0^{z_2}\Big\{\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}\Big(\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}\Big)+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\varphi_1'\sin^2\varphi_3'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'\sin^2\varphi_3'}\Big\}\,dz_3\,dz_2\,dz_1+\dots$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}V_3=1-\alpha^2\int_0^z\int_0^{z_2}\Big\{1-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}$$

$$+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'}\Big\}\,dz_2\,dz_1$$

Digitized by Google

$$+\alpha^4\int\limits_0^z\int\limits_0^{z_4}\int\limits_0^{z_3}\int\limits_0^{z_2}\left\{\left[1-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')+\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'-2\varepsilon_3'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'}\right]\left(1-\frac{2\sin^2\varphi_4'}{\sin^2\psi_4'}\right)$$

$$+\varepsilon_4'\left[\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}\right)+$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\varphi_1'\sin^2\varphi_3'}+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'\sin^2\varphi_3'}\right]\times$$

$$\left.\times\left(1-4\sin^2\varphi_4'+\frac{4\sin^4\varphi_4'}{\sin^2\psi_4'}\right)\right\}dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_2-\dots$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}W_3=\alpha\int\limits_0^z dz_1-\alpha^3\int\limits_0^z\int\limits_0^{z_1}\int\limits_0^{z_2}\left\{1-\frac{2\sin^2\varphi_2'}{\sin^2\psi_2'}\right.$$

(26) $$+\frac{\varepsilon_2'(1-4\sin^2\varphi_2')+\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}+\frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_2'}$$

$$\left.+\frac{4\varepsilon_2'\sin^4\varphi_2'-2\varepsilon_3'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'\sin^2\psi_2'}\right\}dz_3\,dz_2\,dz_1+\dots$$

$$\frac{1}{\varepsilon}X_4=-\alpha\int\limits_0^z\frac{dz_1}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}+\alpha^3\int\limits_0^z\int\limits_0^{z_3}\int\limits_0^{z_2}\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\right]\left(1-\frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_3'}-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'}$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'}\right\}dz_3\,dz_2\,dz_1-\dots$$

$$\frac{1}{\varepsilon}U_4=-\alpha^2\int\limits_0^z\int\limits_0^{z_2}\left\{\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}\right.$$

$$\left.-\frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\right\}dz_2\,dz_1$$

$$+\alpha^4\int\limits_0^z\int\limits_0^{z_4}\int\limits_0^{z_3}\int\limits_0^{z_2}\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}+\frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}\right.\right.$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
& - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\Bigg]\Bigg(1 - \frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'} + \frac{\varepsilon_3'(1-4\sin^2\varphi_3')}{\varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'} \\
& + \frac{4\varepsilon_3'\sin^4\varphi_3'}{\varepsilon_4'\sin^2\psi_3'\sin^2\varphi_4'}\Bigg) + \frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_3'} - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'} \\
& + \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'} + \left[1 - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'} + \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}\right] \times \\
& \times \left(\frac{1}{\varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'} - \frac{2\sin^2\varphi_3'}{\varepsilon_4'\sin\psi_3'\sin^2\varphi_4'}\right)\Bigg\} dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1 - \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} V_4 = & -\alpha \int_0^z \left\{1 - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'}\right\} dz_1 \\
& + \alpha_3 \int_0^z\int_0^{z_3}\int_0^{z_2} \Bigg\{\left[1 - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'} + \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}\right]\left(1 - \frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right) \\
& + \left[\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'} + \frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\right] \times \\
& \times \varepsilon_3'\left(1 - 4\sin^2\varphi_3' + \frac{4\sin^4\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right)\Bigg\} dz_3\, dz_2\, dz_1 - \dots
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} W_4 = & \; 1 - \alpha^2 \int_0^z\int_0^{z_2} \left\{1 - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'} + \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'}\right\} dz_2\, dz_1 \\
& + \alpha^4 \int_0^z\int_0^{z_4}\int_0^{z_3}\int_0^{z_2} \Bigg\{\Bigg[1 - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\sin^2\psi_1'} + \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_4'}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'} \\
& + \frac{\varepsilon_4'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} - \frac{2\varepsilon_4'\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\Bigg]\left(1 - \frac{2\sin^2\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right) \\
& + \left[\frac{1}{\varepsilon_1'\sin^2\psi_1'} + \frac{1}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\psi_1'\sin^2\varphi_2'}\right] \times \\
& \times \varepsilon_3'\left(1 - 4\sin^2\varphi_3' + \frac{4\sin^4\varphi_3'}{\sin^2\psi_3'}\right) \\
& + \Bigg[\frac{1}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_3'} - \frac{2\sin^2\varphi_1'}{\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'} \\
& + \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'\varepsilon_3'\sin^2\psi_1'\sin^2\psi_3'}\Bigg]\varepsilon_4'\Bigg\} dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1 - \dots
\end{aligned}
$$

Um die Ausdrücke für l_1, l_2 . . . , welche aus den Gleichungen (25) folgen, zu vereinfachen, leiten wir aus den Differentialgleichungen (23) einige Relationen ab Sind X_h, U_h, V_h, W_h und X_k, U_k, V_k,

Digitized by Google

W_k zwei beliebige Systeme von particulären Lösungen dieser Differentialgleichungen, so ist:

$$\varepsilon'\left(W_k\frac{dX_h}{dz}-W_h\frac{dX_k}{dz}\right)=-\alpha\varepsilon'(W_kU_h-W_hU_k)\left(1-\frac{2\sin^2\varphi'}{\sin^2\psi'}\right)$$
$$=U_h\frac{d.\varepsilon'V_k}{dz}-U_k\frac{d.\varepsilon'V_h}{dz}$$

$$\varepsilon'\left(V_k\frac{dU_h}{dz}-V_h\frac{dU_k}{dz}\right)=\alpha\varepsilon'(V_kX_h-V_hX_k)=X_h\frac{d.\varepsilon'W_k}{dz}$$
$$-X_k\frac{d.\varepsilon'W_h}{dz}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{dz}\left\{\begin{vmatrix}X_h & X_k\\ \varepsilon'W_h & \varepsilon'W_k\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_h & U_k\\ \varepsilon'V_h & \varepsilon'V_k\end{vmatrix}\right\}=0$$

und hieraus:

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ W_1 & W_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{vmatrix}=0,\\
&\begin{vmatrix}X_1 & X_3\\ W_1 & W_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_1 & U_3\\ V_1 & V_3\end{vmatrix}=0\\
&\begin{vmatrix}X_1 & X_4\\ W_1 & W_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_1 & U_4\\ V_1 & V_4\end{vmatrix}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\\
&\begin{vmatrix}X_2 & X_3\\ W_2 & W_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_2 & U_3\\ V_2 & V_3\end{vmatrix}=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\\
&\begin{vmatrix}X_2 & X_4\\ W_2 & W_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_2 & U_4\\ V_2 & V_4\end{vmatrix}=0\\
&\begin{vmatrix}X_3 & X_4\\ W_3 & W_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}U_3 & U_4\\ V_3 & V_4\end{vmatrix}=0
\end{aligned}\right.$$

denn X_1, X_2 . . . müssen den Anfangsbedingungen (24) genügen.

Indem wir diese Gleichungen auf beiden Seiten mit geeigneten Determinanten multipliciren und dann addiren [1]), erhalten wir die vier ersten von den folgenden Gleichungen:

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}X_1 & X_4\\ U_1 & U_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}X_2 & X_3\\ U_2 & U_3\end{vmatrix}=0,\\
&\begin{vmatrix}X_1 & X_4\\ V_1 & V_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}X_2 & X_3\\ V_2 & V_3\end{vmatrix}=0
\end{aligned}\right.$$

1) Vergl. Von der Mühll, Math. Ann., V., S. 525.

Digitized by Google

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} U_1 & U_4 \\ W_1 & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ W_2 & W_3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} V_1 & V_4 \\ W_1 & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ W_2 & W_3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ W_1 & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ W_2 & W_3 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \\
&\begin{vmatrix} U_1 & U_4 \\ V_1 & V_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}
\end{aligned}
\right.
$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben sich auf folgende Weise: Wir multipliciren die dritte Gleichung mit ε' und differentiiren:

$$
U_1 \frac{d.\varepsilon' W_4}{dz} + \varepsilon' W_4 \frac{dU_1}{dz} - U_4 \frac{d\ \varepsilon' W_1}{dz} - \varepsilon' W_1 \frac{dU_4}{dz}
$$

$$
- \left(U_2 \frac{d.\varepsilon' W_3}{dz} + \varepsilon' W_3 \frac{dU_2}{dz} - U_3 \frac{d.\varepsilon' W_2}{dz} - \varepsilon' W_2 \frac{dU_3}{dz} \right) = 0
$$

Mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen (23) und auf die erste und vierte der Gleichungen (28) können wir diese Gleichung ersetzen durch:

$$
\begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ W_1 & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ W_2 & W_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1 & U_4 \\ V_1 & V_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} = 0
$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (27) folgt:

$$
\begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ W_1 & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ W_2 & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_1 & U_4 \\ V_1 & V_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} = 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}
$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen können durch die oben gewünschten ersetzt werden.

Aus den Gleichungen (27) und (28) folgen:

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} l_1' & l_2' \\ m_1' & m_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1' & p_2' \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad
\begin{vmatrix} l_1' & l_3' \\ m_1' & m_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2' & p_3' \\ q_1' & q_3' \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} l_1' & l_4' \\ m_1' & m_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1' & p_4' \\ q_1' & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} l_2' & l_3' \\ m_2' & m_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2' & p_3' \\ q_2' & q_3' \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} l_2' & l_4' \\ m_2' & m_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2' & p_4' \\ q_2' & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} l_3' & l_4' \\ m_3' & m_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3' & p_4' \\ q_3' & q_4' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} l_1' & l_2' \\ m_1' & m_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_3' & l_3' \\ m_3' & m_4' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad
\begin{vmatrix} l_1' & l_2' \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_3' & l_4' \\ p_3' & p_4' \end{vmatrix} = 0 \\
&\begin{vmatrix} l_1' & l_2' \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_3' & l_4' \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} m_1' & m_2' \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3' & m_4' \\ p_3' & p_4' \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Digitized by Google

$$(30)\quad \left\{ \begin{vmatrix} m_1' & m_2' \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_3' & m_4' \\ q_3' & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p_1' & p_2' \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3' & p_4' \\ q_3' & q_4' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right.$$

Nehmen wir diese Gleichungen für $z = c$ und verbinden mit ihnen die Gleichungen (21), so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}, \quad \begin{vmatrix} p_3 & p_4 \\ q_3 & q_4 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}, \quad \begin{vmatrix} l_3 & l_4 \\ m_3 & m_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} l_3 & l_4 \\ p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} l_3 & l_4 \\ q_3 & q_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m_3 & m_4 \\ p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_3 & m_4 \\ q_3 & q_4 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichungen, die Relationen (21) und die für $z = c$ genommenen Gleichungen (29) und (30) können wir ersetzen durch

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{l} l_3 = 0, \quad l_4 = 0, \quad m_3 = 0, \quad m_4 = 0 \\ p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}, \quad \begin{vmatrix} p_3 & p_4 \\ q_3 & q_4 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \end{array} \right.$$

Auf Grund dieser Relationen erhalten wir aus den Gleichungen (25):

(32)

$$l_1 = U_2 + 2U_4\sin^2\varphi - U_4(1 - 2\sin^2\varphi_1) \text{ [illegible] } W_4$$

[illegible]

$$l_2 = U_1 + U_3(1 - 2\sin^2\varphi_1) \text{ [illegible] } W_4$$

[illegible]

$$m_1 = X_2 - 2X_4\sin^2\varphi \text{ [illegible]}$$

[illegible]

m_2 [illegible]

[illegible]

$$
\left\{
\begin{aligned}
p_3 &= \bar{U}_2 - \bar{U}_4(1-2\sin^2\varphi) = -2\bar{U}_4\sin^2\varphi_1 + \bar{W}_4 \\
&= -\frac{\bar{W}_2 - \bar{W}_4(1-2\sin^2\varphi)}{1-2\sin^2\varphi_1} = \frac{2\bar{U}_2\sin^2\varphi_1 - \bar{W}_2}{2\sin^2\varphi} \\[2ex]
p_4 &= -\bar{U}_1 + 2\bar{U}_3\sin^2\varphi = 2\bar{U}_3\sin^2\varphi_1 - \bar{W}_3 \\
&= \frac{\bar{W}_1 - 2\bar{W}_3\sin^2\varphi}{1-2\sin^2\varphi_1} = \frac{-2\bar{U}_1\sin^2\varphi_1 + \bar{W}_1}{1-2\sin^2\varphi} \\[2ex]
q_3 &= -\bar{X}_2 + \bar{X}_4(1-2\sin^2\varphi) = \bar{X}_4(1-2\sin^2\varphi_1) - \bar{V}_4 \\
&= \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_4(1-2\sin^2\varphi)}{2\sin^2\varphi_1} = \frac{-\bar{X}_2(1-2\sin^2\varphi_1) + \bar{V}_2}{2\sin^2\varphi} \\[2ex]
q_4 &= \bar{X}_1 - 2\bar{X}_3\sin^2\varphi = \bar{X}_3(1-2\sin^2\varphi_1) + \bar{V}_3 \\
&= \frac{-\bar{V}_1 + 2\bar{V}_3\sin^2\varphi}{2\sin^2\varphi_1} = \frac{\bar{X}_1(1-2\sin^2\varphi_1) - \bar{V}_1}{1-2\sin^2\varphi}
\end{aligned}
\right. \tag{32}
$$

c. Vergleichung der Formeln mit den Tatsachen der Beobachtung.

Um unsere Formeln mit den Tatsachen der Beobachtung zu vergleichen, müssen wir zur Darstellung der Aetherschwingungen statt der bisherigen, complexen Ausdrücke die reellen — oder imaginären — Teile derselben wählen[1]) und zusehen, ob die so gefundenen Werte sich mit denjenigen, welche die Erfahrung liefert, in Einklang bringen lassen. Die Erfahrung fordert, dass erfüllt sei:

I. Das Brechungsgesetz von Descartes ist:

$$\sin\varphi = n\sin\varphi_1; \quad n \gtrless 1$$

bezeichnet eine von der Beschaffenheit der beiden Medien abhängige, positive Constante.

II. Die Intensität des einfallenden Lichtes ist gleich der Summe der Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes.

III. Bei partieller Reflexion eines geradlinig polarisirten Strahles ist das reflectirte und gebrochene Licht geradlinig polarisirt, aber unter einem anderen Azimuthe als das einfallende Licht.

---

1) Vergl. Von der Mühll, Math. Ann. V. S. 495 etc.

Digitized by Google

Bei totaler Reflexion eines geradlinig polarisirten Strahles ist der reflectirte Strahl im allgemeinen elliptisch polarisirt.

Indem man die lebendige Kraft für ein rechtwinkliges, von zwei einfallenden Wellenebenen begrenztes Parallelepipedon berechnet und ebenso für die entsprechenden gespiegelten und gebrochenen Parallelepipeda, in welchen nach Verlauf einer gewissen Zeit die Bewegung des ersten enthalten ist, ergiebt sich aus dem Gesetz (II):

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} MN'+M'N = \dfrac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1} \\[2ex] \mathrm{MN'}+\mathrm{M'N} = \dfrac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1} \end{cases}$$

Die Gesetze (III) liefern [1]) unter der Annahme, dass die Schwingungen geradlinig polarisirten Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene stattfinden, die Bedingungen:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \mathrm{M} = M\cos\varphi\cos\varphi_1 + N'\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \mathrm{N} = N\cos\varphi\cos\varphi_1 + M'\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \mathrm{M'} = M'\cos\varphi\cos\varphi_1 + N\sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \mathrm{N'} = N'\cos\varphi\cos\varphi_1 + M\sin\varphi\sin\varphi_1 \end{cases}$$

hingegen unter der Annahme, dass diese Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden, die Bedingungen:

$$\text{(III')} \quad \begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{M\cos\varphi\cos\varphi_1 - N'\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)} \\[2ex] \mathrm{N} = \dfrac{N\cos\varphi\cos\varphi_1 - M'\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)} \\[2ex] \mathrm{M'} = \dfrac{M'\cos\varphi\cos\varphi_1 - N\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)} \\[2ex] \mathrm{N'} = \dfrac{N'\cos\varphi\cos\varphi_1 - M\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)} \end{cases}$$

Nach den Gleichungen (18) und (18a) erfüllen unsere Formeln das Gesetz (I); es ist:

$$n = \sqrt{\frac{\mu\,\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon}}$$

Auch den Gleichungen (II) wird stets genügt, der ersten der-

1) Vergl. Von der Mühll, Math. Ann V S. 500.

Digitized by Google

selben wegen der Gleichungen (13) und (17), der zweiten wegen der Gleichungen (22) und der vorletzten der Gleichungen (31).

Damit die Bedingungen (III) erfüllt werden, muss sein:

$$(33)\quad \begin{cases} l_1 = \overline{Z_1}\cos^2\varphi_1 + \overline{Y_2}\sin^2\varphi \\ l_2 = \overline{Z_2}\cos^2\varphi\cos^2\varphi_1 - \overline{Y_1} \\ m_1 = \overline{Y_1} - \overline{Z_2}\sin^2\varphi\sin^2\varphi_1 \\ m_2 = \overline{Y_2}\cos^2\varphi + \overline{Z_1}\sin^2\varphi_1 \end{cases}$$

Zur Erfüllung der Bedingungen (III') ist notwendig, dass:

$$(33')\quad \begin{cases} l_1 = \dfrac{\overline{Z_1}\cos^2\varphi_1 - \overline{Y_2}\sin^2\varphi}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_2)} \\ l_2 = \dfrac{\overline{Z_2}\cos^2\varphi\cos^2\varphi_1 + \overline{Y_1}}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)} \\ m_1 = \dfrac{\overline{Y_1} + \overline{Z_2}\sin^2\varphi\sin^2\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi_1+\varphi)_1} \\ m_2 = \dfrac{\overline{Y_2}\cos^2\varphi - \overline{Z_1}\sin^2\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)} \end{cases}$$

Dabei werden die Grössen l_1, l_2, m_1, m_2 durch die Gleichungen (32) und (26), S. 359 - 364 die Grössen $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$, $\overline{Y_2}$, $\overline{Y_2}$ durch die Gleichungen (16) S. 349 bestimmt. Könnte man diese Grössen nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi$ entwickeln, die Werte in die Gleichungen (33) bezüglich (33') einsetzen und diese Gleichungen in der Form $F(\sin\varphi) = 0$ schreiben, so würden die Coefficienten aller Potenzen von $\sin\varphi$ gleich null werden.

d. Green's Annahme $\varrho = \infty$.

Unsere Formeln sind abgeleitet worden, ohne dass wir irgend welche beschränkenden Voraussetzungen über die Werte der elastischen Constanten getroffen haben. Auf Grund unserer Rechnungen können wir aber auch die beiden Fälle beurteilen, wo die Elasticitätsconstante ϱ entweder unendlich gross oder negativ gesetzt wird.

Setzt man mit Green $\varrho = \infty$, $\varrho_1 = \infty$, so wird man kaum vermeiden können, eine entsprechende Annahme auch für die Grenzschicht, welche einen stetigen Uebergang zwischen den beiden Medien vermittelt, zu machen. Es wird also auch $\varrho_h' = \infty$.

Digitized by Google

Wegen

$$\sin\psi_h' = \sin\varphi \sqrt{\frac{\varrho_h'\varepsilon}{\mu\varepsilon_h'}}, \qquad \nu_h' = T\sqrt{\frac{\varrho_h'}{\varepsilon_h'}}$$

folgt daraus:

$$\sin\psi_h' = \infty, \qquad \nu_h' = \infty$$

ferner:

$$\cos\varphi = i\infty, \quad \cos\psi_h' = \pm i\infty, \quad \cos\varphi_1 = -i\infty$$

Setzen wir diese Werte und, indem wir die Bezeichnung ändern,

$$L_h \sin\psi_h' \text{ in } L_h, \quad M_h \sin\psi_h' \text{ in } M_h$$

in unsere Gleichungen ein, so erhalten wir zur Bestimmung der Grössen S und S_1 die aus (20) folgenden Gleichungen:

$$(20')\quad \begin{cases} S_1\cos\varphi_1 = (S+S')l_1\cos\varphi - i(S-S')l_2\sin\varphi + L(l_3+l_4) \\ -iS_1\sin\varphi_1 = (S+S')m_1\cos\varphi - i(S-S')m_2\sin\varphi + L(m_3+m_4) \\ L_1 \qquad = (S+S')p_1\cos\varphi - i(S-S')p_2\sin\varphi + L(p_3+p_4) \\ -L_1 \qquad = (S+S')q_1\cos\varphi - i(S-S')q_2\sin\varphi + L(q_3+q_4) \end{cases}$$

Durch Elimination von L und L_1 ergeben sich daraus auch jetzt die Gleichungen (9). Es wird aber:

$$(22')\quad \begin{cases} M = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} \cdot \dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4} \begin{vmatrix} l_1 & l_3+l_4 \\ p_1+q_1 & p_3+q_3+p+q_4 \end{vmatrix} \\ N = -\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1} \cdot \dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4} \begin{vmatrix} l_2 & l_3+l_4 \\ p_2+q_2 & p_3+q_3+p_4+q_4 \end{vmatrix} \\ M' = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1} \cdot \dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4} \begin{vmatrix} m_1 & m_3+m_4 \\ p_1+q_1 & p_3+q_3+p_4+q_4 \end{vmatrix} \\ N' = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} \cdot \dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4} \begin{vmatrix} m_2 & m_3+m_4 \\ p_2+q_2 & p_3+q_3+p_4+q_4 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Die Grössen l_1, l_2 ... sind mit den Grössen $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ ebenfalls wieder durch die Gleichungen (25) verbunden. Diese lassen sich aber für $z = c$ zunächst nicht mehr zu den Gleichungen (31) und (32) vereinfachen, weil wir aus den Gleichungen (20′) nicht mehr die Relationen (21) ableiten können. Die Gleichungen (31) und (32) ergeben sich vielmehr erst dann, wenn man die Forderung aufstellt, dass die Formeln mit den Tatsachen der Beobachtung übereinstimmen sollen. Weiter liefert die Aufstellung dieser Forderung auch jetzt wieder die Gleichungen (33) und (33′). Wenn

Digitized by Google

somit in beiden Fällen die Grössen S' und S_1 mit S durch dieselben Gleichungen (9) verbunden sind, wenn ferner die Ausdrücke (22') für M, N, M' und N' sich schliesslich zu (22) vereinfachen, und zuletzt auch die Grössen l_1, l_2 . . . durch dieselben Gleichungen (32) von $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ abhangen und dieselben Bedingungsgleichungen (31), (33) und (33') bestehen, so unterscheiden sich beide Fälle doch in der Art, wie die einfacheren Ausdrücke für M, N, M', N' und die Gleichungen (31) und (32) gewonnen werden, und ferner in den Werten X, U, V, W. Denn die Differentialgleichungen (23) vereinfachen sich durch die Substitution $\sin\psi' = \infty$ zu

$$(23')\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dz} = -\alpha U \\ \dfrac{dU}{dz} = \alpha\left(X + \dfrac{V}{\sin^2\varphi'}\right) \\ \dfrac{d.\,\varepsilon' V}{dz} = -\alpha\varepsilon'(W + U(1 - 4\sin^2\varphi')) \\ \dfrac{d.\,\varepsilon' W}{dz} = \alpha\varepsilon'(X + V) \end{cases}$$

In entsprechender und leicht übersehbarer Weise erhalten wir an Stelle der Werte (26) viel einfachere Ausdrücke, wenn wir $\sin\psi_h' = \infty$ einsetzen. Die Vergleichung aller dieser neuen Formeln mit denjenigen, welche Herr Professor Von der Mühll unter der Annahme erhalten hat, der Lichtäther sei incompressibel, zeigt ausserdem, dass diese Annahme genau dieselben Formeln liefert wie die Annahme $\varrho = \infty$.

c. Cauchy's Annahme $\varrho < 0$.

Auch die Annahme $\varrho < 0$, $\varrho_1 < 0$ muss auf die Uebergangsschicht ausgedehnt werden, so dass auch $\varrho_h' < 0$. Daraus folgt:

$$\tan\psi = -i\beta, \quad \tan\psi' = \pm i\beta', \quad \tan\psi_1 = i\beta_1$$

Dabei sind β, β' und β_1 Functionen von $\sin\varphi$.

Eliminiren wir L und L_1 aus den Gleichungen (20) und substituiren $\tan\psi = -i\beta$, $\tan\psi_1 = i\beta_1$, so erhalten wir zur Bestimmung von S' und S_1 wieder die Gleichungen (9). Es wird aber:

Digitized by Google

$$
(22'')\quad
\begin{cases}
M = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\cdot\dfrac{1}{p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)}\times\begin{vmatrix} l_1 & l_3\beta+l_4 \\ p_1+q_1\beta_1 & p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)\end{vmatrix} \\[3ex]
N = -\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}\cdot\dfrac{1}{p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)}\times\begin{vmatrix} l_2 & l_3\beta+l_4 \\ p_2+q_2\beta_1 & p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)\end{vmatrix} \\[3ex]
M' = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}\cdot\dfrac{1}{p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)}\times\begin{vmatrix} m_1 & m_3\beta+m_4 \\ p_1+q_1\beta_1 & p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)\end{vmatrix} \\[3ex]
N' = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\cdot\dfrac{1}{p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)}\times\begin{vmatrix} m_2 & m_3\beta+m_4 \\ p_2+q_2\beta_1 & p_3\beta+p_4+\beta_1(q_3\beta+q_4)\end{vmatrix}
\end{cases}
$$

Die Grössen l_1, l_2 ... sind mit $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ durch die Gleichungen (25) verbunden. Die Werte für $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ ergeben sich unmittelbar wieder aus den Gleichungen (26). Aus den Differentialgleichungen (23) und den Anfangsbedingungen (24) folgen auch jetzt die Relationen (27) und (28) und daraus die Relationen (29) und (30). Die Vergleichung der Formeln mit den Tatsachen der Erfahrung kann hier auf einem ähnlichen Wege geschehen, wie ihn Herr Professor Von der Mühll, Math Ann. V. S. 551 bis S. 556 eingeschlagen hat. Wir wollen nur noch zeigen, dass auch in diesem Falle die Erhaltung der lebendigen Kraft, d. h. die Gleichungen (II) erfüllt sind. Den Nachweis für die erste dieser Gleichungen haben wir bereits früher geliefert, weil die Werte M, N, M', N' sich nicht verändert haben. Aber auch die zweite Gleichung wird immer befriedigt. Denn setzen wir die Werte (22'') in dieselbe ein, so erhalten wir:

$$
\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3\beta+l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3\beta+m_4 \\ p_1+q_1\beta_1 & p_2+q_2\beta_1 & p_3\beta+q_3\beta\beta_1+p_4+q_4\beta_1 \end{vmatrix}
= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,(p_3\beta+q_3\beta\beta_1+p_4+q_4\beta_1)
$$

Aus den Gleichungen (29) folgt:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} l_1' & l_2' & l_3'\beta+l_4' \\ m_1' & m_2' & m_3'\beta+m_4' \\ p_1'+q_1'\beta_1 & p_2'+q_2'\beta_1 & p_3'\beta+q_3'\beta\beta_1+p_4'+q_4' \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} p_1' & p_2' & p_2'\beta+p_4' \\ q_1' & q_2' & q_3'\beta+q_4' \\ p_1'+q_1'\beta_1 & p_2'+q_2'\beta_1 & p_3'\beta+q_3'\beta\beta_1+p_4'+q_4'\beta_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(p_3'\beta+q_3'\beta\beta_1+p_4'+q_4'\beta_1)$$

Nehmen wir diese Gleichung für $z = c$ und beachten, dass in derselben die zweite Determinante gleich null ist, so erkennen wir, dass die obige Bedingung stets erfüllt ist.

Digitized by Google

XIX.

Ueber Transversalenschnittpunkte, Transversalenteilwinkel und Transversalenteilstrecken im ebenen Dreieck und Tetraeder.

Von

Heinrich Seipp.

Sie Seiten eines Dreiecks ABC seien als Fundamentallinien eines trimetrischen Punktcoordinatensystems durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

dargestellt. Irgend dreien Ecktransversalen AX, BY, CZ, welche in demselben Punkt P im Innern des Dreiecks zusammentreffen, entsprechen dann die Gleichungen:

$$\mu\beta - \nu\gamma = 0, \quad -\lambda\alpha + \nu\gamma = 0, \quad \lambda\alpha - \mu\beta = 0$$

Hierin bedeuten die Quotienten $\frac{\nu}{\mu}, \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\mu}$ die Sinusverhältnisse der von den Transversalen und den betreffenden Dreiecksseiten eingeschlossenen Teilwinkel, und zwar ist

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sin CAP}{\sin BAP}, \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\sin ABP}{\sin CBP}, \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\sin BCP}{\sin ACP}$$

Die hieraus unmittelbar sich ableitende Relation

$$(1) \qquad \frac{\sin CAP}{\sin PAB} \cdot \frac{\sin ABP}{\sin PBC} \cdot \frac{\sin BCP}{\sin PCA} = 1$$

drückt sonach die Bedingung aus, welche erfüllt sein muss, wenn die Dreieckstransversalen einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen sollen:

> „Die drei Ecktransversalen im Dreieck treffen sich in „dem nämlichen, seinem Innenraum angehörigen Punkt, „wenn das Product der Sinusverhältnisse je zweier zu-„sammengehörigen Dreiecksteilwinkel, in der cyklischen „Reihenfolge genommen, gleich der Einheit ist.“

Es bezeichnen nun α', β', γ' die Dreilinienconrdinaten jenes Transversalenschnittpunktes P und $\frac{l}{m}$, $\frac{n}{o}$, $\frac{p}{q}$ die Verhältnisse der durch den letzteren auf den drei Transversalen gebildeten Abschnitte und zwar jedesmal das Verhältniss des dem Eckpunkt benachbarten Transversalenabschnitts zu dem der Gegenseite zunächstliegenden. Alsdann hat man z. B aus der obigen Gleichung der Transversalen BY:

$$\frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\nu}{\lambda}$$

Für die Transversale AX folgt nach der Theorie des Teilpunkts:

$$\alpha' = \frac{c \sin B \,.\, \frac{m}{l}}{\frac{m}{l} + 1} \quad \text{und} \quad \gamma' = \frac{\gamma x}{\frac{m}{l} + 1}$$

wobei γx den normalen Abstand des Punktes X von der Geraden AB bezeichnet. Man hat somit andererseits auch:

$$\frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{c \sin B \,.\, \frac{m}{l}}{\gamma x}$$

oder, wenn noch $\varDelta$ für den Inhalt des Dreiecks ABC gesetzt wird,

$$\frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\frac{2\varDelta}{a} \,.\, \frac{m}{l}}{\gamma x}$$

Zur Bestimmung von γx combiniren wir die aus der Figur zu entnehmende Relation:

$$c\gamma x + b\beta x = 2\varDelta$$

mit der aus der Gleichung der Transversalen AX folgenden Gleichheit:

$$\beta x = \frac{\nu}{\mu} \,.\, \gamma x$$

und erhalten:

Digitized by Google

$$\gamma x = \frac{2\Delta\mu}{c\mu + b\nu}$$

Hiermit ergiebt sich für das obige Coordinatenverhältniss $\frac{\alpha'}{\gamma'}$ der Wert:

$$\frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{c\mu + b\nu}{a \, . \, \mu} \cdot \frac{m}{l}$$

aus dessen Gleichsetzung mit $\frac{\nu}{\lambda}$ endlich das Teilstreckenverhältniss für die Transversale AX sich berechnet, nämlich:

(2)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{m}{l} &= a \, \frac{\mu\nu}{b\lambda\nu + c\lambda\mu}. \\ \frac{o}{n} &= b \, . \, \frac{\lambda\nu}{a\mu\nu + c\lambda\mu} \\ \frac{q}{p} &= c \, . \, \frac{\lambda\mu}{a\mu\nu + b\lambda\nu} \end{aligned}\right.$$

Durch entsprechende Buchstabenvertauschung folgt hieraus: (die zweite Gleichung) und (die dritte).

Mit dem soeben erhaltenen Ausdruck für $\frac{m}{l}$ und dem früheren für α' berechnen sich unter Anwendung entsprechender Buchsabenvertauschung nun leicht auch die Dreiliniencoordinaten des Transversalenschnittpunkts P. Man erhält:

(3)
$$\left\{\begin{aligned} \alpha' &= 2\Delta \, . \, \frac{\mu\nu}{a\mu\nu + b\lambda\nu + c\lambda\mu} \\ \beta' &= 2\Delta \, . \, \frac{\lambda\nu}{a\mu\nu + b\lambda\nu + b\lambda\mu} \\ \gamma' &= 2\Delta \, . \, \frac{\lambda\mu}{a\mu\nu + b\lambda\nu + c\lambda\mu} \end{aligned}\right.$$

Anwendung auf einige besondere Fälle.

1) Sind die Ecktransversalen die Winkelhalbirungslinien im Dreieck, dann wird $\lambda = \mu = \nu$ und damit

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{2\Delta}{a + b + c}$$
$$= \varrho$$

d. h. gleich dem Radius des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises, wie bekannt.

Digitized by Google

2) Sind die Ecktransversalen die Medianen des Dreiecks, dann lauten ihre Gleichungen:

$$\gamma \sin C - \beta \sin B = 0, \quad \alpha \sin A - \gamma \sin C = 0, \quad -\alpha \sin A + \beta \sin B = 0$$

und es ist dementsprechend in (3)

$$\mu = \lambda \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \nu = \lambda \frac{\sin C}{\sin A}$$

zu setzen Damit erhält man zunächst

$$\alpha' = 2\Delta \cdot \frac{\sin B \sin C}{a \sin B \sin C + b \sin A \sin C + c \sin A \sin B}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks kann man sich u. a der Formeln

$$\sin B \sin C = \frac{g}{a}$$

und

$$a \sin B \sin C + b \sin A \sin C + c \sin A \sin B = 3g$$

bedienen, in welchen g den Abstand irgend zweier zusammengehörigen „Nebenhöhenfusspunkte" bezeichnet, d. h. den Abstand der Endpunkte der von dem Fusspunkt irgend einer Dreieckshöhe auf die Nachbarseiten gefällten beiden Lote. (Vgl. § 1, sowie die Formeln 32 und 134 in des Verfassers Schrift: „Beiträge zur Kenntnis der Eigenschaften des ebenen Dreiecks," Halle a./S., 1886). Mit Benutzung jener Formeln und der Beziehung

$$\frac{2\Delta}{a} = h_a$$

worin der Index a die zur Höhe gehörige Dreiecksseite andeutet, folgt nun:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha' = \dfrac{h_a}{3} & \text{Ganz entsprechend ist:} \\[2ex] \beta' = \dfrac{h_b}{3} & \text{und} \\[2ex] \gamma' = \dfrac{h_c}{3} & \end{array} \right.$$

wodurch der bekannte Satz vom Dreiecksschwerpunkt bewiesen ist.

3) Lauten die Gleichungen der Transversalen:

$$\gamma \cos B - \beta \cos C = 0, \quad \alpha \cos C - \gamma \cos A = 0, \quad \alpha \cos B - \beta \cos A = 0$$

ist also

Digitized by Google

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\cos A}{\cos B}, \quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\cos A}{\cos C}$$

dann ergiebt sich zunächst:

$$\alpha' = 2\Delta \cdot \frac{\cos A}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}$$

und nach kurzer Rechnung schliesslich

$$\alpha' = r \cos A$$

ebenso

$$\beta' = r \cos B, \quad \gamma' = r \cos C$$

Punkt P ist in diesem Falle das Centrum des dem Dreieck umschriebenen Kreises vom Radius r

4) Aus den Gleichungen:

$$\gamma \cos C - \beta \cos B = 0, \quad \alpha \cos A - \gamma \cos C = 0, \quad \alpha \cos A - \beta \cos B = 0$$

für die Dreieckshöhen liefern die Ausdrücke (3) die Coordinaten des Höhenschnittpunkts:

$$\alpha' = 2r \cos B \cos C, \quad \beta' = 2r \cos A \cos C, \quad \gamma' = 2r \cos A \cos B$$

Bei der hierzu erforderlichen Rechnung kann die Formel

$$a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B = g$$

(l. c. § 47) zur Anwendung gelangen.

5) Die Gleichungen der Transversalen von den Eckpunkten A, B, C nach den gegenüberliegenden Berührungspunkten des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises ergeben sich leicht wie folgt:

$$\cos^2\frac{C}{2}\gamma - \cos^2\frac{B}{2}\beta = 0, \quad \cos^2\frac{A}{2}\alpha - \cos^2\frac{C}{2}\gamma = 0$$

$$-\cos^2\frac{A}{2}\alpha + \cos^2\frac{B}{2}\beta = 0$$

Sie lassen den bekannten Satz erkennen, dass die Berührungstransversalen sich in demselben Punkte treffen. Da ferner hier

$$\mu = \lambda \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \quad \text{und} \quad \nu = \lambda \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

so geht der erste der Ausdrücke (3) über in

Digitized by Google

$$\alpha' = 2\Delta \cdot \frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{a\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} + b\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}$$

wofür man, wenn mit Hilfe des Sinussatzes b und c in a ausgedrückt werden, auch schreiben kann:

$$\alpha' = \frac{2\Delta}{a} \cdot \frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin A}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin A + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin B + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin C}$$

Nun ist, wie leicht zu erweisen:

$$\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin A + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin B + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin C$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

Hiermit, und da bekanntlich

$$\Delta = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}, \quad \frac{a}{2\sin A} = r$$

also

$$\frac{\Delta}{a}\sin A = r\sin A \sin B \sin C$$

ist, reducirt sich der obige Ausdruck auf

$$\alpha' = \frac{r\sin A\sin B\sin C}{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

oder auch

$$\alpha' = \frac{8r\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$$

Cyklische Buchstabenvertauschung liefert weiter:

$$\beta' = \frac{8r\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2}$$

Digitized by Google

$$\gamma' = \frac{8r \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}$$

Aus

$$\frac{PX}{AX} = \frac{m}{l+m}, \quad \frac{PY}{BY} = \frac{o}{n+o}, \quad \frac{PZ}{CZ} = \frac{q}{p+q}$$

folgt mit Benutzung der oben gefundenen Ausdrücke (2) für die Teilstreckenverhältnisse der Ecktransversalen:

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1 \tag{4}$$

Werden in dieser Relation die drei Zähler als Unterschied der ganzen Transversale und des dem Eckpunkt zunächst anliegenden Abschnitts dargestellt, so folgt noch:

$$\frac{AP}{AX} + \frac{BP}{BY} + \frac{CP}{CZ} = 2 \tag{5}$$

Eine Beziehung zwischen den Abschnitten der Ecktransversalen selbst erhält man aus einer der beiden vorstehenden Formeln (4) und (5), indem man den Nenner eines jeden der drei Bruchsummanden als Summe der betreffenden beiden Transversalenabschnitte anschreibt, hierauf Zähler und Nenner der Brüche durch PX bzhw. PY und PZ dividirt und das Ganze vereinfacht. Man findet:

$$\frac{AP}{PX} + \frac{BP}{PY} + \frac{CP}{PZ} = \frac{AP}{PX}\cdot\frac{BP}{PY}\cdot\frac{CP}{PZ} - 2 \tag{6}$$

Die Formeln (4), (5) und (6) erhalten den Satz:

> „Treffen sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in „demselben Punkte im Innern desselben, so ist die Summe „der Verhältnisse aus den den Dreiecks**seiten** anliegen- „den Abschnitten der Ecktransversalen zu den letzteren „selbst stets gleich der Einheit; die Summe der Verhält- „nisse aus den den Dreiecks**winkeln** anliegenden Ab- „schnitten der Transversalen zu den letzteren selbst ist „stets das Doppelte der vorigen Summe; die Summe der „Verhältnisse aus den den Dreieckswinkeln anliegenden „zu den den Dreiecksseiten benachbarten Transversalen- „abschnitten endlich ist stets um 2 kleiner als das Product „aus jenen Verhältnissen.“

Nach Fortschaffung der Nenner lassen unsere Formeln übrigens

Digitized by Google

auch noch eine nahe liegende stereometrische Deutung zu, wie sich dies in der angezogenen Schrift (§§ 95, 106 und 107) in Bezug auf Formel (4) und speciell für die zu den vier Tangirungskreisen des Dreiecks gehörigen Berührungstransversalen ausgeführt findet. Formel (4) würde in der gedachten Schreibweise lauten:

$$AX.BY.CZ = AX.BY.PZ + AX.CZ.PY + BY.CZ.PX$$

und den allgemeinen Satz ergeben:

> „In jedem Dreieck ist das senkrechte Parallelepipedon „aus irgend drei Ecktransversalen mit gemeinsamem Schnitt-„punkt gleich der Summe der rechtwinkligen Parallelepi-„peden aus je zweien jener Ecktransversalen und demjenigen „Abschnitt der dritten, welcher der Dreiecksseite anliegt."

Sollen, um einiger einfacher Specialfälle zu gedenken, z. B. die drei Verhältnisse in Formel (4) bzhw. (5) unter sich gleich sein, dann folgt für jedes derselben $\frac{1}{3}$ bzhw. $\frac{2}{3}$, was bekanntlich zutrifft, wenn P der Dreiecksschwerpunkt ist Ferner: Sind zwei Transversalen durch den gemeinsamen Schnittpunkt P von den Ecken aus im Verhältniss 5 : 1 bzhw. 2 : 1 geteilt, dann wird — wie Relation (6) lehrt — die dritte Transversale durch Punkt P halbirt. U. s. w.

Der Schnittpunkt P der Dreieckstransversalen liegt ausserhalb des Dreiecks, wenn zwei der ersteren Teillinien der betreffenden Aussenwinkel sind. Gehört z. B. der Schnittpunkt (P_a) dem Innenwinkelraum von A an, so lauten die Gleichungen der drei Transversalen:

$$\mu\beta - \nu\gamma = 0, \quad \lambda\alpha + \nu\gamma = 0, \quad \lambda\alpha + \mu\beta = 0$$

und es sind in den Ausdrücken (2) einfach nur $\frac{\mu}{\lambda}$ und $\frac{\nu}{\lambda}$ negativ zu setzen, während das Vorzeichen von $\frac{\mu}{\nu}$ ungeändert bleibt. Auch das Teilungsverhältniss $\frac{m}{l}$ erhält das Zeichen —, da der Teilpunkt der Transversalen AX auf deren Verlängerung liegt. Demgemäss hat man jetzt:

$$(2a) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{m}{l} &= \frac{-a\mu\nu}{b\lambda\nu + c\lambda\mu} \\ \frac{o}{n} &= \frac{+b\lambda\nu}{-a\mu\nu + c\lambda\mu} \\ \frac{q}{p} &= \frac{+c\lambda\mu}{-a\mu\nu + b\lambda\nu} \end{aligned} \right.$$

und es folgt hiermit weiter:

Digitized by Google

$$-\frac{m}{l-m}=\frac{-a\mu\nu}{-a\mu\nu+b\lambda\nu+c\lambda\mu}$$

$$+\frac{o}{n+o}=\frac{+b\lambda\nu}{-a\mu\nu+b\lambda\nu+c\lambda\mu}$$

$$+\frac{q}{p+q}=\frac{+c\lambda\mu}{-a\mu\nu+b\lambda\nu+c\lambda\mu}$$

Endlich lautet Formel (4) jetzt

$$\text{(4a)}\qquad -\frac{P_aX}{AX}+\frac{P_aY}{BY}+\frac{P_aZ}{CZ}=1$$

wobei $\frac{P_aX}{AX}$, $\frac{P_aY}{BY}$ und $\frac{P_aZ}{CZ}$ die Verhältnisse der betreffenden Strecken nur dem absoluten Wert nach angeben. Der durch P_b bzhw. P_c angedeuteten Lage des Transversalenschnittpunkts im Innenwinkelraum von B bzhw. C, aber gleichzeitig im Aussenwinkelraum der jeweiligen beiden andern Dreieckswinkel entsprechen ebenso die Formeln:

$$\text{(4a)}\qquad \begin{cases} \dfrac{P_bX}{AX}-\dfrac{P_bY}{BY}+\dfrac{P_bZ}{CZ}=1 \quad \text{und} \\[2ex] \dfrac{P_cX}{AX}+\dfrac{P_cY}{BY}-\dfrac{P_cZ}{CZ}=1 \end{cases}$$

Beispiel. Trägt man die Seitenlänge AC über C hinaus bis Y und AB über B hinaus bis Z noch einmal ab, so treffen die Transversalen BY und CZ die dritte Transversale AX in ihrer Verlängerung. Die Coordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts P_a bestimmen sich, da hier

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{\sin BCZ}{\sin ACZ}=-\frac{\dfrac{BZ\sin B}{CZ}}{\dfrac{AZ\sin A}{CZ}}$$

oder

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{\sin B}{2\sin A}$$

und ebenso

$$\frac{\nu}{\lambda}=-\frac{\sin C}{2\sin A}$$

wird, wie folgt:

$$\alpha'=-\frac{h_a}{3}$$

$$\beta'=+\frac{2h_b}{3}$$

$$\gamma'=+\frac{2h_c}{3}$$

Digitized by Google

Weiter ergiebt sich:

$$\frac{P_aX}{AX} = \tfrac{1}{3}, \quad \frac{P_aY}{BY} = \tfrac{2}{3}, \quad \frac{P_aZ}{CZ} = \tfrac{2}{3}$$

und damit, entsprechend (4a), die Identität:

$$-\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} = 1$$

AX ist Mediane im Dreieck ABC. Dies folgt daraus, dass das Verhältniss $\frac{\beta x}{\gamma x}$ oder, was dasselbe, $\frac{\beta'}{\gamma'}$ einerseits $= \frac{CX . \sin C}{BX . \sin B}$, andererseits $= \frac{\frac{2}{3} h_b}{\frac{2}{3} h_c}$ oder $= \frac{a \sin C}{a \sin B}$ ist.

Rückt der Transversalenschnittpunkt P_a auf der verlängerten AX fort, bis die beiden andern Transversalen P_aB und P_aC parallel den Dreiecksseiten AC bzhw. AB geworden sind, dann ist

$$P_aY = BY = \infty \quad \text{und} \quad P_aZ = CZ = \infty$$

und es geht jetzt (4a) über in

$$-\frac{P_aX}{AX} + 1 + 1 = 1 \quad \text{oder} \quad P_aX = AX$$

Da aus den gleichen Gründen (ABP_a als Fundamentaldreieck betrachtet) $BX = XC$, so liegt in dem Gesagten ein von der Congruenz der Dreiecke unabhängiger Beweis des bekannten Satzes von den Diagonalen im Parallelogramm (ABP_aC). AX ist Mediane im Dreieck ABC.

Wächst der Transversalenabschnitt AP_a über das Doppelte von AX hinaus, so kommen die Schnittpunkte Y und Z der beiden andern Transversalen mit den betreffenden Dreiecksseiten auf den letzteren jenseits A zu liegen; die Teilungsverhältnisse der Transversalenabschnitte werden nunmehr alle drei negativ und es lautet die Relation (4) jetzt

$$\text{(4b)} \qquad \frac{P_aX}{AX} + \frac{P_aY}{BY} + \frac{P_aZ}{CZ} = -1$$

Sie bleibt dieselbe für die beiden andern, entsprechenden Fälle der durch P_b und P_c angedeuteten Lage des Transversalenschnittpunkts. Von den Coordinatengrössen des letzteren ist natürlich immer diejenige negativ, welche zur Gegenseite des im Innenraum geteilten Dreieckswinkels gehört.

Digitized by Google

II.

Die Seitenebenen eines Tetraeders $ABCD$ seien als Fundamentalebenen eines tetraedrischen Punktcoordinatensystems durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

dargestellt. Dann erhalten irgend sechs Kantentransversalebenen des Tetraeders, welche sich in demselben Punkte P im Innern desselben treffen, die Gleichungen:

$$\lambda\alpha - \mu\beta = 0, \quad \mu\beta - \nu\gamma = 0, \quad \nu\gamma - \omega\delta = 0$$
$$\lambda\alpha - \nu\gamma = 0, \quad \mu\beta - \omega\delta = 0, \quad \lambda\alpha - \omega\delta = 0$$

Die Bedeutung und die Grösssenverhältnisse der Constanten in diesen Gleichungen sind durch die sechs Sinusquotienten der von den Transversalebenen und den betreffenden Tetraederflächen eingeschlossenen Teilflächenwinkel bestimmt, nämlich durch:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\sin PDC, DCA}{\sin PDC, DCB}, & \dfrac{\mu}{\nu} = \dfrac{\sin PAD, ADB}{\sin PAD, ADC} \\[2ex] \dfrac{\nu}{\omega} = \dfrac{\sin PAB, ABC}{\sin PAB, ABD}, & \dfrac{\omega}{\lambda} = \dfrac{\sin PBC, BCD}{\sin PBC, BCA} \\[2ex] \dfrac{\lambda}{\nu} = \dfrac{\sin PBD, BDA}{\sin PBD, BDC}, & \dfrac{\mu}{\omega} = \dfrac{\sin PAC, ACB}{\sin PAC, ACD} \end{cases}$$

Hieraus leiten sich 3 Relationen ab, welche zusammen die Forderung des Zusammentreffens der 6 Transversalebenen in demselben Punkte P identisch ausdrücken. Sie lauten:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin PDC, DCA}{\sin PDC, DCB} \cdot \dfrac{\sin PAD, ADB}{\sin PAD, ADC} \cdot \dfrac{\sin PAB, ABC}{\sin PAB, ABD} \cdot \dfrac{\sin PBC, BCD}{\sin PBC, BCA} = 1 \\[3ex] \dfrac{\sin PDC, DCB}{\sin PDC, DCA} \cdot \dfrac{\sin PAC, ACD}{\sin PAC, ACB} \cdot \dfrac{\sin PAB, ABC}{\sin PAB, ABD} \cdot \dfrac{\sin PBD, BDA}{\sin PBD, BDC} = 1 \\[3ex] \dfrac{\sin PBD, BDA}{\sin PBD, BDC} \cdot \dfrac{\sin PAD, ADC}{\sin PAD, ADB} \cdot \dfrac{\sin PAC, ACB}{\sin PAC, ACD} \cdot \dfrac{\sin PBC, BCD}{\sin PBC, BCA} = 1 \end{cases}$$

In der ersten dieser Formeln kommen alle Transversalebenen, mit Ausnahme der beiden zu den Kanten AC und BD gehörigen,

Digitized by Google

vor; die zweite Formel enthält die Sinus der Teilflächenwinkel, ausser denjenigen der Tetraederkanten AD und BC; in der dritten Formel endlich fehlen die Sinus der an den windschiefen Geraden AB und DC befindlichen Teilflächenwinkel.

An Stelle der von den Kantentransversalebenen und den betreffenden Seitenebenen des Tetraeders gebildeten 6 . 2 Flächenwinkel lassen sich auch die von den Ecktransversallinien nach P und den Tetraederkanten eingeschlossenen 4 . 3 Kantenwinkel einführen. Hierdurch erhalten die obigen Ausdrücke eine etwas einfachere und mit der Formel (1) für das ebene Dreieck gleichartigere Gestalt. Die Ebene, welche durch die von P auf $\beta = 0$ und $\delta = 0$ gefällten Lote $PM = \beta'$ und $PN = \delta'$ bestimmt ist, schneidet, genügend verlängert, die Tetraederkante AC rechtwinklig (in F), d. h. Wkl. AFM sowol als Wkl. $AFN = 1R$. Ebenso auch Wkl $AFP = 90^0$, weil FP der Ebene $PMFN$ angehört. — Nach dem Gesagten ist Wkl. MFN der zur Kante AC gehörige Tetraederflächenwinkel und es sind ferner Wkl. $MFP =$ Wkl. PAC, ACD und Wkl. $NFP =$ Wkl. PAC, ACB die Teilflächenwinkel zu AC. Ganz ebenso trifft die durch δ' und α' bestimmte Ebene die Tetraederkante BC rechtwinklig (in G), und es ist Wkl. $PGN =$ Wkl. PBC, BCA. Nun folgt aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck PCF:

$$\sin PCF \quad \text{oder} \quad \sin PCA = \frac{PF}{PC}$$

In dem bei N rechtwinkligen Dreieck PFN aber ist

$$PF = \frac{\delta'}{\sin PFN} \quad \text{oder} \quad = \frac{\delta'}{\sin PAC, ACB}$$

so dass sich

$$\sin PCA = \frac{\delta'}{PC . \sin PAC, ACB}$$

ergiebt. Ganz ebenso liefert die Betrachtung der Dreiecke PCG und PGN:

$$\sin PCG \quad \text{oder} \ \sin PCB = \frac{\delta'}{PC . \sin PBC, BCA}$$

Durch Division der beiden Gleichungen folgt sofort:

$$\frac{\sin PAC, ACB}{\sin PBC, BCA} = \frac{\sin PCB}{\sin PCA}$$

und da die vorigen Betrachtungen ganz ebenso für AC bzhw. BC und die dritte von C ausgehende Tetraederkante, sowie überhaupt für je zwei aller übrigen Giltigkeit haben, so können wir den Satz aussprechen:

Digitized by Google

„Das Sinusverhältniss der beiden Flächenteilwinkel, „welche von je einer Tetraederseitenebene und den von „zwei ihrer Kanten ausgehenden Transversalebenen ein- „schlossen werden, ist gleich dem umgekehrten Sinusver- „hältniss der beiden Winkel, gebildet von den nämlichen „Tetraederkanten und der von ihrem gemeinsamen Eck- „punkt ausgehenden Transversallinie nach P".

Es werden sich also im Ganzen 12 der obigen entsprechende Gleichheiten (für jede Tetraederecke drei) ergeben, mit deren Hilfe die oben angedeutete Umformung der Relationen (7) auszuführen ist. So erhält z. B. mit

$$\frac{\sin PBC, BCD}{\sin PBD, BDC} = \frac{\sin PBD}{\sin PBC}$$

$$\frac{\sin PBD, BDA}{\sin PAD, ADB} = \frac{\sin PDA}{\sin PDB}$$

$$\frac{\sin PAD, ADC}{\sin PAC, ACD} = \frac{\sin PAC}{\sin PAD}$$

und der obigen, ersten Gleichheit die letzte der drei Relationen (7) die neue einfachere Form:

$$\frac{\sin PCB}{\sin PCA} \cdot \frac{\sin PBD}{\sin PBC} \cdot \frac{\sin PDA}{\sin PDB} \cdot \frac{\sin PAC}{\sin PAD} = 1$$

Beachtet man, dass die hierin vorkommenden Winkel nur von Seiten des räumlichen Vierecks $ACBD$ und den nach dessen Eckpunkten von P aus gezogenen Geraden eingeschlossen sind, so kann man die beiden andern Formeln (7) in vereinfachter Form leicht unmittelbar anschreiben, (indem man nämlich dabei die räumlichen Vierecke $ADCB$ bzhw. $ACDB$ in Betracht zieht) und man hat statt (7) nun das folgende Formelsystem:

$$\text{(7a)} \quad \begin{cases} \dfrac{\sin PDC}{\sin PDA} \cdot \dfrac{\sin PCB}{\sin PCD} \cdot \dfrac{\sin PBA}{\sin PBC} \cdot \dfrac{\sin PAD}{\sin PAB} = 1 \\[2ex] \dfrac{\sin PCD}{\sin PCA} \cdot \dfrac{\sin PDB}{\sin PDC} \cdot \dfrac{\sin PBA}{\sin PBD} \cdot \dfrac{\sin PAC}{\sin PAB} = 1 \\[2ex] \dfrac{\sin PCB}{\sin PCA} \cdot \dfrac{\sin PBD}{\sin PBC} \cdot \dfrac{\sin PDA}{\sin PDB} \cdot \dfrac{\sin PAC}{\sin PAD} = 1 \end{cases}$$

Denkt man sich jede der vier Tetraederecken mit den übrigen dreien der Reihe nach zusammenfallend, ersetzt man also in jeder der vorstehenden Formeln jeden der vorkommenden Buchstaben A, B, C, D successive durch die drei übrigen: so erhält man statt des Tetra-

Digitized by Google

eders jedesmal eine seiner Seitenebenen, und die drei Formeln (7a) reduciren sich auf die für die betreffende Dreiecksfläche giltige Formel (1). P ist jetzt der gemeinsame Ecktransversalenschnittpunkt der letzteren. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass durch die Setzungen: $D = B$ und $A = C$ in der ersten, $A = D$ und $B = C$ in der zweiten und endlich durch die Setzungen $A = B$ und $D = C$ in der dritten der Formeln (7a) nicht die erwähnte für die restirende Dreiecksfläche giltige Relation (1) zu Stande kommt, sondern jedesmal die Identität $1 \equiv 1$. Für $D = A$ dagegen sowol als für $D = C$ wird z. B. aus der ersten Formel (7a):

$$\frac{\sin PAC}{\sin PAB}, \frac{\sin PCB}{\sin PCA}, \frac{\sin PBA}{\sin PBC} = 1$$

Im ersteren Falle ist der Factor

$$\frac{\sin PAD}{\sin PDA} = \frac{\sin PAA}{\sin PAA} = 1$$

geworden und daher ausgefallen; im zweiten hat sich der Quotient $\frac{\sin PDC}{\sin PCD}$ auf $\frac{\sin PCC}{\sin PCC}$ oder 1 reducirt. U. s. w.

Bedeuten, der in I. gebrauchten Bezeichnungsweise entsprechend, α', β', γ', δ' die Vierebenencoordinaten des Punktes P; $\frac{l}{m}$, $\frac{n}{o}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ die Teilstreckenverhältnisse der Ecktransversalen des Tetraeders, endlich h_A, h_B, h_C, h_D die vier Höhen desselben, so hat man:

$$\alpha' = h_A \cdot \frac{m}{l+m}, \quad \beta' = h_B \cdot \frac{n}{n+o}$$

$$\gamma' = h_C \cdot \frac{q}{p+q}, \quad \delta' = h_D \cdot \frac{s}{r+s}$$

Hiernach und mit Rücksicht auf

$$h_A = \frac{3V}{A}, \quad h_B = \frac{3V}{B}, \quad h_C = \frac{3V}{C}, \quad h_D = \frac{3V}{D}$$

sowie

$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 3V$$

ergiebt sich sogleich die der Formel (4) für das ebene Dreieck analoge Relation:

$$(8) \qquad \frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} + \frac{PW}{DW} = 1$$

wozu nur noch zu bemerken ist, dass X, Y, Z, W die Endpunkte

Digitized by Google

der Ecktransversalen des Tetraeders auf dessen Seitenflächen bezeichnen. Auf dem früher beschrittenen Wege leiten sich aus (8) noch die nachstehenden beiden Beziehungen ab:

$$\frac{AP}{AX}+\frac{BP}{BY}+\frac{CP}{CZ}+\frac{DP}{DW}=3 \quad \text{und} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PX}\cdot\frac{BP}{BY}\cdot\frac{CP}{PZ}\cdot\frac{DP}{PW}= \\ \Big(\frac{AP}{PX}\cdot\frac{BP}{PY}+\frac{AP}{PX}\cdot\frac{CP}{PZ}+\frac{AP}{PX}\cdot\frac{DP}{PW} \\ +\frac{BP}{PY}\cdot\frac{CP}{PZ}+\frac{BP}{PY}\cdot\frac{DP}{PW} \\ +\frac{CP}{PZ}\cdot\frac{DP}{PW}\Big)+2\Big(\frac{AP}{PX}+\frac{BP}{PY}+\frac{CP}{PZ}+\frac{DP}{PW}\Big)+3\end{aligned} \tag{10}$$

Ist z. B. P der Tetraederschwerpunkt, dann sind die Bedingungen (8) und (9) durch die unter sich gleichen Teilungsverhältnisse $\frac{1}{4}$ bzhw. $\frac{3}{4}$ erfüllt.

Die Coordinatenbestimmung für den Schnittpunkt der Kantentransversalebenen oder Ecktransversallinien erfolgt auch hier mit Benutzung der Teilstreckenverhältnisse der letzteren. Um zu einem Ausdruck z. B. für das Verhältniss $\frac{o}{n}$ zu gelangen, gehen wir aus von

$$\beta' = h_B \cdot \frac{o}{n+o} \quad \text{und} \quad \delta' = \delta_Y \cdot \frac{n}{n+o}$$

wobei δ_Y das Lot vom Transversalenendpunkt Y auf die Ebene $\delta=0$ bezeichnet. Demnach folgt

$$\frac{\beta'}{\delta'} = \frac{h_B}{\delta_Y}\cdot\frac{o}{n}$$

Andererseits haben wir aus der Gleichung der Transversalebene PAC

$$\frac{\beta'}{\delta'} = \frac{\omega}{\mu}$$

Aus beiden einfachen Gleichungen entspringt der Ausdruck

$$\frac{o}{n} = \frac{\omega}{\mu}\cdot\frac{\delta_Y}{h_B} \quad \text{für} \quad \frac{o}{n}$$

in welchem nur noch δ_Y zu bestimmen bleibt. Zu diesem Ende combiniren wir die Beziehung

$$\alpha_Y A + \gamma_Y C + \delta_Y D = 3V$$

mit

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_\Gamma = \frac{\omega}{\lambda}\cdot\delta_\Gamma & \text{aus der Gleichung der Ebene } PBC \text{ und} \\ \gamma_\Gamma = \frac{\omega}{\nu}\cdot\delta_\Gamma & \text{„ „ „ „ „ } PAB \end{array}\right.$$

und erhalten:

$$\delta_\Gamma = 3V\cdot\frac{\lambda\nu}{A\nu\omega + C\lambda\omega + D\lambda\nu}$$

Durch Substitution in den obigen Ausdruck für $\frac{o}{n}$ und mit Benutzung von $h_B = \frac{3V}{B}$ folgt endlich:

$$\frac{o}{n} = B\cdot\frac{\lambda\nu\omega}{A\mu\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu}$$

Buchstabenvertauschung liefert die entsprechenden Werte für die übrigen Teilstreckenverhältnisse, so dass man hat:

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{m}{l} = A\cdot\frac{\mu\nu\omega}{B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu} \\ \frac{o}{n} = B\cdot\frac{\lambda\nu\omega}{A\mu\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu} \\ \frac{q}{p} = C\cdot\frac{\lambda\mu\omega}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + D\lambda\mu\nu} \\ \frac{s}{r} = D\cdot\frac{\lambda\mu\nu}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega} \end{array}\right.$$

Von diesen Formeln aus lässt sich natürlich auch sogleich wieder die Relation (8) gewinnen und zwar bequemer als nach der obigen Ableitung. Führen wir den aus (11) zu folgernden Wert für $\frac{o}{n+o}$ in den ursprünglichen Ausdruck für β' ein, so erhalten wir:

$$\beta' = 3V\cdot\frac{\lambda\nu\omega}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu}$$

Durch Buchstabenvertauschung entspringen hieraus die übrigen drei Coordinatenausdrücke und wir haben nun insgesamt:

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha' = 3V\cdot\frac{\mu\nu\omega}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu} \\ \beta' = 3V\cdot\frac{\lambda\nu\omega}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu} \end{array}\right.$$

Digitized by Google

$$(12)\quad \begin{cases} \gamma' = 3V.\dfrac{\lambda\mu\omega}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu} \\[2ex] \delta' = 3V.\dfrac{\lambda\mu\nu}{A\mu\nu\omega + B\lambda\nu\omega + C\lambda\mu\omega + D\lambda\mu\nu} \end{cases}$$

1) Halbiren die Transversalebenen die Flächenwinkel des Tetraeders, ist also $\lambda = \mu = \nu = \omega$, dann reduciren sich die Formeln (12) auf

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \frac{3V}{A+B+C+D}$$
$$= \varrho$$

die Centrumscoordinaten der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel (seiner inneren Berührungskugel).

2) Sind die Kantentransversalebenen je durch die beiden, von Mitte der betreffenden Tetraederkante ausgehenden Schwerpunktstransversalen zweier Tetraederflächen hindurchgelegt, endigen also die Ecktransversallinien in den Schwerpunkten der letzteren, so können die Gleichungen der Transversalebenen geschrieben werden:

$$h_B.\alpha - h_A.\beta = 0,\quad h_C.\beta - h_B.\gamma = 0,\quad h_D.\gamma - h_C.\delta = 0$$
$$h_C.\alpha - h_A.\gamma = 0,\quad h_D.\beta - h_B.\delta = 0,\quad h_D.\alpha - h_A.\delta = 0$$

Die Substitution von

$$\mu = \lambda.\frac{h_A}{h_B},\quad \nu = \lambda.\frac{h_A}{h_C},\quad \omega = \lambda.\frac{h_A}{h_D}$$

in (12) liefert zunächst:

$$\alpha' = 3V.\frac{h_A}{Ah_A + Bh_B + Ch_C + Dh_D}$$

und mit

$$A = \frac{3V}{h_A},\quad B = \frac{3V}{h_B}\quad \text{u. s. w.}$$

$$\alpha' = \frac{h_A}{4};\quad \text{ebenso}\quad \beta' = \frac{h_B}{4},\quad \gamma' = \frac{h_C}{4},\quad \delta' = \frac{h_D}{4}$$

die Coordinaten des Tetraederschwerpunkts, die auch

$$\alpha' = \frac{3V}{4A}\quad \beta' = \frac{3V}{4B}$$

u. s. w. geschrieben werden können.

Die Ergebnisse der vorstehenden, auf das Tetraeder sich beziehenden Betrachtungen müssen auch gültig bleiben für den Fall,

Digitized by Google

dass einer von dessen Eckpunkten in die Ebene der drei andern fällt, dass also statt des Tetraeders das ebene vollständige Viereck vorliegt. Mit andern Worten:

> „Zieht man in jedem der vier Dreiecke eines vollstän-„digen Vierecks drei Ecktransversalen mit gemeinsamem „Schnittpunkt, X, Y, Z und W, so jedoch, dass immer zwei „derselben auf jeder der sechs Vierecksseiten sich be-„gegnen, und verbindet man hierauf jeden der Transver-„salenschnittpunkte X, Y, Z, W mit dem seinem Dreieck nicht „angehörigen vierten Viereckseckpunkt: dann treffen sich „diese vier Verbindungslinien in demselben Punkte P und „werden in ihm derart geteilt, dass die Teilstrecken „den Relationen (8), (9), (10) Genüge leisten. Die von „jenen Verbindungslinien und den sechs Vierecksseiten „eingeschlossenen zwölf Winkel gehorchen den drei Be-„dingungen (7a)“.

In dem besonderen Falle, dass X, Y, Z, W die Flächenschwerpunkte der gedachten vier Dreiecke sind, teilt der Punkt P (ganz wie beim räumlichen Viereck oder Tetraeder) die in ihm sich treffenden Ecktransversalen des vollständigen Vierecks im Verhältniss 1 : 3. Es folgt dies übrigens auch aus dem in T. V. 2. Reihe dieser Zeitschrift, pag. 179, bewiesenen allgemeinen Satze vom n-Eck, von welchem ein besonderer Fall hier ja vorliegt.

Digitized by Google

XX.

Anwendungen von Dühring's Begriffe der Wertigkeit.

Von

K. Wessely

in Brünn.

Im Jahre 1884 erschien ein Werk Dühring's „Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis und Algebra etc.", in welchem die Grundzüge einer neuen Rechnungsart, einer Wertigkeitsrechnung entwickelt werden.

Dühring selbst nennt diese Rechnungsweise ein unbeschränkt weiter tragendes Grundmittel, wie es ihrer Zeit die Differentialrechnung war, in dessen Gebrauche die Grenzen noch keineswegs abgesteckt sind.

Der vorliegende Aufsatz hat den Zweck, auf eine specielle Anwendung von Dühring's Begriffe der Wertigkeit hinzuweisen, und soll zeigen:

Erstens, dass es algebraisch definirte Ausdrücke gibt, durch welche sich „vectoren" repräsentiren lassen;

Zweitens, dass das algebraisch ausgeführte Product zweier „vector grössen", eine Grösse derselben Art, also wieder einen vector gibt, und

Drittens, dass eine derartige vector grösse, mit einem bestimmten zweiten vector das Product null geben kann, ohne

dass das Product der ersten Grösse mit jedem beliebigen vector null sein müsste.

Dieser letztere Punkt scheint mir insofern von Interesse, als in den Beweisen von der „Unmöglichkeit complexer Grössen höherer Ordnung" als selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass man mit einem sogenannten „Teiler der Null" nicht rechnen kann.

Die Gleichung:

$$x^3 = 1$$

hat drei Lösungen

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -\tfrac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_3 = -\tfrac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Daraus folgt:

Wenn man eine Grösse k definirt, dadurch dass man sagt, ihre dritte Potenz soll gleich der positiven Einheit sein, so ist diese Definition unvollständig, oder k ist unbestimmt; es bleibt stets noch willkürlich unter k einen der drei Werte α_1 oder α_2 oder α_3 vorzustellen.

Wenn man aber dennoch mit dieser Grösse k rechnen will, unter Beibehaltung ihrer Unbestimmtheit, so ist es von selbst verständlich, dass eine Rechnungsweise derart eingerichtet werden muss, dass von dieser unbestimmt gelassenen Grösse k nur ausgesagt wird, was in gleicher Weise richtig bleibt, ob man unter k sich α_1 oder α_2 oder α_3 vorstellt, das heisst derart, dass jede Gleichung in der k vorkommt, richtig bleibt, sowol wenn man α_1 als auch wenn man α_2 oder α_3 an Stelle das k substituirt.

Zum Beispiel also wird k^3 stets durch die Einheit ersetzt werden können, weil sowol

$$\alpha_1^3 = 1 \quad \text{als auch} \quad \alpha_2^3 = 1 \quad \text{als auch} \quad \alpha_3^3 = 1 \quad \text{ist.}$$

Man wird aber nicht etwa $k - k^2$ durch Null ersetzen können; denn wenn auch $\alpha_1 - \alpha_1^2 = 0$ ist, so sind doch $\alpha_2 - \alpha_2^2$ und $\alpha_3 - \alpha_3^2$ von null verschieden.

Oder:

Einen Ausdruck

$$a + kb + k^2c$$

wird man nach der zu Grunde gelegten Definition der Grösse nur dann als identisch null bezeichnen können, wenn gleichzeitig die drei Gleichungen

$$a + \alpha_1 b + \alpha_1^2 c = 0$$
$$a + \alpha_2 b + \alpha_2^2 c = 0$$
$$a + \alpha_3 b + \alpha_3^2 c = 0$$

Digitized by Google

richtig sind; oder also wenn

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

Es ist eben definitionsgemäss der Ausdruck

$$a + kb + k^2 c = 0$$

nichts anderes als eine kürzere Schreibweise des simultanen Systems, und die Unbestimmtheit des k hat zur Folge, dass eine Gleichung

$$a + kb + k^2 c = 0$$

nach sich zieht:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0 \qquad \text{(I)}$$

Es gilt also k als eine „beschränkt willkürliche" Grösse, oder nach Dühring als eine „mehrwertige" Grösse. Speciell im vorliegenden Fall ist k an die Bedingung gebunden: $k^3 = 1$; also eine „dreiwertige" Grösse. Dieser besondere Fall soll im folgenden eingehender betrachtet werden.

Addition.

Nach der Definition von k ist

$$a + kb + k^2 c$$

eine kürzere Schreibweise für den Wertecomplex

$$\begin{gathered} a + \alpha_1 b + \alpha_1^2 c \\ a + \alpha_2 b + \alpha_2^2 c \\ a + \alpha_3 b + \alpha_3^2 c \end{gathered}$$

analog ein Ausdruck

$$a' + kb' + k^2 c'$$

Als die Summe:

$$S = (a + kb + k^2 c) + (a' + kb' + k^2 c')$$

soll derjenige Complex dreier Werte definirt werden, welchen man erhält, wenn man in S für k der Reihe nach seine 3 Werte setzt, also:

$$S = \begin{cases} S_1 = a + \alpha_1 b + \alpha_1^2 c + a' + \alpha_1 b' + \alpha_1^2 c' \\ S_2 = a + \alpha_2 b + \alpha_2^2 c + a' + \alpha_2 b' + \alpha_2^2 c' \\ S_3 = a + \alpha_3 b + \alpha_3^2 c + a' + \alpha_3 b' + \alpha_3^2 c' \end{cases}$$

Dieser selbe Wertecomplex wird aber nach der ursprünglichen Definition von k auch dargestellt durch

$$S = (a + a') + k(b + b') + k^2(c + c')$$

Digitized by Google

Hieraus folgt als Regel für die Addition zweier „dreiwertiger Ausdrücke" von der obigen Form:

Man erhält die Summe dadurch, dass man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von k addirt. Umgekehrt:

Will man die dreiwertige Summe $S = \begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{cases}$ in der Form

$$X + kY + k^2 Z = S$$

darstellen, so müssen

$$X = a + a'$$
$$Y = b + b'$$
$$Z = c + c' \text{ sein, wegen (I)}$$

Geometrische Deutung.

Wenn man die drei aufeinander senkrechten Richtungen des Raumes durch drei verschiedene Variabeln

$$x, \quad y, \quad z$$

bezeichnet, so wird

$$a + kb + k^2 c$$

einen bestimmten Punkt des Raumes repräsentiren können (wegen (I)), sobald man die Festsetzung gemacht hat, dass die Coefficienten von k, k^2 und k^3 oder 1 den drei Richtungen der y, z und x der Reihe nach als specielle Werte angehören.

Und ebenso wie man durch specielle Werte der Variablen nicht nur specielle Punkte auf den Coordinatenaxen bezeichnet, sondern auch deren Abstand vom Anfangspunkt der Coordinaten, so wird auch

$$a + kb + k^2 c$$

nicht nur einen ganz bestimmten Punkt im Raume fixiren, sondern auch den vector, dessen Länge durch

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

und dessen Neigung gegen die Axen durch

$$\cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

bestimmt ist.

Digitized by Google

Aus der früher gegebenen Definition der Summe zweier Ausdrücke:

$$a + kb + k^2c \quad \text{und} \quad a' + kb' + k^2c'$$
$$S = (a + a') + k(b + b') + k^2(c + c')$$

folgt für die geometrische Deutung:

Wenn man zwei dreiwertige Ausdrücke durch je einen vector repräsentirt, so wird ihre algebraische Summe repräsentirt durch die Diagonale des entsprechenden Parallelogramms, so dass stets die Gleichung besteht

$$AB + BC + CA = 0$$

in der bekannten Bezeichnungsweise der Ausdehnungslehre oder Quaternionenrechnung.

Es ist daher von selbst verständlich

Erstens: dass die Form der Gleichung für Curven und Flächen in der Wertigkeitsrechnung genau dieselbe bleiben muss, wie in der Quaternionenrechnung, da bei ihrer Herleitung nur von der Addition der vectoren Gebrauch gemacht wird,

und Zweitens: dass man aus diesen Gleichungen die entsprechenden in Cartesischen Coordinaten erhalten muss, wenn man an Stelle der vectoren, die algebraisch definirten Ausdrücke von der Form

$$x + ky + k^2z$$

substituirt.

Also zum Beispiel:

Hamilton Elem. d. Quat. Theil I. Kap. II.

Die Gleichung

$$\beta = x . \alpha$$

drückt die Bedingung der Collinearität der Punkte O, A, B aus, wenn der vector $\alpha = OA$ und $\beta = OB$ ist. Seien die drei rechtwinkligen Coordinaten des festen Punktes $A = \begin{cases} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{cases}$ und die r. Coord. des variablen Punktes $B = \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$

so hat man für den vector OA zu substituiren $a_1 + kb_1 + k^2c_1$

„ „ „ „ „ „ OB „ $a + kb + k^2c$

und die obige Gleichung geht über in

Digitized by Google

$$(a - x a_1) + k(b - x b_1) + k^2(c - x c_1) = 0$$

woraus nach der definitionsgemässen Unbestimmtheit der Grösse k folgt

$$a = x a_1$$
$$b = x b_1$$
$$c = x c_1$$

welche drei Gleichungen dasselbe ausdrücken, wie die einfache Gleichung $\beta = x\alpha$, nämlich, dass der variable Punkt B sich stets auf der Verlängerung von OA befindet.

Hamilton Th. I. Kap. II. §. 22.

Die Gleichung der Ebene AOB wird dargestellt durch

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0$$

worin x, y, z Scalaren, d. h. absolute Zahlen
α und β constante gegebene vectoren
und γ den variablen vector eines Punktes C bezeichnet.

Substituirt man wieder

$$\alpha = a_1 + k b_1 + k^2 c_1$$
$$\beta = a_2 + k b_2 + k^2 c_2$$
$$\gamma = a + k b + k^2 c$$

so folgt aus:

$$x(a_1 + k b_1 + k^2 c_1) + y(a_2 + k b_2 + k^2 c_2) + z(a + k b + k^2 c) = 0$$

oder

$$(x a_1 + y a_2 + z a) + k(x b_1 + y b_2 + z b) + k^2(x c_1 + y c_2 + z c) = 0$$

$$x a_1 + y a_2 + z a = 0$$
$$x b_1 + y b_2 + z b = 0$$
$$x c_1 + y c_2 + z c = 0$$

und daher

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{vmatrix} = 0 = a(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b(a_2 c_1 - a_1 c_2) + c(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

man übersieht unmittelbar, dass diese letzte Gleichung und daher auch die ursprüngliche einfache Gleichung eine Ebene darstelt, welche die drei Punkte O, A, B enthält.

Sind speciell

Digitized by Google

$$x + y + z = 0$$

so ist

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0$$

die Gleichung der Geraden durch die zwei Punkte A und B. Man erkennt dies aus den drei Gleichungen

$$x a_1 + y a_2 = (x + y) a$$
$$x b_1 + y b_2 = (x + y) b$$
$$x c_1 + y c_2 = (x + y) c$$

und kommt direct auf die Hamilt. Formel, indem

$$a + kb + k^2 c = \frac{(xa_1 + ya_2) + k(xb_1 + yb_2) + k^2(xc_1 + yc_2)}{x + y}$$

$$a + kb + k^2 c = \frac{x(a_1 + kb_1 + k^2 c_1) + y(a_2 + kb_2 + k^2 c_2)}{x + y}$$

d. h.

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}$$

Hamilton Kap. II. §. 25. Hamilt. Kap. II. §. 34.

Wenn man von 4 in einer Ebene liegenden Punkten ausgehend ein ebenes geometrisches Netz construirt, so haben die vectoren aller auf diese Weise bestimmten Punkte die Eigenschaft durch einen Ausdruck von der Form:

$$\varrho = \frac{xa\alpha + yb\beta + zc\gamma}{xa + yb + zc}$$

dargestellt zu werden.

Besteht zwischen xyz eine Gleichung $p$ten Grades, so beschreibt der Endpunkt des vectors ϱ eine Curve $p$ter Ordnung.

Also zum Beispiel in dem Falle

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx = 0$$

einen Kegelschnitt.

Bezeichnen λ, μ, ν die rechtw. Coord. des Endpunktes von ϱ, so geht der obige Ausdruck über in

$$\lambda + k\mu + k^2\nu = \frac{xa(a_1 + kb_1 + k^2 c_1) + yb(a_2 + kb_2 + k^2 c_2) + zc(a_3 + kb_3 + k^2 c_3)}{xa + yb + zc}$$

$$\lambda = \frac{xa\,a_1 + yb\,a_2 + zc\,a_3}{xa + yb + zc}$$

$$\mu = \frac{xa\,b_1 + yb\,b_2 + zc\,b_3}{xa + yb + zc}$$

Digitized by Google

$$\nu = \frac{xa\,c_1 + yb\,c_2 + zc\,c_3}{xa + yb + zc}$$

Oder:

1) $xa(\lambda - a_1) + yb(\lambda - a_2) + zc(\lambda - a_3) = 0$

2) $xa(\mu - b_1) + yb(\mu - b_2) + zc(\mu - b_3) = 0$

3) $xa(\nu - c_1) + yb(\nu - c_2) + zc(\nu - c_3) = 0$

Eliminirt man hieraus xyz, so bleibt

$$\begin{vmatrix} a(\lambda - a_1) & b(\lambda - a_2) & c(\lambda - a_3) \\ a(\mu - b_1) & b(\mu - b_2) & c(\mu - b_3) \\ a(\nu - c_1) & b(\nu - c_2) & c(\nu - c_3) \end{vmatrix} = 0$$

Die Glieder zweiter und dritter Dimension in Bezug auf $\lambda\mu\nu$ heben sich hierin weg, so dass diese Gleichung eine Ebene darstellt.

Eliminirt man nun aus 1), 2) und der Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

die Grössen xyz, so ist das Resultat eine Gleichung 2ten Grades in Bezug auf $\lambda\mu\nu$, also die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche von obiger Ebene in einer Curve 2ter Ordnung geschnitten werden muss, auf welcher eben der Endpunkt des vectors ϱ fortschreitet.

Allgemein müssen die Endpunkte eines vectors ϱ eine räumliche Curve beschreiben, wenn

$$\varrho = \sum_{ik} p_i \cdot w_k$$

wobei

p_i Functionen eines Parametes t

w_k constante Vectoren darstellen.

Denn die Gleichung

$$\varrho = \sum_{ik} p_i . w_k$$

repräsentirt dann drei Gleichungen zwischen λ, μ, ν und t. Eliminirt man aus diesen den Parameter t, so bleiben zwei Gleichungen zwischen $\lambda\mu\nu$, welches der gewöhnliche analytische Ausdruck für Raumcurven ist.

Enthalten die Functionen p_i zwei Parameter t und u, so werden die Endpunkte des variablen Vectors ϱ eine Fläche erfüllen.

Denn die vollständige Form der Gleichung sind dann drei Gleichungen zwischen λ, μ, ν, t und u. Eliminirt man hieraus die Grössen t und u, so bleibt eine Gleichung zwischen λ, μ, ν als Gleichung der Fläche übrig. (Tait Handb. d. Quat. §. 31.)

Digitized by Google

Diese an sicht recht dürftigen Beispiele, haben hier nur den Zweck, zur Erläuterung zu dienen, in welchem Sinne die dreiwertigen Grössen ein dreidimensionales Zahlengebiet begründen können.

Multiplication.

Nach der Definition der Grösse k soll jede Gleichung, in der k vorkommt, richtig bleiben für die 3 Substitutionen

$$k = \alpha_1; \quad k = \alpha_2; \quad k = \alpha_3$$

Setzt man für das Product zweier Ausdrücke

$$(a + kb + k^2 c) \quad \text{und} \quad (a' + kb' + k^2 c')$$

die Form voraus:

$$X + kY + k^2 Z$$

so müssen definitionsgemäss die Gleichungen bestehen:

$$(a + \alpha_1 b + \alpha_1^2 c)(a' + \alpha_1 b' + \alpha_1^2 c') = X + \alpha_1 Y + \alpha_1^2 Z$$
$$(a + \alpha_2 b + \alpha_2^2 c)(a' + \alpha_2 b' + \alpha_2^2 c') = X + \alpha_2 Y + \alpha_2^2 Z$$
$$(a + \alpha_3 b + \alpha_3^2 c)(a' + \alpha_3 b' + \alpha_3^2 c) = X + \alpha_3 Y + \alpha_3^2 Z$$

Die erste Gleichung gibt mit Rücksicht darauf, dass $\alpha_1^3 = 1$ und $\alpha_1^4 = \alpha_1$

$$aa' + bc' + cb' + \alpha_1 \{ab' + ba' + cc'\} + \alpha_1^2 \{ac' + bb' + ca'\} = X + \alpha_1 Y + \alpha_1^2 Z$$

die zweite Gleichung:

$$aa' + bc' + cb' + \alpha_2 \{ab + ba' + cc'\} + \alpha_2^2 \{ac' + bb' + ca'\} = X + \alpha_2 Y + \alpha_2^2 Z$$

die dritte Gleichung:

$$aa' + bc' + cb' + \alpha_3 \{ab' + ba' + cc'\} + \alpha_3^2 \{ac' + bb' + ca'\} = X + \alpha_3 Y + \alpha_3^2 Z$$

Da die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix}$ nicht verschwindet, so folgt aus den letzten drei Gleichungen:

$$X = aa' + bc' + cb'$$
$$Y = ab' + ba' + cc'$$
$$Z = ac' + bb' + ca'$$

d. h. X, Y, Z sind eindeutig bestimmt, oder das Product zweier Ausdrücke von der Form:

$$a + kb + k^2 c \quad \text{und} \quad a' + kb' + k^2 c'$$

Digitized by Google

liefert einen Ausdruck derselben Form; das Product zweier Vectoren gibt einen neuen Vector.

Es ist von selbst verständlich, dass man zu diesem Resultat in einfacherer Weise gelangt, wenn man die Multiplication ausführt unter Beibehaltung der unbestimmten oder „dreiwertigen“ Grösse k. Die directe Multiplication liefert:

$$(a+kb+k^2c)(a'+kb'+k^2c') = aa'+kba'+k^2ca' \\ +kab'+k^2bb'+k^3cb' \\ +k^2ac'+k^3bc'+k^4cc'$$

Nun ist $k^3 = 1$ eine richtige Gleichung, weil $\begin{cases} \alpha_1^3 = 1 \\ \alpha_2^3 = 1 \\ \alpha_3^3 = 1 \end{cases}$

Ebenso ist

$k^4 = k$ eine richtige Gleichung, weil $\begin{cases} \alpha_1^4 = \alpha_1 \\ \alpha_2^4 = \alpha_2 \\ \alpha_3^4 = \alpha_3 \end{cases}$

Daher reducirt sich der obige Ausdruck auf:

$$(aa'+bc'+cc')+k(ab'+ba'+cc')+k^2(ac'+bb'+ca')$$

woraus XYZ sich unmittelbar ergeben.

Geometrische Deutung.

Ein Vector $x+ky+k^2z$

geht durch Multiplication über in

$$kx+k^2y+k^3z = z+kx+k^2y$$

Es werden also die drei Coordinaten seines Endpunktes cyklisch vertauscht.

Eine cyklische Vertauschung der Coordinaten des Vectors kann man sich entstanden denken entweder

durch eine Drehung der Coordinatenaxen, längs der Mantelfläche eines Kreiskegels mit der Spitze im Anfangspunkt der Coordinaten, oder, was dasselbe ist,

durch eine Drehung des Vectors im entgegengesetzten Sinne, längs der Mantelfläche eines coaxialen Kegels. Selbstverständlich liegt die Drehungsaxe (die gemeinsame Axe beider Kegel) symmetrisch gegen die drei Coordinatenaxen.

Digitized by Google

Ihre Richtung wird daher fallen in die Verbindungslinie des Coordinatenanfangs mit dem Punkte $(1+k+k^2)$.

Die Multiplication eines Vectors, mit der Grösse k kann hiernach gedeutet werden als eine Drehung um die Richtung $1+k+k^2$ unter Festhaltung seiner Neigung gegen diese Richtung. Der Drehungswinkel ist gleich einem Drittel der vollen Umdrehung.

Hiernach kann ein Vector von der Richtung $1+k+k^2$, durch Multiplication mit einem beliebigen anderen, in seiner Richtung nicht geändert werden, wie es auch die algebraische Ausführung der Multiplication bestätigt, indem

$$\begin{aligned}(1+k+k^2)(x+ky+k^2z) &= x+ky+k^2z\\ &\quad +kx+k^2y+k^3z\\ &\quad\quad +k^2x+k^3y+k^4z\\ \hline &= (x+z+y)+k(y+x+z)+k^2(z+y+x)\\ &= (1+k+k^2)(x+y+z)\end{aligned}$$

Da xyz absolute Zahlen (Scalaren) sind, so stellt der letzte Ausdruck einen Vector von der Richtung $1+k+k^2$ dar.

In dem speciellen Fall, wo $x+y+z=$ null ist, wird das Product identisch verschwinden, ohne dass einer der Factoren als null bezeichnet werden kann.

Man kann jeden Vector zerlegen in zwei Componenten, von welchen die eine in die Richtung $1+k+k^2$ fällt und die andere darauf senkrecht steht.

Der Einheitsvector in der Richtung $1+k+k^2$ soll fortan bezeichnet werden mit . . . i . . .; senkrecht auf i sollen zwei neue Einheitsvectoren . . . j . . . und . . . l . . . im folgenden definirt werden.

Die absolute Länge des Vectors $OM = 1+k+k^2$ beträgt

$$\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

Bezeichnet ϑ den Neigungswinkel von OM gegen die Coordinatenaxen, so folgt, da OM gegen alle drei Axen gleich geneigt ist,

$$3\cos^2\vartheta = 1 \quad \cos\vartheta = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Legt man durch M eine Ebene (E) senkrecht auf OM, so schneidet diese die Axen der xyz in drei Punkten ABC, wobei die Länge

Digitized by Google

$$OA = \frac{OM}{\cos\vartheta}$$

die Vectoren OB und OC werden ihrer Länge und Richtung nach zu bezeichnen sein mit:

$$OB = 3k$$
$$OC = 3k^2$$

Die Vectoren

$$MA = g_1, \quad MB = g_2, \quad MC = g_3$$

werden hiernach dargestellt sein durch

$$MA = MO + OA = -OM + OA = -(1+k+k^2)+3$$
$$= +2-k-k^2$$

$$MB = MO + OB = -OM + OB = -(1+k+k^2)+3k$$
$$= -1+2k-k^2 = k(2-k-k^2)$$

$$MC = MO + OC = -OM + OC = -(1+k+k^2)+3k^2$$
$$= -1-k+2k^2 = k^2(2-k-k^2)$$

Die Vectoren g_2 und g_3 gehen also aus g_1 hervor durch Multiplication mit k respective k^2; das ist nach früherem selbstverständlich, weil ja die Winkel, die diese Vectoren mit einander bilden, gleich sind dem dritten Teil einer vollen Umdrehung.

Jeder beliebige Vector der Ebene (E) lässt sich nun schreiben:

$$g' = \lambda g_1 + \mu g_2$$

Soll g' speciell den auf g_1 senkrecht stehenden Vector bezeichnen, so müssen λ und μ so gewählt werden, dass der cos des Neigungswinkels zwischen g' und g_1 gleich null wird.

Die cos der Neigungswinkel von

$$g_1 = 2-k-k^2$$

sind

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

Die cos der Neigungswinkel von

$$g' = (2\lambda-\mu)+k(2\mu-\lambda)+k^2(-\mu-\lambda)$$

sind:

$$\cos\alpha' = \frac{2\lambda-\mu}{\sqrt{6(\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu)}}, \quad \cos\beta' = \frac{2\mu-\lambda}{\sqrt{6(\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu)}}$$

$$\cos\gamma' = \frac{-\mu-\lambda}{\sqrt{6(\lambda^2+\mu^2-\lambda\mu)}}$$

Digitized by Google

die Bedingung

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

ist daher:

$$4\lambda - 2\mu - 2\mu + \lambda + \mu + \lambda = 0$$
$$6\lambda - 3\mu = 0$$
$$\mu = 2\lambda$$

Es wird daher

$$g' = g_1 + 2g_2 = -(1+k+k^2) + 3 + 2\{-(1+k+k^2) + 3k\}$$
$$g' = 3(k-k^2)$$

ein auf g_1 senkrecht stehender Vector der Ebene (E) sein.

Man gelangt einfacher zu diesem Resultat, wenn man überlegt, dass $g_1 g_2 g_3$ unter einander Winkel von 120° bilden; folglich muss die Diagonale im Parallelogramm, das aus g_2 und $-g_3$ gebildet ist, mit g_1 einen Winkel von 90° bilden. Diese Diagonale wird aber nach den Regeln der Addition in ihrer Richtung dargestellt durch die Summe:

$$g' = g_2 - g_3$$

Substituirt man die früheren Ausdrücke für g_2 und g_3, so erhält man:

$$g' = (-1 + 2k - k^2) - (-1 - k + 2k^2) = 3k - 3k^2 = 3(k - k^2)$$

Der absolute Betrag des Vectors

$$g_1 = 2 - k - k^2$$

ist gleich

$$\operatorname{mod} g_1 = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

es wird daher der Einheitsvector in der Richtung von g_1 zu schreiben sein:

$$j = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 - k - k^2)$$

Der auf g_1 in der Ebene (E) senkrechte Vector hat die Richtung $k - k^2$; es wird daher der auf j senkrechte Einheitsvector zu schreiben sein:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(k - k^2)$$

und der Einheitsvector in der Richtung $1 + k + k^2$ ist

$$i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + k + k^2)$$

Digitized by Google

Hiernach wird der variable Einheitsvector in der Ebene (E) seiner Länge und Richtung nach dargestellt durch

$$g = j\cos\varphi + l\sin\varphi$$

worin φ die Neigung des Vectors gegen die j-Axe bedeutet; und ein Vector von der absoluten Länge $= \varrho$, dessen Neigung gegen die i-Axe durch den Winkel ϑ, und gegen j durch den Winkel φ bestimmt ist, hat die Form:

$$w = \varrho(i\cos\vartheta + g\sin\vartheta)$$

Um an Stelle der $1,\ k,\ k^2$ die
$i \quad j \quad l$

als Richtungscoefficienten einführen zu können, wäre noch übrig nachzuweisen:

Erstens: dass zwischen den drei Grössen ijl keine homogene lineare Relation stattfinden kann, und

Zweitens: dass die Producte dieser Grössen wieder Grössen derselben Art geben.

Erstens:

Setzt man eine lineare homogene Relation zwischen ijl voraus, z. B.

$$Ai + Bj + Cl = 0$$

so folgt

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

denn die obige Gleichung ist definitionsgemäss eine kürzere Schreibweise für das simultane System:

$$\frac{A}{\sqrt{3}}(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2) + \frac{B}{\sqrt{6}}(2 - \alpha_1 - \alpha_1^2) + \frac{C}{\sqrt{2}}(\alpha_1 - \alpha_1^2) = 0$$

$$\frac{A}{\sqrt{3}}(1 + \alpha_2 + \alpha_2^2) + \frac{B}{\sqrt{6}}(2 - \alpha_2 - \alpha_2^2) + \frac{C}{\sqrt{2}}(\alpha_2 - \alpha_2^2) = 0$$

$$\frac{A}{\sqrt{3}}(1 + \alpha_3 + \alpha_3^2) + \frac{B}{\sqrt{6}}(2 - \alpha_3 - \alpha_3^2) + \frac{C}{\sqrt{2}}(\alpha_3 - \alpha_3^2) = 0$$

Substituirt man die wirklichen Werte

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

so gibt die erste Gleichung

$$\frac{A}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 0 \quad \text{oder} \quad A = 0$$

Digitized by Google

Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt

$$B = 0, \quad C = 0$$

Zweitens:

Dass die Producte der Grössen $i\,j\,l$ wieder Grössen derselben Art sind, erkennt man, wenn man die Multiplication wirklich ausführt:

$$i^2 = \left(\frac{1+k+k^2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \tfrac{1}{3}\{1+k^2+k^4+2k+2k^3+2k^2\}$$

$$i^2 = \tfrac{1}{3}\{3+3k^2+3k\} = \sqrt{3}\,.\,i$$

und in derselben Weise wird

$$j^2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.\,j$$
$$l^2 = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.\,j$$
$$i\,j \equiv 0$$
$$i\,l \equiv 0$$
$$j\,l = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,l$$

Es ist klar, dass das analoge dessen, was für $1\,k\,k^2$ oder $i\,j\,l$ gilt, für jedes System dreier auf, einander senkrecht stehender Vectoren, die sich aus den $1\,k\,k^2$ zusammensetzen, gilt, und es ist weiter klar, dass man an Stelle der Gleichung $x^3 = 1$ jede beliebige k u b i s c h e Gleichung den Auseinandersetzungen hätte zu Grunde legen können, wenn sie nur der Bedingung genügt, dass die d r e i W e r t e i h r e r L ö s u n g v o n e i n a n d e r v e r s c h i e d e n sind, wie eine einfache Rechnung zeigt.

Servois hat 1813 in Gergonnes Annalen die Form $a+b\sqrt{-1}$, die für die Ebene gilt, auf den Raum auszudehnen versucht; er stellt für die Einheitsgerade im Raum per analogiam die Form auf

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$$

und frägt sich, bezüglich der Grössen $p\,q\,r$: „seraient-elles imaginaires réductibles à la forme générale $A+B\sqrt{-1}$?" — ohne die Frage beantworten zu können.

Wir haben gesehen, dass die $p\,q\,r$ sich rational zusammensetzen, aus den Potenzen der d r e i w e r t i g e n L ö s u n g, i r g e n d e i n e r a l g e b r. G l e i c h u n g d r i t t e n G r a d e s (deren Lösung drei wirklich verschiedene Werte besitzt.)

Tatsächlich e i n g e f ü h r t in die Mathematik sind die irrationalen

Digitized by Google

Zahlen jedenfalls worden, als die Lösungen algebraischer Gleichungen; in dieser Eigenschaft kommt ihnen die Mehrwertigkeit als charakteristische Eigentümlichkeit zu; und wenn man gegenwärtig in die Arithmetik die irrationalen Zahlen einführt, als die Summe unendlich vieler rationaler Brüche, so scheint es mir wol der Beachtung wert, dass den in solcher Weise definirten Grössen, diese chrakteristische Eigentümlichkeit fehlt.

Geometrische Differentiation.

Es seien i, j, l irgend drei algebraisch definrte dreiwertige Grössen von solcher Beschaffenheit, dass sie in der angegebenen Weise als Richtungscoefficienten verwendet werden können, und mögen dem entsprechend drei auf einander senkrecht stehende Einheitsvectoren von constanter Richtung bezeichnen.

Sind nun xyz Functionen eines Parameters t (welcher die Zeit darstellen mag), so beschreibt der Endpunkt des Vectors

$$\varrho = ix + jy + lz = \varphi(t)$$

mit der Zeit im allgemeinen eine Raumcurve.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 zwei Vectoren, die respective den Werten t_1 und t_2 des Parameters entsprechen, so ist nach den Additionsregeln der vector $\varrho_2 - \varrho_1$ die Sehne zwischen den Endpunkten von ϱ_1 und ϱ_2 ihrer Länge und Richtung nach; daher

$$d\varrho = \varphi(t + dt) - \varphi(t)$$

das unendlich kleine Curvenelement, welches der Endpunkt des Vectors ϱ in der Zeit dt durchläuft, und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\varphi(t + dt) - \varphi(t)}{dt} = \varphi'(t)$$

die Geschwindigkeit der Bewegung bezüglich ihrer Länge und Richtung.

Ist $\frac{d\varrho_1}{dt}$ die Geschwindigkeit im Punkte ϱ_1 und

$\frac{d\varrho_2}{dt}$ die Geschwindigkeit im Punkte ϱ_2, so ist

$$\frac{d\varrho_2}{dt} - \frac{d\varrho_1}{dt} = \frac{d^2\varrho_1}{dt}$$

die Diagonale in dem aus den beiden Geschwindigkeiten gebildeten Parallelogramm und fällt daher in die Richtung der Gesammtbeschleunigung.

Digitized by Google

$\frac{d^2\varrho_1}{dt^2}$ ist die gesamte Beschleunigung in Bezug auf Länge und Richtung.

Es ist dieses Resultat von selbst verständlich, wenn man überlegt, erstens dass

ein Ausdruk

$$\varrho = ix + jy + lz$$

durch analytisch ausgeführte Differentiation übergehen muss in

$$\frac{d\varrho}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + l\frac{dz}{dt}$$

nachdem i, j, l constante Zahlen sind, und zweitens dass

nach den Regeln der Addition der Vector

$$\frac{d\varrho}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + l\frac{dz}{dt}$$

die Diagonale ist, in dem aus $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ gebildeten Parallelepiped sowie auch

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} + l\frac{d^2z}{dt^2}$$

die Diagonale ist in dem Parallelepiped aus

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Anwendung auf die Centralbewegung.

Da die Richtung der Gesamtbeschleunigung $\frac{d^2\varrho_1}{dt^2}$ durch die Diagonale, in dem aus $\frac{d\varrho_1}{dt}$ und $\frac{d\varrho_2}{dt}$ gebildeten Parallelogramm bestimmt wird, so versteht sich von selbst, dass für jede Centralbewegung, (wo also die Gesamtbeschleunigung in die Richtung des Radiusvector ϱ_1 fällt) die aus $d\varrho_1$ und $d\varrho_2$ gebildete Ebene zusammenfallen muss mit der aus ϱ_1 und $d\varrho_1$ gebildeten; und daher auch weiter die Ebene $(d\varrho_1 d\varrho_2)$ dieselbe ist wie die Ebene $(\varrho_1\, d\varrho_1)$ das heisst:

Eine Centralbewegung kann nur in einer ebenen Bahn vor sich gehen (I)

Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Componenten im Radiusvector und senkrecht dazu, für eine ebene Bahn, erhält man unmittelbar aus der Form:

$$\varrho = r[i\cos\lambda + g\sin\lambda] = r.\omega$$

worin r den Tensor oder absoluten Betrag des Vectors und ω den Richtungscoefficienten bedeutet, indem für einen constanten Vector g

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{dr}{dt}.\omega + r\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{dr}{dt}.\omega + [-i\sin\lambda + g\cos\lambda]r.\frac{d\lambda}{dt} \quad \text{ist.}$$

Es besteht also die Geschwindigkeit aus zwei Componenten; einer in der Richtung von ω oder ϱ, mit dem absoluten Betrag gleich $\frac{dr}{dt}$; und einer zweiten in der Richtung von

$$-i\sin\lambda + g\cos\lambda$$

mit dem absoluten Betrag gleich $r.\frac{d\lambda}{dt}$

$$-i\sin\lambda + g\cos\lambda$$

ist aber, wie man unmittelbar erkennt, ein auf ω senkrecht stehender Einheitsvector, der mit ω' bezeichnet werden mag.

Eine nochmalige Differentiation gibt

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \omega.\frac{d^2r}{dt^2} + \omega'\left[\frac{dr}{dt}.\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\lambda}{dt}\right)\right] + \frac{d\omega'}{dt}.r\frac{d\lambda}{dt}$$

oder da

$$\frac{d\omega'}{dt} = (-i\cos\lambda - g\sin\lambda)\frac{d\lambda}{dt} = -\omega\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \omega\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] + \omega'\left[\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\lambda}{dt}\right)\right]$$

Es besteht sonach die Gesamtbeschleunigung einer ebenen Bahn aus zwei Componenten, von denen die eine in der Richtung des Vectors (ϱ) gleich ist

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$$

und die andere in der Richtung senkrecht zum Radiusvector gleich ist

$$\frac{dr}{dt}.\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\lambda}{dt}\right)$$

oder gleich

Digitized by Google

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\lambda}{dt}\right)$$

Wird für eine ebene Bahn vorausgesetzt, dass die Gesammtbeschleunigung in die Richtung des Radiusvector fällt, so muss der Coefficient von ω' verschwinden, oder es muss

$$r^2\frac{d\lambda}{dt} = \gamma = \text{constant sein.} \qquad \text{(II)}$$

Wird weiter speciell vorausgesetzt, dass die Beschleunigung ihrem absoluten Betrage nach proportional $\frac{1}{r^2}$ ist, so folgt, wenn $-\mu$ den Proportionalfactor bezeichnet, aus

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\mu\cdot\frac{\omega}{r^2} \text{ mit Benutzung von (II)}$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\mu\cdot\frac{\omega}{\gamma}\cdot\frac{d\lambda}{dt} = \frac{-\mu}{\gamma}\left[i\cos\lambda + g\sin\lambda\right]\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{\mu}{\gamma}\,\frac{d}{dt}\left[i\sin\lambda - g\cos\lambda\right] = \frac{\mu}{\gamma}\cdot\frac{d}{dt}\,\omega'$$

die Integration gibt:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\mu}{\gamma}\,\omega' + \varrho_1$$

(worin ϱ_1 die Integrationsconstante bedeutet) als die Gleichung des Hodographen.

Von den zwei Teilen dieses Ausdrucks, die beide Vectoren sind, ist der erste von constanter Länge, der zweite constant; der geometrische Ort des Endpunktes von $\frac{d\varrho}{dt}$ ist also ein Kreis, dessen Radius $= \frac{\mu}{\gamma}$ ist, und dessen Mittelpunkt im Endpunkte des Vectors ϱ_1 liegt.

Ist der absolute Betrag des Vectors ϱ_1 gleich r_1 und seine Neigung gegen die x-Axe gleich λ, so wird $(\lambda - \lambda_1)$ der Winkel sein zwischen der Richtung von ω und der Richtung von ϱ_1; und $r_1\cos(\lambda - \lambda_1)$, $r_1\sin(\lambda - \lambda_2)$ werden die Componenten von ϱ_1 sein, in der Richtung von ω und ω', so dass man die Gleichung des Hodographen auch schreiben kann:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \left[\frac{\mu}{\gamma} + r_1\sin(\lambda - \lambda_1)\right]\omega' + r_1\cos(\lambda - \lambda_1)\,.\,\omega$$

Digitized by Google

Für die Geschwindigkeitscomponente senkrecht zum Radiusvector $\left(r\frac{d\lambda}{dt}\right)$ erhält man also den Wert

$$r\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mu}{\gamma} + r_1 \sin(\lambda - \lambda_1)$$

und daher mit Benutzung von (II) in sehr einfacher Weise

$$\frac{r^2\frac{d\lambda}{dt}}{r} = \frac{\gamma}{r} = \frac{\mu}{\gamma} + r_1 \sin(\lambda - \lambda_1)$$

$$r = \frac{\gamma^2}{\mu + r_1\gamma\sin(\lambda - \lambda_1)} = \frac{\frac{\gamma^2}{\mu}}{1 + \frac{r_1\gamma}{\mu}\sin(\lambda - \lambda_1)} \tag{III}$$

als die Gleichung der Bahn.

Die Bahn ist ein Kegelschnitt und zwar Ellipse, Parabel oder Hyperbel jenachdem

$$r_1\frac{\gamma}{\mu} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$$

oder jenachdem

$$r_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{\mu}{\gamma}$$

oder jenachdem der Coordinatenanfang innerhalb des Hodographen, auf der Peripherie, oder ausserhalb desselben liegt. (Hamilton El. d. Quat. Theil IV.. Kap. II. pag. 361).

Gleichzeitig erkennt man auch, dass eine jede Centralbewegung für welche der Hodograph ein Kreis ist, nur durch eine Beschleunigung proportional $\frac{1}{r^2}$ hervorgerufen werden kann, indem aus

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\mu}{\gamma}\omega' + \varrho_1$$

folgt:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{\mu}{\gamma}\frac{d\omega'}{dt} = -\frac{\mu}{\gamma}\omega . \frac{d\lambda}{dt}$$

und mit Benutzung von (II)

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{\mu\omega}{r^2}$$

Sind in der Curvengleichung

Digitized by Google

$$\varrho = ix + jy + kz$$

xyz als Functionen der Bogenlänge s gegeben, dann bedeutet selbstverständlich $\frac{d\varrho}{ds}$ die Längeneinheit in der Richtung der Tangente, indem der absolute Betrag von $d\varrho$ gleich ds ist.

Bezeichnen $d\varrho_1$ und $d\varrho_2$ zwei aufeinander folgende Curvenelemente, und sind OA und $O'A$ die Längeneinheiten in den entsprechenden Richtungen, dann bedeutet das Differential

$$d \,.\, \frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho_2}{ds} - \frac{d\varrho_1}{ds} = O'A - OA$$

die Diagonale $O'O$ in Länge und Richtung.

Es fällt daher die Richtung von $\frac{d^2\varrho}{ds}$ zusammen mit der Richtung des Krümmungsradius in O, und der absolute Betrag von $\frac{d^2\varrho}{ds}$ ist gleich $d\alpha$, wenn $d\alpha$ den Winkel zwischen den beiden aufeinander folgenden Tangenten bezeichnet.

Der absosute Betrag von $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ ist demnach gleich $\frac{d\alpha}{ds}$ oder $\frac{1}{R}$, wenn R den absoluten Betrag des Krümmungsradius bedeutet.

Schreibt man für den Einheitsvector in der Richtung von O nach dem Krümmungsmittelpunkt (C), also für den Versor von R (in der Bezeichnungsweise der Quaternionen) UR, so folgt also:

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{UR}{R}$$

Für $\frac{d^3\varrho}{ds^3}$ folgt hieraus:

$$\frac{d^3\varrho}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{UR}{R}\right) = \frac{-1}{R^2}\,\frac{dR}{ds}\,.\,UR + \frac{1}{R}\,\frac{d\,UR}{ds}$$

die Bedeutung von $d\,UR$ in dieser Gleichung ergibt sich aus folgender Ueberlegung.

Für eine ebene Curve ist das Differential des Richtungscoefficienten oder des Versors von R, wie die Figur zeigt, gleich

$$a'C - aC = a'C + Ca = a'a$$

wenn der absolute Betrag von $a'C$ und aC gleich der Längeneinheit ist; das heisst gleich dem Bogenelement ds zwischen zwei benachbarten Krümmungsradien, aber im negativen Sinne genommen.

Digitized by Google

Für eine Curve doppelter Krümmung tritt an Stelle von $a'C$, wie die Anschauung unmittelbar ergibt, der Vector $a'C + d\sigma$, wenn $d\sigma$ den Bogen zwischen den beiden benachbarten Schmiegungsebenen seiner Länge und Richtung nach bezeichnet.

Es wird daher

$$d\,UR = -d\varepsilon + d\sigma$$

und

$$\frac{d\,UR}{ds} = -\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{d\varrho}{ds} + \frac{Ur}{r} \tag{1}$$

indem $\frac{d\varrho}{ds}$ der Richtungscoefficient von $d\varepsilon$ ist; r bedeutet den Radius der zweiten Krümmung und Ur seinen Richtungscoefficienten.

Hiernach ergibt sich

$$\frac{d^3\varrho}{ds^3} = UR\left[\frac{-1}{R^2}\,\frac{dR}{ds}\right] - \frac{d\varrho}{ds}\,\frac{1}{R^2} + Ur\,.\,\frac{1}{R\,.\,r}$$

Die grosse Einfachheit dieser Ausdrücke soll hervorgehoben werden durch eine Anwendung auf die Discussion der Schraubenlinie.

Die Gleichung der Schraubenlinie auf einem Cylinder vom Radius a in rechtwinkligen Coordinaten lautet:

$$x = a\cos\frac{s}{a},\quad y = a\sin\frac{s}{a},\quad z = a\,\mathrm{tang}\,\beta\,.\,\frac{s}{a} = s\,.\,\mathrm{tang}\,\beta$$

wobei β den Steigungswinkel oder die Neigung bezeichnet; s ist der Bogen des Grundkreises; setzt man an Stelle desselben den Bogen der Schraubenlinie σ, so erhält man als Gleichung der Curve, indem

$$\sigma\,.\,\cos\beta = s$$

$$\varrho = i a\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} + j a\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} + l\sigma\,.\sin\beta$$

Hieraus folgt für die Tangente:

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = -i\cos\beta\,.\,\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} + j\cos\beta\,.\,\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} + l\sin\beta$$

es sind also die cos der Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$, welche die Tangente mit den Axen bildet, unmittelbar zu ersehen

$$\cos\lambda = -\cos\beta\,.\,\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} = -\cos\beta\,.\,\frac{y}{a}$$

Digitized by Google

$$\cos\mu = \cos\beta \,.\, \cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} = \cos\beta \,.\, \frac{x}{a}$$

$$\cos\nu = \sin\beta$$

Für den Radius der ersten Krümmung folgt:

$$\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} = -\frac{i\cos^2\beta}{a} \cdot \cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} - j \,.\, \frac{\cos^2\beta}{a}\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a}$$

$$\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} = \frac{\cos^2\beta}{a}\left[-i\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} - j\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right]$$

Der Ausdruck in der Klammer ist ein Vector vom absoluten Betrag gleich der Einheit und stellt den Richtungscoefficienten des Krümmungsradius dar, d. h. es ist:

$$UR = -i\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} - j\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a}$$

und der absolute Betrag von $\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2}$ ist gleich $\frac{\cos^2\beta}{a}$ d. h. es ist

$$R = \frac{a}{\cos^2\beta}$$

Den Radius der zweiten Krümmung erhält man nach der Formel (1):

$$\frac{Ur}{r} = \frac{d\,UR}{d\sigma} + \frac{1}{R}\,\frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{\cos\beta}{a}\left[i\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} - j\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right]$$

$$+ \frac{\cos^2\beta}{a}\left[-i\cos\beta\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} + j\cos\beta \,.\, \cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} + l\sin\beta\right]$$

$$= i\left[\frac{\cos\beta}{a} - \frac{\cos^3\beta}{a}\right]\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a}$$

$$+ j\left[-\frac{\cos\beta}{a} + \frac{\cos^3\beta}{a}\right]\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a}$$

$$+ l\,\frac{\cos^2\beta}{a} \,.\, \sin\beta$$

$$= i\left[\frac{\cos\beta\sin^2\beta}{a} \,.\, \sin\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right]$$

$$+ j\left[\frac{-\cos\sin^2\beta}{a}\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right]$$

$$+ l\,\frac{\cos^2\beta\sin\beta}{a}$$

Digitized by Google

$$\frac{Ur}{r} = \frac{\cos\beta\sin\beta}{a}\left[i\sin\beta\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} - j\sin\beta\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} + l\cos\beta\right]$$

Der Modul der Klammer ist gleich

$$\sqrt{\sin^2\beta\left[\sin^2\frac{\sigma\cos\beta}{a} + \cos^2\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right] + \cos^2\beta} = 1$$

daher der absolute Betrag des Radius der zweiten Krümmung:

$$r = \frac{a}{\cos\beta \,.\, \sin\beta}$$

Um die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, resp. die Gleichung der Krümmungsmittelpunkscurve zu finden, braucht man nur zum Radiusvector ϱ den Radius der ersten Krümmung zu addiren.

Es wird also:

$$w = \varrho + R \,.\, UR = i\left[\left(a - \frac{a}{\cos^2\beta}\right)\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right] + j\left[\left(a - \frac{a}{\cos^2\beta}\right)\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a}\right] + l\sin\beta \,.\, \sigma$$

die Gleichung der Krümmungsmittelpunktscurve darstellen, und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind:

$$\xi = \left(a - \frac{a}{\cos^2\beta}\right)\cos\frac{\sigma\cos\beta}{a} = \left(a - \frac{a}{\cos^2\beta}\right)\cdot\frac{x}{a}$$

$$\eta = \left(a - \frac{a}{\cos^2\beta}\right)\sin\frac{\sigma\cos\beta}{a} = \left(a - \frac{a}{\cos^2\beta}\right)\frac{y}{a}$$

$\zeta = \sigma \,.\, \sin\beta = z$ und wenn $a\operatorname{tg}\beta = b$:

$$R = \frac{a}{\cos^2\beta} = a(1 + \operatorname{tang}^2\beta) = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

$$r = \frac{\cos\beta \,.\, \sin\beta}{a} = \frac{a}{\cos^2\beta}\cdot\cot\beta = \frac{a^2 + b^2}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

$$\xi = \left(a - \frac{a^2 + b^2}{a}\right)\cdot\frac{x}{a} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot x$$

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2}\cdot y$$

$$\zeta = \sin\beta \,.\, \frac{s}{\cos\beta} = b \,.\, \frac{z}{a}$$

Digitized by Google

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Beschleunigung für den Fall, dass die Curve als eine Function des Bogens gegeben ist, nehmen die folgende Gestalt an:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varrho}{ds} \cdot v$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d^2\varrho}{ds^2} \cdot v^2 + \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = UR \cdot \frac{v^2}{R} + \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{dv}{dt}$$

das heisst: die Beschleunigung erster Ordnung ist zerlegt in zwei Componenten, und zwar ist die Componente in der Richtung des Radius der ersten Krümmung gleich

$$\frac{v^2}{R}$$

und die Componente in der Richtung der Tangente gleich

$$\frac{dv}{dt}$$

Für die Beschleunigung zweiter Ordnung erhält man

$$\frac{d^3\varrho}{dt^3} = \frac{d^3\varrho}{ds^3} v^3 + 3 \frac{d^2\varrho}{ds^2} v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{d\varrho}{ds} \frac{d^2v}{dt^2}$$

Substituirt man hierin für $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ und $\frac{d^3\varrho}{ds^3}$ die früher gefundenen Werte, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varrho}{dt^3} = UR & \left[-\frac{1}{R^2} \cdot v^3 \frac{dR}{ds} + 3 \frac{v}{R} \frac{dv}{dt} \right] \\ & + Ur \left[\frac{v^3}{R \cdot r} \right] \\ & + \frac{d\varrho}{ds} \left[-\frac{v^3}{R^2} + \frac{d^2v}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

Es ist also die Beschleunigung zweiter Ordnung zerlegt in 3 Componenten; und zwar ist die Componente in der Richtung des Radius der ersten Krümmung gleich

$$-\frac{v^2}{R^2} \frac{dR}{ds} + 3 \frac{v}{R} \frac{dv}{dt}$$

die Componente in der Richtung des Radius der zweiten Krümmung gleich

$$\frac{v^3}{R \cdot r}$$

und die Componente in der Richtung der Tangente gleich:

Digitized by Google

$$- \frac{v^3}{R^2} + \frac{d^2 v}{dt^2} \text{ *)}$$

Mag noch zum Schluss als Beispiel für die Rechnungsweise der bekannte Satz bewiesen werden, dass die Abbildung durch reciproke Radien in den kleinsten Teilen ähnliche Räume liefert.

Ein Vector

$$\varrho = ix + jy + lz$$

hat den absoluten Betrag

$$\operatorname{mod} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Längeneinheit in der Richtung von ϱ ist daher

$$\frac{\varrho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

und der reciproke Radius ϱ' wird zu schreiben sein:

$$\varrho' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\varrho}{r^2}$$

wo der Kürze halber

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

gesetzt ist. Hieraus folgt:

$$d\varrho' = \frac{1}{r^2} d\varrho - 2\varrho \frac{1}{r^3} dr$$

$$= \frac{1}{r^2}[i\,dx + j\,dy + l\,dz] - \frac{2}{r^3} dr\,[ix + jy + lz]$$

$$d\varrho' = i\left\{\frac{dx}{r^2} - \frac{2x}{r^3} dr\right\}$$

$$+ j\left\{\frac{dy}{r^2} - \frac{2y}{r^3} dr\right\}$$

$$+ l\left\{\frac{dz}{\sigma r} - \frac{2z}{r^3} dr\right\}$$

daher der absolute Betrag des Elementes $d\varrho'$

$$\operatorname{mod} d\varrho' = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{r^4} + \frac{4(x^2 + y^2 + z^2) dr^2}{r^6} - \frac{4(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{r^5} dr}$$

nachdem nun

---

*) Vgl. J. Somoff, Theoretische Mechanik pag. 61.

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$$

heben sich die beiden letzten Posten weg, und es bleibt:

$$\frac{\mathrm{mod}\,d\varrho}{\mathrm{mod}\,d\varrho'} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\frac{1}{r^2}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = r^2$$

so dass der Quotient aus zwei entsprechenden unendlich kleinen Strecken unabhängig ist von den Incrementen, was gleichbedeutend ist mit der Aehnlichkeit zweier unendlich kleiner entsprechender Dreiecke.

Man überzeugt sich nach dieser Methode auch leicht, dass der reciproke Wert der einzige ist, dem diese Eigenschaft zukommt.

Anmerkung der Red. zu Seite 403. In dem Producte

$$(1+k+k^2)(x+ky+k^2z) \quad \text{für} \quad k^3=1; \quad x+y+z=0$$

ist nach Definition ein Factor null; denn diese Aussage ist für alle Werte von k richtig. Daher ist die Aussage an jener Stelle, „dass keiner der Factoren als null bezeichnet werden kann" — nicht gleichbedeutend mit der Aussage, dass keiner der Factoren null sei, was nicht der Fall ist. Ueberdies führt die Definition anf den Schluss, dass jeder Factor weder null noch nicht null ist. Da diese und vielleicht noch andre Ergebnisse mit der gewöhnlichen Logik nicht im Einklang sind, so würde es, wofern die getroffenen Bestimmungen über vorliegende Arbeiten hinaus Geltung haben sollen, unerlässlich sein, analoge Distinctionen wie die bei stetig variabeln Elementen gebräuchlichen auch hier anzuwenden.

Digitized by Google

XVIII.

Ueber einige specielle Curven höherer Ordnung.

Von

Josef Wesely,

Professor an der k. k. deutschen Staatsgewerbeschule zu Pilsen.

I.

Die Aufgabe: „Sind zwei concentrische Kreise gegeben, ein rechtwinkliges Dreieck so zu verzeichnen, dass die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, welche den Radius des grösseren Kreises bildet, gefällte Normale die Tangente an den Kreis vom kleineren Radius ist“ — kann mittelst einer speciellen Curve gelöst werden; dieselbe, sowie einige nach ähnlichen Bildungsgesetzen abgeleiteten Curven, sollen im Folgenden näher untersucht werden.

Obige Aufgabe kann jedoch nach zwei Methoden gelöst werden.

1. Methode. Fig. 1. Man construire über dem Kreisradius R als Durchmesser, der zugleich die Hypotenuse $\overline{DO}$ des verlangten Dreiecks bildet, einen Halbkreis; derselbe wird von der im Durchschnittspunkte C der Hypotenuse mit der Kreisperipherie vom Radius r errichteten Normale $\overline{BC}$ im Scheitel B des rechten Winkels geschnitten. Das verlangte Dreieck ist sonach BDO. Bekanntlich ist hier

$$\overline{BC}^2 = (R-r).r$$

und C der Tangentenpunkt. Der geometrische Ort der Scheitel B, B_1, B_2, ... der allen Tangentialpunkten C, C_1, C_2, ..., welche in der Kreisperipherie vom Radius r liegen, zugehörigen rechtwinkligen Dreiecke BDO, $B_1D_1O_1$, $B_2D_2O_2$, ... ist ein dritter concentrischer Kreis vom Radius

$$r_1 = \sqrt{Rr}$$

2. Methode. Fig. 1, Wir suchen das den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Dreieck versuchsweise, indem wir der Reihenfolge nach die Dreiecke construiren: B_4D_4O, B_3D_3O, BDO, B_1D_1O, . . . , und ziehen dann die zugehörigen Normalen $\overline{B_4C_4}$, $\overline{B_3C_3}$, $\overline{BC}$, $B_1'C_1'$, . . .; verbinden wir die erhaltenen Normalenfusspunkte C_4, C_3, C, C_1', . . . so schneidet diese Curve den Kreis im Punkte C.

Die Normalenfusspunkte C für alle Dreieckslagen geben eine Curve, welche für einen gegebenen Durchmesser als eine Kathetenlage der verlangten Dreiecke — uns die vier anderen zugehörigen Schnittpunkte der Tangentenperpendikel liefert. Diese Curve hat in O einen vierfachen Punkt.

II.

Curven höherer Ordnung, deren Bildungsgesetz durch entsprechende Constructions-Combinationen erhalten wird.

1. Gegeben sei: Fig. 2. ein Kreis vom Radius R und dem Mittelpunkte O als Polpunkt, d sei ein Durchmesser desselben. Eine Normale im Punkte P_0 von d schneide den Kreis in zwei Punkten P_1P_2. Fällt man aus sämtlich in d angenommenen Punkten P_0 die bezüglichen Normalen

$$\overline{BN} = \overline{BP_0}$$

auf die zugehörigen Radien $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, . . . so liegen ihre Fusspunkte B, . . . auf einer Curve sechster Ordnung C^6. Diese Curve ist dieselbe, welche wir bei der 2. Auflösungsmethode der gegebenen Aufgabe verwendet hatten. Die Curve C^6 hat in O einen vierfachen Punkt, die imaginären Kreispunkte sind Doppelpunkte.

Die Normalen umhüllen eine Curve vierter Classe C_4.

Die Coordinatengleichung der Curve C^6 ist:

$$x^6 - (R^2 - 3y^2)x^4 + 3y^4x^2 + y^6 = 0 \tag{1}$$

Die Polargleichung der Curve C^6 ist:

$$\varrho = R.\cos^2.u \tag{I}$$

$$\overline{BN} = \frac{R}{2}.\sin 2u; \quad \overline{BN} = R.\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Fig. 3. Eine Curve der nämlichen Art erhalten wir, wenn an die Stelle des Durchmessers d eine beliebige Gerade d_1, tritt, und der Polpunkt O vom Kreismittelpunkte M weiter gerückt wird und zwar so, dass $\overline{OM} \perp d_1$ ist.

Digitized by Google

2. Gegeben sei: Fig. 4. ein Kreis vom Radius R und dem Mittelpunkte O als Polpunkt, d sei ein Durchmesser desselben. Eine Normale im Punkte P_0 von d schneide den Kreis in zwei Punkten $P_1 P_2$.

Von P_0 als Mittelpunkt ein Kreis durch $P_1 P_2$ construirt wird von den Geraden $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ ein zweites mal in zwei Punkten einer Curve sechster Ordnung geschnitten. Sie hat den Punkt O zum vierfachen Punkte.

Die Coordinatengleichung dieser Curve C^6 ist:

$$2)\qquad x^6-(R^2-3y^2)x^4+3y^4x^2+2R^2y^2x^2-R^2y^4+y^6=0$$

Die Polargleichung dieser Curve C^6 ist:

$$\text{II)}\qquad \varrho = R.\cos 2u$$

$$\overline{BN} = R.\cos.2u.\operatorname{tg} u; \quad \overline{BN} = R.\frac{y.(x^2-y^2)}{x.(x^2+y^2)}$$

Weitere Eigenschaften dieser Curve Fig. 5. sind:

a) Die aus sämtlichen in d angenommenen Kreismittelpunkten P_0, P_0', P_0'' . . . mit den Halbmessern $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_0'P_1'}$, $\overline{P_0''P_1''}$ . . . . gezogenen Kreise hüllen eine Ellipse ein, deren Mittelpunkt der Polpunkt O ist und welche zur kleinen Halbaxe $b = R$ und zur grossen Halbaxe $a = R.\sqrt{2}$ hat. Die Brennpunkte dieser ersten Ellipse sind die in d liegenden Kreisperipheriepunkte F_1 und F_2. — Eine zweite flächengleiche Ellipse von demselben Mittelpunkte O hüllen jene Kreise ein, deren Mittelpunkte P_0, P_0', P_0'', . . . auf dem zu d senkrechten Kreisdurchmesser d_1 liegen. Die Brennpunkte dieser zweiten Ellipse sind die in d_1 liegenden Kreisperipheriepunkte F_1' und F_2'. Beide Ellipsen schneiden sich in vier Punkten $K_1 K_2 K_1' K_2'$, welche diametral mit dem Polpunkte O verbunden, zwei auf einander senkrecht stehende Linien $\overline{K_1K_2'}$ senkr. auf $\overline{X_2L_1'}$ bilden und mit den Durchmessern d und d_1 Winkel von 45° einschliessen.

b) Die auf die zugehörigen Radienvectoren ϱ . . . in den einzelnen Punkten B . . . der Curve C^6 errichteten Normalen hüllen eine Astrois ein, die einem Kreise von demselben Polpunkte O als Kreismittelpunkt und vom Radius $2R$ zugehört. Die vier Spitzen der Astrois liegen in den verlängerten Geraden $\overline{OK_1}$, $\overline{OK_2}$, $\overline{OK_1'}$, $\overline{OK_2'}$.

Digitized by Google

c) Tangentenconstruction. Fig. 4.

Ist B ein Punkt der Curve C^6, welcher dem Polarwinkel u entspricht, so construiren wir

$$h = \mathrm{tg}.2u = \overline{An}$$

tragen $\overline{nn_1} = h$ auf die Verlängerung von $\overline{An}$ auf, verbinden n_1 mit O und erhalten den Winkel

$$\beta = \text{Wkl. } n_1 Od$$

Diesen Winkel β, dessen

$$\mathrm{cotg}.\beta = 2h$$

ist, schliesst auch die Tangente $\overline{u}$ im Punkte B der Curve mit dem verlängerten Radiusvector $\overline{OB} = \varrho$ ein. Machen wir also

$$\text{Wkl. } P_1 Bt = \text{Wkl. } \beta$$

so ist $\overline{tB}$ die verlangte Tangente zum Punkte B der Curve C^6, deren Polargleichung

$$\varrho = R.\cos.2u \quad \text{ist.}$$

d) Die in den Punkten $B, \ldots$ der Curve C^6 auf den den einzelnen Punkten zugehörigen Tangenten — errichteten Normalen hüllen eine Evolute vom Polpunkt O als Symmetrie-Curve mit acht Spitzen ein. Vier Spitzen liegen auf den Linien $\overline{OK_1}$, $\overline{OK_2}$, $\overline{OK_1'}$, $\overline{OK_2'}$ jede Spitze vom Pol um den Halbmesser R abstehend; während die anderen zu je zwei auf d und d_1 liegenden vier Spitzen vom Polpunkte O um $\frac{8}{9}R$ abstehen.

Die Krümmungsradien der Evolute sind:

für $u = 0$ ist $r_0 = \frac{1}{9}R$, folglich der Abstand der Spitze vom Pole O gleich $\frac{8}{9}R$;

für $u = 45^0$ ist $r_{45^0} = R$, folglich die Spitze der Evolute in der Kreisperipherie vom Radius R und dem Mittelpunkte O;

für $u = 90^0$ ist $r_{90^0} = \frac{1}{9}R$, der Abstand der Evolutenspitze vom Pole O gleich $\frac{8}{9}R$.

3. Gegeben sei: Fig. 6. ein Kreis vom Radius R und dem Mittelpunkte M, O als Polpunkt sei ein Punkt der Kreisperipherie, d sei ein durch O gehender Durchmesser des Kreises. Eine Normale im Punkte P_0 von d schneide den Kreis in zwei Punkten $P_1 P_2$. Fällt man aus sämtlich in d angenommenen Punkten P_0, die

Digitized by Google

bezüglichen Normalen $\overline{BN} = \overline{BP_0}$ auf die zugehörigen Strahlen $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, . . . so liegen ihre Fusspunkte B, . . . auf einer Curve vierter Ordnung C^4. Sie hat im Punkte O einen dreifachen Punkt. Die Normalen umhüllen eine Curve dritter Classe C_3.

Die Coordinatengleichung der Curve C^4 ist:

3) $$x^4 - 2R.x^3 + 2y^2x^2 + y^4 = 0$$

Die Polargleichung der Curve C^4 ist:

III) $$\varrho = 2R.\cos^3.u$$

$$\overline{BN} = 2R.\sin.2u.\cos.u; \quad \overline{BN} = R\cdot\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Fig. 7. Eine Curve der nämlichen Art erhalten wir, wenn an die Stelle des Durchmessers d eine beliebige durch den Polpunkt O gezogene Gerade d_1 tritt.

4. Gegeben sei: Fig. 8. ein Kreis vom Radius R und dem Mittelpunkte M, O als Polpunkt sei ein Punkt der Kreisperipherie, d sei ein durch O gehender Durchmesser des Kreises. Eine Normale im Punkte P_0 von d schneide den Kreis in zwei Punkten P_1P_2. Fällt man von P_1 auf $\overline{OP_2}$ und von P_2 auf $\overline{OP_1}$ Normalen, so liegen ihre Fusspunkte B, . . . auf einer Curve vierter Ordnung C^4. Sie hat in O einen dreifachen Punkt.

Die Normalen umhüllen eine Curve dritter Classe C_3.

Die Coordinatengleichung dieser Curve C^4 ist:

4) $$x^4 - 2R.x^3 + 2y^2x^2 + 2R.y^2.x + y^4 = 0$$

Die Polargleichung der Curve C^4 ist:

IV) $$\varrho = 2R.\cos.2u.\cos.u$$

$$\overline{BN} = 2R.\cos.2u.\sin.u; \quad \overline{BN} = R.\frac{2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Fig. 9. Eine Curve der nämlichen Art erhalten wir, wenn an die Stelle des Durchmessers d eine beliebige durch den Polpunkt gezogene Gerade d_1 tritt.

III.

Behandeln wir nun die erste der angegebenen Curven C^6 analytisch, indem wir die wichtigeren Resultate dieser Untersuchungen in Kürze anführen.

Digitized by Google

a) Die Polargleichung der Curve, bezogen auf $\overline{AO}$ als Polaraxe, ist:

$$\rho = R.\cos^2.u$$

Sind x und y die Coordinaten des Punktes C der Curve, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt O ist, so erhalten wir als Gleichung der Curve C^6:

$$x^6 - (R^2 - 3y^2)x^4 + 3y^4x^2 + y^6 = 0$$

dieselbe ist sonach von der sechsten Ordnung.

b) Bestimmen wir weiter, für welchen Wert von x die Ordinate y ein Maximum wird. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3}R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - x}{y}$$

Für $\frac{dy}{dx} = 0$ wird $x = 0{\cdot}544.R$

Suchen wir den zweiten Differentialquotienten von y nach x.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(\tfrac{2}{3}R^{\frac{2}{3}}.\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 1\right) - \frac{1}{y^2}\left(\tfrac{2}{3}R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - x\right)\frac{dy}{dx}$$

Für $\frac{dy}{dx} = 0$ und $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}R^{\frac{2}{3}}}$ gesetzt, wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{2}{3}y$$

demnach für $x = 0{\cdot}544R$ der zweite Differentialquotient negativ, mithin die Ordinate y ein Maximum.

c) Mit Zuhilfenahme der Curve und im Sinne der beiden Gleichungen

$$\rho = \cos^2 u \quad \text{und} \quad \sin^2 u = 1 - \cos^2 u$$

lassen sich die Quadrate der Cosinuse und Sinuse beliebiger Winkel durch Construction der zugehörigen Radienvectoren, beziehungsweise der Differenz zwischen dem als Einheit angenommenen R und dem, dem Polarwinkel u zugehörigen Radiusvector ρ dieser Curve C^6 graphisch bestimmen.

Für $u = 0$ ist $\rho = R$, für $u = 45^0$ ist $\rho = \frac{1}{2}R$, für $u = 60^0$ ist $\rho = \frac{1}{4}R$, für $u = 90^0$ ist $\rho = 0$. Für $\rho = \frac{1}{2}R$ ist $x = y$ und der Polarwinkel $u = 45^0$.

Jeder beliebige Radiusvector schneidet die Curve in zwei Punkten,

Digitized by Google

welche vom Pole symmetrisch abstehen; die Krumme liegt also in Beziehung auf die Polaraxe symmetrisch.

d) Tangenten-Constructionen an die Curve C^6. Fig. 11.

1. Ist die Polargleichung der Curve bekannt, dann besttmmt man bekanntlich die trigonometrische Tangente des Winkels α, den der Radiusvector ϱ mit der zugehörigen geometrischen Tangente bildet aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = \varrho \cdot \frac{du}{d\varrho}$$

wobei u der Winkel ist, den der Radiusvector ϱ mit der Polaraxe einschliesst.

Transformirt man die Polargleichung der Curve auf die Form

$$\varrho = \frac{R}{2}(1 + \cos . 2u)$$

so wird

$$\frac{d\varrho}{du} = -R \sin . 2u$$

daher

$$\varrho \cdot \frac{du}{d\varrho} = -\frac{\cos^2 u}{\sin 2u} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} u$$

und

$$\operatorname{tg}\alpha = -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} . u$$

oder

$$\operatorname{cotg}\alpha = -2 \operatorname{tg} . u$$

Nach der letzten Gleichung kann die Construction der geometrischen Tangente t für jeden Punkt der Curve C^6 durchgeführt werden. — Sei C ein Punkt dieser Curve, dann ist

$$\operatorname{tg} u = \frac{h}{R}$$

$R = 1$ gesetzt, ist

$$\operatorname{tg} u = h$$

somit

$$2 \operatorname{tg} u = 2h$$

und

$$\operatorname{cotg}\alpha = -2h, \quad \operatorname{cotg}(180 - \alpha) = 2h$$

Suchen wir jedoch den Winkel β auf, den die Verlängerung des Radiusvector mit der geometrischen Tangente bildet, weil β zur Construction bequem ist, so ist

$$\operatorname{cotg}\beta = 2h = 2 \operatorname{tg} u$$

Man mache also

Digitized by Google

$$\overline{AF} = 2.\overline{AE} = 2h$$

so ist

$$2h = 2\mathrm{tg}.u$$

F mit O verbunden, ist $FOG = \beta$ der gesuchte Winkel.

2. Eine andere Tangentenconstruction Fig. 12. wurde von Prof. C. Pelz in Graz abgeleitet und mir mitgeteilt.

Sei I ein Punkt der Curve für das Dreieck AOC. Im Kreisperipheriepunkte A ziehen wir die Tangente T an den Kreis vom Radius R, verlängern $\overline{BC}$ bis zum Durchschnittspunkte D mit der Tangente T, ziehen $\overline{ED}$ normal auf $\overline{BD}$ und $\overline{CF}$ als Verlängerung von $\overline{AC}$, so schneidet die verlängerte Gerade $\overline{IC}$ in E. Ziehen wir wir nun $\overline{FEG}$ parallel zu $\overline{BD}$, tragen $\overline{FE} = \overline{EG}$ auf und verbinden O mit G, so wird $\overline{IE}$ von $\overline{OG}$ in o geschnitten. Mache man endlich $\overline{Om} = \overline{mo}$, dann ist $\overline{Im}$ die Normale zum Punkte I der Curve, folglich die darauf Senkrechte im Punkte I die Tangente $\overline{u}$ an diesem Punkte I der Curve C^6

Um die Richtigkeit dieser Construction zu beweisen, betrachten wir zwei Punkte I und II der Curve. Durch $OIIIo$ lässt sich immer ein Kreis beschreiben. Fällt II unendlich nahe an I, dann berührt dieser Kreis unsere Curve in I, und die Verbindungslinie $\overline{mI}$ wird eine Normale. Es handelt sich daher um den Durchschnittspunkt zweier unmittelbar aufeinander folgenden Geraden $\overline{Io}$, $\overline{IIo}$. Liegt I unendlich nahe an II, so liegt A_1 unendlich nahe an A.

Wir verbinden demnach einzelne Punkte (x) der Tangente T mit O und fällen von diesen Punkten Normalen zu $\overline{BO}$ und von deren Fusspunkten (y) Senkrechte zu $\overline{Ox}$. Dadurch wird der Strahlenbüschel (Ox) . . . projectivisch der Punktreihe (y) . . . und die von (y) . . . zu den entsprechenden Strahlen gefällten Perpendikel hüllen eine Parabel ein *). — Diese Parabel hat, wie man für specielle Lagen von $\overline{Ox}$ findet, die im Durchschnittspunkte der Tangente T mit $\overline{OB}$ zu $\overline{OB}$ errichtete Normale und den Träger zur Tangente und berührt den letzteren im Punkte O. Wir kennen demnach von dieser Parabel drei Tangenten und den Berührungspunkt auf einer und können den Berührungspunkt jeder übrigen nach dem Brianchon'schen Satze bestimmen. Nach diesem schneiden sich bekannt-

*) Siehe Steiner J., Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, 1832. p. 302.

Digitized by Google

lich die drei Verbindungslinien der Gegenecken eines einem Kegelschnitte umgeschriebenen einfachen Sechsseites in einem festen Punkte. Daraus ergibt sich die bereits früher angeführte Normalen- und Tangenten-Construction an die Curve

3. Tangenten-Construction Fig 2. nach Dr. C. Beyel in Zürich

Sind BB_1 zwei in Beziehung auf O geometrisch gelegene Punkte der Curve C^6, so schneiden wir $\overline{OA}$ mit der Normale in B zu $\overline{OB}$ und erhalten den Punkt S. $\overline{SB_1}$ schneidet dann aus der Normale in O zu $\overline{OB}$ einen Punkt T der Tangente in B an C^6. Der Ort der Punkte T ist eine Curve der achten Ordnung.

e) Untersuchen wir, für welchen Winkel u der Radiusvector ein Maximum wird.

Der Aufgabe gemäss muss

$$\frac{d\varrho}{du} = 0$$

und

$$\frac{d^2\varrho}{du^2} = -2R.\cos.2u$$

negativ sein; somit

$$-\sin 2u = 0$$

Für $u = 0$ wird

$$\frac{d^2\varrho}{du^2} = -2R$$

daher negativ. $\varrho = R$ wird demnach für $u = 0$ ein Maximum.

f) Die allgemeine Gleichung zur Bestimmung des Krümmungsradius r einer Curve, deren Polargleichung $\varrho = f(u)$ ist, hat bekanntlich die Form:

$$r = \pm \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2 - \varrho \cdot \frac{d^2\varrho}{du^2}}$$

Für unsere Curve C^6 ist

$$\frac{d\varrho}{du} = -R.\sin.2u, \quad \frac{d^2\varrho}{du^2} = -2R.\cos.2u$$

folglich

$$r = \pm \frac{R}{3}.\cos.u \frac{(1+3.\sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}{1+\sin^2 u}$$

Digitized by Google

Für $u = 0$ ist $r_0 = \frac{R}{3}$. Die Evolute der Curve C^6 schneidet sonach die Polaraxe in dem Abstande $\frac{2}{3}R$ vom Pole O der Evolvente und weil sämtliche Krümmungshalbmesser einer Curve Tangenten sind an der Evolute dieser Curve, so bildet dieser Punkt zugleich eine Spitze der Evolute.

Für $u = 90^0$ ist $r_{90} = 0$. Der Krümmungsradius für den Polpunkt O gleich 0, die Evolvente hat somit dort ihre Spitze.

Für $u = 45^0$ ist $r_{45^\circ} = 0\cdot 621 . R$.

Bezogen auf rechtwinklige Coordinaten erhält man bekanntlich den Krümmungsradius aus der allgemeinen Gleichung:

$$r = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Für den Krümmungsradius unserer Curve C^6 erhält sonach die Gleichung die Form:

$$r = \pm \frac{R}{3} \cdot \frac{x(x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2)}$$

Diese Gleichung gibt für r_0, r_{45}, r_{90} . . . dieselben Werte wie früher.

g) Die Figur 13. zeigt die Gestalt der von den zu den Radienvectoren der Curve zugehörigen Normalen als Tangenten an dieselbe erzeugten Enveloppe. Die Normalen umhüllen eine Curve vierter Classe C_4. Beschreibt man aus Punkten, in denen die Normalen an die Radienvectoren die Abscissenaxe schneiden, mit den durch die Abscissenaxe begrenzten Normallängen als Radien-Kreise, so hüllen dieselben eine neue Curve ein, welche in Beziehung auf die erste Curve affin ist und die Polargleichung hat

$$\varrho' = R' . \cos^2 u$$

h) Das rechtwinkelige Dreieck BOD (Fig. 10.) wird durch die Normale $\overline{BC}$ zu $\overline{OD}$ in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt, deren bezügliche Flächen t' und t_1' sein mögen. Es lässt sich leicht beweisen, dass für jeden beliebigen Polarwinkel u das Verhältniss $\frac{t'}{t_1'}$, constant ist, nämlich

$$\frac{t'}{t_1'} = \mathrm{tg}^2 u$$

Digitized by Google

Bezeichnet man mit γ jenen Winkel, den die Tangente t zum Punkte C der Curve C^6 mit OA einschliesst, so lässt sich zeigen, dass

$$\operatorname{tg}(180^0-\gamma) = \tfrac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{t'}{t_1'}} - \sqrt{\frac{t_1'}{t'}}\right)$$

und da für $u = 45^0$ $t' = t_1'$ wird, so ist

$$\operatorname{tg}(180-\gamma_{u_{45^0}}) = \tfrac{1}{3}$$

Die Gleichung

$$-\operatorname{tg}\gamma = \tfrac{1}{3}(2\operatorname{tg}u - \operatorname{cotg}u)$$

kann zur Construction jenes Winkels γ benutzt werden, den die geometrische Tangente zum Punkte xy der Curve C^6 gezogen, mit der Abscissenaxe bildet.

i) Quadratur der Curve. — Der Flächeninhalt einer Curve, deren Gleichung auf Polarcoordinaten bezogen $\varrho = f(u)$ ist, wird nach der bekannten Formel bestimmt:

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u} \varrho^2 \,.\, du$$

Für unsere Curve gilt die Gleichung

$$\varrho^2 = R^2 . \cos^4 u$$

folglich hat man

$$J = \tfrac{1}{2}R^2 . \int_{u_0}^{u} \cos^4 u \,.\, du$$

Das bestimmte Integral hat den Wert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \,.\, du = \frac{1}{2}\frac{3}{.4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

daher

$$\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} J = \tfrac{1}{2}R . \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{32}\pi R^2$$

demnach

$$\Big|_0^{2\pi} J = \tfrac{3}{8}\pi R^2 = J_1$$

Um die Flächengleichung eines durch einen beliebigen Radiusvector begrenzten Stückes der Curve aufzustellen, hat man:

$$\int \cos^4 u\,.du = \frac{\sin u \cos^3 u}{4} + \tfrac{3}{4}\int \cos^2.\,u\,du$$

oder da

$$\int \cos^2 u\,.du = \tfrac{1}{4}.\sin 2u + \tfrac{1}{2}u$$

ist, auch

$$\int \cos^4 u\,.du = \tfrac{1}{4}[\sin u\,.\cos^3 u + 3(\tfrac{1}{4}\sin 2u + \tfrac{1}{2}u)]$$

$$\int \cos^4 u\,.du = \tfrac{1}{16}[4\sin u\,.\cos^3 u + 3\sin.2u + 6u]$$

somit

$$\Big|_0^u J = \tfrac{1}{32}R^2 \int_0^u [4\sin u \cos^3 u + 3\sin.2u + 6u]$$

Dieselbe Flächeninhaltsformel, wie J_1 findet man auch für die Astrois, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{oder} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \text{ist}$$

Für die von der ganzen Curve (Astrois) eingeschlossene Fläche I_1 bekommt man die Gleichung:

$$I_1 = \tfrac{3}{8}\pi a^2$$

Wir erhalten somit eine sehr interessante Beziehung, der zufolge

$$J_1 = I_1$$

ist; d. h.: „Es ist der Flächeninhalt dieser horizontalen Contourcurve der Regelfläche vom vierten Grade gleich dem Flächeninhalte der Vertical-Projection dieser horizontalen Contourcurve, oder unserer Curve von der sechsten Ordnung C^6.

k) Rectification der Curve. — Die Länge eines Bogens der Curve, deren Gleichung

$$\varrho = f(u)$$

ist, wird für Polarcoordinaten — wie folgt — bestimmt.

Bekanntlich ist:

$$s = \int_{u_1}^{u} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2}\,.\,du$$

Digitized by Google

für ϱ^2 und $\left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2$ die Werte gesetzt, wird

$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{R^2 \cos^4 u + 4R^2 \sin^2 u \cos^2 u} \, . \, du$$

auch

$$s = R \int_{u_0}^{u} \cos u \, . \, du \, (1 + 3\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}$$

somit

$$s = R \int_{u_0}^{u} d \sin u \, (1 + 3\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}$$

Setzen wir $\sin u = z$, so ist $d \sin u = dz$, folglich

$$s = R \int_{u_0}^{u} dz \sqrt{1 + 3z^2}$$

Substituirt man

$$\sqrt{1 + 3z^2} = u$$

d. h.

$$du = \frac{3z \, . \, dz}{\sqrt{1 + 3z^2}}$$

und

$$dz = dv$$

somit

$$z = v$$

dann erhalten wir durch teilweise Integration mit Zuhilfenahme der Formel

$$\int u \, . \, dv = uv - \int v \, du$$

in unserem Falle

$$\int dz \, . \sqrt{1 + 3z^2} = -\int \frac{3z^2 \, dz}{\sqrt{1 + 3z^2}} + z\sqrt{1 + 3z^2}$$

Addirt man zu dieser letzten Gleichung folgende Gleichheit:

$$\int \frac{1 + 3z^2}{\sqrt{1 + 3z^2}} \, dz = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + 3z^2}} + \int \frac{3z^2 \, dz}{\sqrt{1 + 3z^2}}$$

so wird

$$2 \int dz \, . \sqrt{1 + 3z^2} = z\sqrt{1 + 3z^2} + \int \frac{dz}{\sqrt{1 + 3z^2}}$$

Suchen wir nun das $\int \frac{dz}{\sqrt{1 + 3z^2}}$ dadurch, dass wir für

Digitized by Google

$$3z^2 = w^2$$

substituiren, so ist:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+3z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log[w + \sqrt{1+w^2}]$$

auch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+3z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log[\sqrt{3}\,.\,z + \sqrt{1+3z^2}]$$

sonach

$$\int dz\,.\,\sqrt{1+3z^2} = \tfrac{1}{2}[z\,.\,\sqrt{1+3z^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log(\sqrt{3}\,.\,z + \sqrt{1+3z^2})]$$

endlich

$$s = \frac{R}{2} \Big|_0^u [\sin u \sqrt{1+3\sin^2 u} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log(\sqrt{3}\,.\,\sin u + \sqrt{1+3\,.\,\sin^2 u})]$$

und

$$\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} s = \frac{R}{2} \cdot \left[2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log(2+\sqrt{3})\right] = \frac{R}{2}\,.\,2 \cdot 7603 = 1 \cdot 3801\,.\,R$$

Die geschlossene Curve, oder der Umfang der ganzen Curve C^6 ist:

$$s_1 = \Big|_0^{2\pi} s = 4\,.\,\frac{R}{2}\,.\,2 \cdot 7603 = 5 \cdot 5206\,.\,R$$

Für die Astrois ist der Umfang $S = 6a$; demnach der Umfang der Astrois grösser, als jener unserer Curve sechster Ordnung C^6.

Digitized by Google

XXII.

Höhenschnitt-Tetraeder mit rationalen Kanten.

Von

R. Hoppe.

Die Kanten eines Tetraeders seien (u, v) (u_1, v_1) (u_2, v_2), wo die eingeklammerten einander gegenüber liegen, u, u_1, u_2 ein Dreikant, v, v_1, v_2 ein Dreieck bilden.

Nach dem Aufsatz Nr. XVII. Gl. (5) ist, wie auch sonst bekannt, notwendige und zureichende Bedingung dafür, dass die 4 Höhenlote sich in einem Punkte treffen:

$$u^2+v^2 = u_1{}^2+v_1{}^2 = u_2{}^2+v_2{}^2 = r^2 \tag{1}$$

Es ist nun leicht, das Kantensystem, welches diese Bedingung erfüllt, allgemein rational in drei Argumenten, $\frac{u}{v}$, m, n, und einer willkürlichen Linieneinheit darzustellen.

Zerlegt man nämlich die Gleichung $u_1{}^2 - u^2 = v^2 - v_1{}^2$ in

$$u_1 + u = m(v+v_1), \quad m(u_1-u) = v - v_1$$

und entwickelt daraus u_1 und v_1, so kommt:

$$u_1 = \frac{(m^2-1)u+2mv}{m^2+1}; \quad v_1 = \frac{2mu-(m^2-1)v}{m^2+1} \tag{2}$$

Ebenso erhält man:

$$u_2 = \frac{(n^2-1)u+2nv}{n^2+1}; \quad v_2 = \frac{2nu-(n^2-1)v}{n^2+1} \tag{2}$$

Sind dann u, v, m, n rational, so sind alle 6 Kanten rationale Zahlen.

Unsere Aufgabe wird es nun sein, die 3 Argumente so zu begrenzen, dass jedem Systeme derselben ein und nur ein (reelles, nicht degenerirtes) Tetraeder entspricht.

Zuerst muss gefordert werden, dass alle Kanten positiv sind. Eine Betrachtung der 4 Ausdrücke (2) zeigt sofort, dass dann auch m und n positiv sein müssen.

Die Bedingungen $u_1 > 0$; $v_1 > 0$ lassen sich, gemäss (2) und mit Anwendung von (1), schreiben:

$$(mu+v)^2 > r^2; \quad (mv-u)^2 < r^2$$

Die erste gibt:

$$m > \frac{r-v}{u}$$

die letztere

$$\text{entweder:} \quad m \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} \frac{u}{v}; \quad m < \frac{r+u}{v}$$

$$\text{oder:} \quad m \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{<} \frac{u}{v}; \quad m > \frac{u-r}{v}$$

folglich kann $m >$ oder $< \frac{u}{v}$ sein, muss aber in beiden Fällen $< \frac{r+u}{v}$ sein Es ergibt sich:

$$\frac{r-v}{u} < m < \frac{r+u}{u}; \quad \frac{r-v}{u} < n < \frac{r+u}{v} \tag{3}$$

Differentiirt man den Ausdruck von u_1 bei constanten u, v, so kommt:

$$\frac{\partial u_1}{\partial m} = \frac{2v_1}{m^2+1} \tag{4}$$

Folglich wächst in dem Intervalle, wo v_1 und v_2 positiv sind, u_1 mit m und u_2 mit n, während bzhw. v_1 und v_2 abnehmen.

Die Bedingungen, unter denen einem Kantensystem ein reelles Tetraeder entspricht, findet man am einfachsten, indem man für irgend ein Axensystem die Coordinaten der Ecken bestimmt und reell setzt. Die Ebene des Winkels zwischen u und u_1 sei Ebene der xy, der Schenkel u Axe der x, der Scheitel Anfang der xyz. Die Coordinaten der Ecken seien durch die Indices 1, 2, 3, 4 unterschieden. Dann ist:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0 \\ x_2 = u; \quad x_3{}^2 + y_3{}^2 = u_1{}^2; \quad x_4{}^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 = u_2{}^2 \\ (x_3 - u)^2 + y_3{}^2 = r_2{}^2 \\ (x_4 - u)^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 = r_1{}^2 \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + z_4{}^3 = r^2 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Die 3 letzten Gleichungen geben:

$$\left.\begin{array}{l} u^2 + u_1{}^2 - 2u\,x_3 = r_2{}^2 \\ u^2 + u_2{}^2 - 2u\,x_4 = r_1{}^2 \\ u_1{}^2 + u_2{}^2 - 2(x_3 x_4 + y_3 y_4) = r^2 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Nach Gl. (1) ist

$$u^2 + u_1{}^2 - r_2{}^2 = u^2 + u_2{}^2 - r_1{}^2 = u_1{}^2 + u_2{}^2 - r^2 = q \qquad (7)$$

daher nach den Gl. (6)

$$x_3 = x_4 = \frac{q}{2u}; \quad x_3 x_4 + y_3 y_4 = \frac{q}{2} \qquad (8)$$

woraus weiter:

$$y_3{}^2 = u_1{}^2 - \frac{q^2}{4u^2}; \quad y_3 y_4 = \frac{q}{2} - \frac{q^2}{4u^2} \qquad (9)$$

$$y_3{}^2 z_4{}^2 = u_1{}^2 u_2{}^2 - \frac{q^2 r^2}{4u^2} \qquad (10)$$

Hiermit sind alle Coordinaten bestimmt und ausser y_3 und z_4 alle rational. Nun ist aber

$$r^2 > u_2{}^2$$

Ist also $y_3{}^2 z_4{}^2$ positiv, so ist es nach (9) auch $y_3{}^2$, mithin auch $z_4{}^2$. Folglich ist, da weder y_3 noch z_4 null sein kann,

$$(q\,r)^2 < (2uu_1\,u_2)^2 \qquad (11)$$

oder

$$0 \leqq \pm\, q\, r < 2u\, u_1\, u_2 \qquad (12)$$

allein ausreichende Bedingung dafür, dass alle Coordinaten reell sind, dass also ein Tetraeder mit den gegebenen Kanten existirt.

Hierzu einige beiläufige Bemerkungen. Aus der Gl. (8) $x_3 = x_4$ ersieht man, dass der Fusspunkt des Höhenlots 4, dessen Basis das Dreieck (1, 2, 3), in ein Höhenlot dieses Dreiecks fällt. Da über die Wahl der Kanten keine Voraussetzung gemacht ist, so muss er auch in die andern Höhenlote, also in den Höhenschnitt fallen. Das gleiche muss auch von den andern Höhenloten des Tetraeders gelten, und man hat den Satz:

Digitized by Google

„Die Fusspunkte der Höhenlote eines Höhenschnitt-Tetraeders „sind die Höhenschnittpunkte der Seiten.“

Ferner erkennt man durch Figurbetrachtung, dass der Inhalt des Tetraeders

$$T = \tfrac{1}{6}x_2 y_3 z_4 = \tfrac{1}{6}u\, y_3 z_4$$

ist. Daher ist nach Gl. (10)

$$(2u u_1 u_2)^2 - (q r)^2 = 144 T^2 \qquad (13)$$

Unter der Grösse also, die positiv sein muss, hat man das Quadrat des Tetraeders zu verstehen.

Es bleibt zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen m und n enthalten sein müssen, damit keine 2 Wertpare dasselbe Tetraeder ergeben.

Die Gegenkantenpare seien, jedes für sich nach der Grösse geordnet, folgende, so dass man hat:

$$w \overset{=}{>} w'; \quad w_1 \overset{=}{>} w_1'; \quad w_2 \overset{=}{>} w_2'$$

Dann sind nur folgende 2 Fälle möglich. Bilden die Kanten w, w_1, w_2 ein Dreikant, w', w_1', w_2' ein Dreieck, so setze man w, w_1, w_2 nach der Grösse geordnet $= u, u_1, u_2$ und $w', w_1', w_2' = v, v_1, v_2$; dann hat man die Scala:

$$u_2 \overset{=}{>} u_1 \overset{=}{>} u \overset{=}{>} v \overset{=}{>} v_1 \overset{=}{>} v_2 > 0 \qquad \text{I.}$$

Bilden dagegen die kleineren Kanten ein Dreikant, die grösseren ein Dreieck, so setze man wieder nach der Grösse geordnet $w', w_1', w_2' = u, u_1, u_2$ und $w, w_1, w_2 = v, v_1, v_2$; dann hat man die umgekehrte Scala:

$$0 < u_2 \overset{=}{<} u_1 \overset{=}{<} u \overset{=}{<} v \overset{=}{<} v_1 \overset{=}{<} v_2 \qquad \text{II.}$$

Wir unterscheiden demgemäss **spitze** Tetraeder, für welche die erste, und **flache**, für welche die zweite Scala gilt.

Scala I.

Aus $u_1 \overset{=}{>} u$ geht hervor:

$$m \overset{=}{>} \frac{u}{v}$$

Die neue untere Grenze ist grösser als die alte; denn

$$\frac{r-v}{u} = \frac{u}{r+v} < \frac{u}{v}$$

Da überdies nach (4) m mit u_1 wächst, so hat man jetzt:

$$\frac{u}{v} \overset{=}{<} m \overset{=}{<} n < \frac{r+u}{v} \tag{14}$$

Bei Scala I. wird $q > 0$; daher lautet (12):

$$u_1^2 + u_2^2 - v^2 < \frac{2uu_1u_2}{r} \quad \text{oder}$$

$$\left(u_2 - \frac{uu_1}{r}\right)^2 < \left(\frac{vv_1}{r}\right)^2$$

Da nun

$$u_2 \overset{=}{>} u_1 > \frac{uu_1}{r}$$

ist, so folgt:

$$u_2 < \frac{uu_1 + vv_1}{r} \tag{15}$$

Damit aber ein $u_2 \overset{=}{>} u_1$ existirt, so muss auch

$$u_1 < \frac{uu_1 + vv_1}{r} \tag{16}$$

das ist

$$(r-u)u_1 < rv_1$$

sein. Drückt man u_1 und v_1 in m aus, so findet man:

$$[m(r-u)(2u+r) - v(2u-r)]^2 < 2r^3(r-u)$$

Die Basis zur Linken wächst mit m; für das kleinste m nach (14) wird sie

$$= r^2\frac{r-u}{v} > 0$$

folglich ist sie stets positiv, und man hat:

$$m < \frac{v(2u-r) + r\sqrt{2r(r-u)}}{(r-u)(2u+r)} = M \tag{17}$$

Die Berechnung zeigt, dass die neue Grenze innerhalb der alten Grenzen liegt, denn man findet:

$$M - \frac{r+u}{v} = -\frac{2r}{2u + \sqrt{2r(r-u)}} < 0$$

Aus (16) folgt dann auch:

Digitized by Google

$$u < \frac{uu_1 + vv_1}{r}$$

so dass $uu_1 + vv_1 - ru$ positiv ist. Multiplicirt mit dieser Positiven wird dann die Ungleichung (15), nach Einsetzung des Wertes (2) für u_2:

$$[n(uu_1 + vv_1 - ru) - rv]^2 > (vu_1 - uv_1)^2 \tag{18}$$

Hier ist erst das Vorzeichen des Dignanden zur Linken zu entscheiden, während aus

$$\frac{u_1}{v_1} > \frac{u}{v}$$

zu ersehen, dass der Dignand zur Rechten positiv ist.

Wäre der Dignand zur Linken positiv oder null, so erhielte man:

$$n \geqq \frac{vu_1 - uv_1 + rv}{uu_1 + vv_1 - ru} = L$$

Differentiirt man L bei constanten u, v, r, so findet man:

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \frac{r[uv_1 - v(r + u_1)]^2}{(uu_1 + vv_1 - ru)^2 v_1 (r + u_1)} \geqq 0$$

Daher wächst L mit u_2. Sein kleinster Wert ist dann, entsprechend $u_1 = u$,

$$L = \frac{r + u}{v}$$

Demnach würde sein

$$n \geqq \frac{r + u}{v}$$

im Widerspruch mit (3). Der Dignand zur Linken von (18) kann also nur negativ sein, woraus.

$$n < \frac{uv_1 - vu_1 + rv}{uu_1 + vv_1 - ru} = N$$

oder, wenn man u_1 und v_1 in m ausdrückt:

$$n < \frac{(r - u)(2u + r) + mv(2u - r)}{m(r - u)(2u + r) - v(2u - r)} = N$$

Diese Grösse nimmt offenbar bei wachsendem m ab. Für das kleinste m wird sie

$$N = \frac{r + u}{v}$$

folglich bleibt die absolute Grenze von n dieselbe wie in (3).

Digitized by Google

Das Resultat ist: Für beliebige positive u, v ist erst m begrenzt durch

$$\frac{u}{v} \overline{\overline{<}} m < \frac{v(2u-r)+r\sqrt{2r(r-u)}}{(r-u)(2u+r)} \tag{19}$$

dann n durch

$$m \overline{\overline{<}} n < \frac{(r-u)(2u+r)+mv(2u-r)}{m(r-u)(2u+r)-v(2u-r)} \tag{20}$$

Scala II.

Aus $u_1 \overline{\overline{<}} u$ geht hervor:

$$m \overline{\overline{<}} \frac{u}{v}$$

daher haben m, n zunächst die Grenzen:

$$\frac{r-v}{u} < n \overline{\overline{<}} m \overline{\overline{<}} \frac{u}{v} \overline{\overline{<}} 1 \tag{21}$$

Die Scala II. lässt die Fälle $q <$, $=$ und > 0 zu, welche bei (12) zu scheiden sind.

Für $q \overline{\overline{<}} 0$ lautet (12):

$$r(v^2-u_1^2-u_2^2) < 2uu_1u_2 \quad \text{oder:}$$
$$(ru_2+uu_1)^2 > (vv_1)^2$$

woraus:

$$ru_2 > vv_1 - uu_1$$

Soll dies mit $q \overline{\overline{<}} 0$ verträglich sein, so ist die Bedingung:

$$(vv_1-uu_1)^2 < r^2(v^2-u_1^2)$$

und diese ist von selbst erfüllt. Für $q \overline{\overline{<}} 0$ muss also sein:

$$\sqrt{v^2-u_1^2} \overline{\overline{>}} u_2 > \frac{vv_1-uu_1}{r} \tag{22}$$

Für $q > 0$ lautet (12):

$$r(u_1^2+u_2^2-v^2) < 2uu_1u_2 \quad \text{oder:}$$
$$(ru_2-uu_1)^2 < (vv_1)^2$$

Lässt man u_2 von 0 an wachsen, so ist die Bedingung von Anfang erfüllt und bleibt es, bis die Linke verschwindet; darüber hinaus hat u_2 die obere Grenze:

Digitized by Google

$$r u_2 < v v_1 + u u_1$$

Verbunden mit $q > 0$ gibt dies:

$$\sqrt{v^2 - u_1^2} < u_2 < \frac{v v_1 + u u_1}{r} \tag{23}$$

Wächst nun u_2 von der untern Grenze (22) bis zur obern (23), so tritt es bei $u_2 = \sqrt{v^2 - u_1^2}$ bloss aus dem ersten Falle in den zweiten über und erfüllt beständig die Bedingung. Die einzigen Grenzen, welche (11) hinzubringt, sind also:

$$\frac{v v_1 - u u_1}{r} < u_2 < \frac{v v_1 + u u_1}{r} \tag{24}$$

Sei zur Abkürzung

$$u_0 = \frac{v v_1 - u u_1}{r}; \quad v_0 = \frac{v v_1 + u u_1}{r} \tag{25}$$

dann ist

$$(v_0 - u)r = v v_1 + u u_1 - u r$$

Die rechte Seite multiplicirt mit $v v_1 + u u_1 + u r$ ist

$$= (v^2 - u^2)v_1^2 + 2 u u_1 v v_1 > 0$$

folglich ist

$$v_0 - u > 0$$

Ferner ist in (21) bereits die Bedingung erfüllt, dass $u_2 \leqq u$ sei; daher ist, wenn jetzt $u_0 < u_2$ hinzukommt,

$$u - u_0 > 0$$

Drückt man nun u_2 in n aus, so gibt die Scala $u_0 < u_2 < v_0$ folgende 2 Ungleichungen:

$$n^2(u - u_0) + 2 n v - u_0 - u > 0$$
$$n^2(v_0 - u) - 2 n c + v_0 + u > 0$$

bzhw. multiplicirt mit den positiven $u - u_0$ und $v_0 - u$ werden sie:

$$[n(u - u_0) + v]^2 > v^2 - u_0^2 = \left(\frac{u v_1 + v u_1}{r}\right)^2$$

$$[n(v_0 - u) - v]^2 > v^2 - v_0^2 = \left(\frac{u v_1 - v u_1}{r}\right)^2$$

Die erste gibt:

$$n > \frac{v u_1 + u v_1 - r v}{r(u - u_0)} = \frac{u v_1 - v(r - u_1)}{u(r + u_1) - v v_1} = \frac{r - u_1}{v_1}$$

die zweite

$$\text{entweder:}\quad n > \frac{uv_1 - vu_1 + rv}{r(v_0 - v)} = \frac{uv_1 + v(r - u_1)}{vv_1 - u(r - u_1)} > \frac{r - u_1}{v_1}$$

$$\text{oder:}\quad n < \frac{vr - uv_1 + vu_1}{r(v_0 - v)} = \frac{v(r + u_1) - uv_1}{vv_1 - u(r - u_1)} = \frac{r + u_1}{v_1}$$

Hiernach wird (11) befriedigt, wenn entweder

$$n > \frac{uv_1 + v(r - u_1)}{vv_1 - u(r - u_1)} = A \tag{26}$$

oder

$$\frac{r - u_1}{v_1} < n < \frac{r + u_1}{v_1} \tag{27}$$

ist. Ersteres ist schon durch die Bedingung (3) ausgeschlossen: denn man hat:

$$\left(A - \frac{r+u}{v}\right) v[vv_1 - u(r - u_1)] = \frac{r(uv_1 - vu_1)^2}{r^2 + (uu_1 + vv_1)^2} + r^2(u - u_1) > 0$$

also:

$$A > \frac{r+u}{v} > n$$

Die Scala (27), welche jetzt ausser (21) allein gilt, geht nach Einsetzung der Werte von u_1 und v_1 über in

$$\frac{v - m(r - u)}{r - u + mv} < n < \frac{v + m(r + u)}{r + u - mv} \tag{28}$$

Nach (21) muss ausserdem sein

$$\frac{r - v}{u} < n \overset{=}{<} m \overset{=}{<} \frac{u}{v} \tag{21}$$

Sei $u = r\sin\varphi$; $v = r\cos\varphi$, wo, wegen $u < v$, $0 < \varphi < \frac{1}{2}$R. Dann ist

$$\frac{r - u_1}{v_1} = \frac{v_1}{r + u_1} > \frac{v}{r + u} = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} = \operatorname{tg}\frac{R - \varphi}{2} > \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$
$$= \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r - v}{u}$$

daher die untere Grenze (21) durch die neue Grenze (27) und (28), welche enger ist, ersetzt.

In Betreff der obern Grenze hat man:

$$[v + m(r + u)] - m[r + u - v] = (m^2 + 1)v > 0$$

folglich kann n die obere Grenze (28) nicht erreichen ohne $> m$ zu werden. Man hat also zuerst:

$$\frac{r-v}{u} < m \overset{=}{<} \frac{u}{v} \tag{29}$$

dann:

$$\frac{v-m(r-u)}{r-u+mv} < n \overset{=}{<} m \tag{30}$$

Die Scala (29) setzt wieder voraus, dass das letzte Glied grösser als das erste ist. Die Bedingung lautet:

$$m^2 v + 2m(r-u) - v > 0 \quad \text{oder:}$$
$$(mv + r - u)^2 > 2r(r-u)$$

woraus die neue Grenze:

$$m > \frac{\sqrt{2r(r-u)} - r + u}{v} = B \tag{31}$$

Bei Vergleichung mit der untern Grenze (21) findet man, dass

$$B \gtrless \frac{r-v}{u}$$

sich reducirt auf

$$u^2 \gtrless r(r-v)$$

Da $u^2 = (r+v)(r-v) > r(r-v)$, so folgt, dass die untere Grenze (21) nicht erreicht wird, mithin wegfällt. Statt (21) hat man jetzt

$$B < m \overset{=}{<} \frac{u}{v}$$

Damit ein m zwischen diesen Grenzen existirt, muss sein:

$$\sqrt{2r(r-u)} < r, \quad \text{das ist} \quad v < u\sqrt{3}$$

Ein flaches Tetraeder ist also nicht für beliebige u, v möglich. Die Bedingungen sind der Reihe nach:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u}{v} > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2r(r-u)} - r + u}{v} < m \overset{=}{<} \dfrac{u}{v} \\[2ex] \dfrac{v - m(r-u)}{r-u+mv} < n \overset{=}{<} m \end{array}\right\} \tag{32}$$

Die beiden Classen von Tetraedern sind durch die Anordnung offenbar so geschieden, dass sie kein Individuum gemein haben können ausser dem einen für $u = v$; $m = n = 1$, d. i. dem regelmässigen Tetraeder, welches beiden Classen angehört.

Digitized by Google

Dagegen sind die Kantensysteme, wie sie ohne Grenzen der Argumente in den Ausdrücken (2) dargestellt werden, allgemein beiden Classen gemeinsam. Substituirt man nämlich für $\frac{u}{v}$, m, n ihre reciproken Werte, so geht $u_2 u_1 u v u_1 v_2$ über in $v_2 v_1 v u u_1 u_2$. Man kann daher aus jedem Kantensysteme (wenn nicht alle Kanten gleich sind) 2 reelle oder imaginäre Tetraeder bilden.

Die Grenzen der reellen Tetraeder unter sich, das sind in (19) (20) (32) diejenigen, welche die Gleichheit $m = \frac{u}{v}$, $n = m$ zulassen, stimmen gleichfalls überein, was auf der Anordnung beruht.

Bemerkenswert aber ist, dass die Grenzen der Realität, bei welchen das Tetraeder in die ebene Figur degenerirt, nicht übereinstimmen. Nur für $u = v$ sind sie dieselben; ausserdem ist die Grenze der flachen Tetraeder für alle 3 Argumente enger als die der spitzen.

Vollzieht man die genannte Substitution in den Ungleichungen (32), so erhält man die Bedingungen, unter denen ein Kantensystem 2 Tetraeder bildet, nämlich

$$\frac{u}{v} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m < \frac{\sqrt{2r(r-v)} + r - v}{u}$$

$$n < \frac{u + m(r-v)}{mu - r + v}$$

Ueber diese Grenzen hinaus bis zu den Grenzen (19) (20) bildet dasselbe nur ein spitzes Tetraeder.

Digitized by Google

XXIII.

Eine Minimaleigenschaft der archimedischen Spirale.

Von

Eduard Janisch.

Ist in irgend einer Ebene eine variable Curve C, ferner ein fester Punkt V gegeben, und Γ die erste negative Fusspunktcurve der C bezüglich V, dann erhält man, wenn durch zwei beliebige fixe Punkte P_1, P_2 der C, die ein endliches Bogenstück begrenzen, die Senkrechten τ_1, τ_2 zu VP_1, VP_2 beziehungsweise gezogen werden, in τ_1, τ_2 zwei Tangenten der Γ, welche dieselbe in Π_1, Π_2 berühren mögen und die mit den Bögen $\widehat{P_0P_1}$, $\widehat{\Pi_0\Pi_1}$ ein gemischtliniges Viereck $P_0P_1\Pi_0\Pi_1$ einschliessen, dessen Fläche, wie wir zeigen wollen, ein Minimum wird, wenn C eine archimedische Spirale ist mit V als Anfangspunkt.

Auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogen, mögen die Punkte V, P_0, P_1 die Coordinaten haben:

$$V(0,\ 0),\quad P_0(x_0,\ y_0),\quad P_1(x_1,\ y_1)$$

$P(x, y)$ sei ein variabler Punkt der Curve

$$C \equiv y = f(x)$$

Die durch den Punkt P bestimmte Tangente τ der Curve Γ hat dann die Gleichung (unter ξ, η die laufenden Coordinaten verstanden):

$$\eta - y = -\frac{x}{y}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad x\xi + y\eta = x^2 + y^2 \tag{1}$$

Differentiirt man die letztere dieser zwei Gleichungen nach x unter der Voraussetzung ξ = const., η = const., so ergibt sich:

Digitized by Google

$$\xi + y'y = 2(x + yy') \tag{2}$$

wobei

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Werden nun die beiden Gleichungen (1), (2) als zusammengehörig betrachtet, so bestimmen sie jenes Wertepaar ξ, η, welches den Coordinaten des Berührungspunktes Π der Tangente τ zukommt. Man findet hiefür:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{y'(y^2 - x^2) + 2xy}{y - xy'} \\ \eta &= \frac{(y^2 - x^2) - 2xyy'}{y - xy'} \end{aligned}\right\} \Pi \tag{3}$$

Die Fläche $u = (P_0 P_1 \Pi_0 \Pi_1)$, auf deren Berechnung es jetzt ankommt, zerlegen wir zu dem Zwecke in dreieckige Elemente $du = (\Pi P P')$, unter P, P' zwei zwischen P_0, P_1 gelegene Nachbarpunkte der Curve C verstanden und unter Π, wie oben, den P entsprechenden Punkt der Curve Γ. Bedeutet dann h den Normalabstand des Punktes Π von der Tangente in P (der verlängerten PP') und ist die Länge des Bogenelementes $\widehat{PP'}$ mit ds bezeichnet, so hat man

$$du = \tfrac{1}{2} h\, ds$$

Hierin für h und ds die Werte substituirt:

$$h = \frac{\eta - y'\xi + (xy' - y)}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad ds = dx \,.\, \sqrt{1 + y'^2}$$

liefert du in der Form:

$$du = \tfrac{1}{2}[\eta - y'\xi + (xy' - y)]\, dx$$

woraus nach Berücksichtigung der Werte von ξ, η, wie sie das Gleichungssystem (3) gibt, folgt:

$$2\frac{du}{dx} = \frac{(y^2 - x^2) - 2xyy'}{y - xy'} - \frac{y'^2(y^2 - x^2) + 2xyy'}{y - xy'} - (y - xy')$$
$$= \frac{(x + yy')^2}{xy' - y} \tag{4}$$

also ist:

$$u = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x + yy')}{xy' - y}\, dx \tag{5}$$

Dieser Ausdruck ist nun, so wie er hier steht, wenig geeignet

Digitized by Google

zur weiteren Behandlung. Er wird wesentlich einfacher, ja sogar überraschend einfach, durch Einführung von Polarcoordinaten r, ϑ vermittelst der Relationen:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\vartheta} : \frac{dx}{d\vartheta} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}\sin\vartheta + r\cos\vartheta}{\frac{dr}{d\vartheta}\cos\vartheta - r\sin\vartheta} = \frac{r'\sin\vartheta + r\cos\vartheta}{r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta}$$

wenn wir zur Abkürzung r' für $\frac{dr}{d\vartheta}$ schreiben.

Wir erhalten auf Grund dieser Formeln:

$$x + yy' = \frac{rr'}{r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta}, \quad xy' - y = \frac{r^2}{r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta}$$

demnach für u:

$$u = \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r'^2\, d\vartheta \tag{6}$$

Damit nun dieses bestimmte Integral zu einem Minimum werde, ist nach einem bekannten Satze aus den Elementen der Variationsrechnung notwendig und aus geometrischen Gründen hier zugleich hinreichend, dass $\frac{\partial . r'^2}{\partial r'}$ gleich einer Constanten, etwa gleich $2a$ sei d. i es muss sein

$$r' = \frac{dr}{d\vartheta} = a = \text{const.}$$

Hieraus folgt endlich

$$r = a\vartheta + b \tag{7}$$

wo b eine zweite Constonte bedeutet, als die gesuchte Bedingung — die Polargleichung einer archimedischen Spirale, welche den Ursprung V zum Pole hat.

Die Constanten a, b bestimmen sich durch die Polarcoordinaten von $P_0(r_0, \vartheta_0)$, $P_1(r_1, \vartheta_1)$ aus den Gleichungen

$$r_0 = a\vartheta_0 + b, \quad r_2 = a\vartheta_1 + b$$

Man sieht leicht, dass eine Vereinfachung erzielt wird, wenn man die Polaraxe etwa durch P_0 gehen lässt, dann kann $\vartheta_0 = 0$ gesetzt werden, und es ist zunächst $b = r_0$, ferner $a = \frac{r_1 - r_0}{\vartheta_1}$, schliesslich

$$r = \frac{r_1 - r_0}{\vartheta_1}\vartheta + r_0 \quad \text{und}$$

Digitized by Google

$$u = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\vartheta_1}\left(\frac{r_1 - r_0}{\vartheta_1}\right)^2 d\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{(r_1 - r_0)^2}{\vartheta_1}$$

Um ein Beispiel zu rechnen, nehmen wir an, ausser $\vartheta = 0$, noch $r_0 = 0$, dann $r_1 = 2m$, $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$. In dem Falle wird $u = \frac{4m^2}{\pi}$. Zum Vergleiche wählen wir den über P_0P_1 als Durchmesser stehenden Kreis: $r = 2m \sin\vartheta$. Man hat hier

$$\bar{u} = 2m^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \,.\, d\vartheta = m^2 \frac{\pi}{2}$$

ein übrigens geometrisch evidentes Resultat, da das Viereck $P_0P_1\Pi_0\Pi_1$ im vorliegenden Falle in den Halbkreis über P_0P_1 degenerirt, weil sowol $\widehat{\Pi_0\Pi_1}$, wie $\overline{P_1\Pi_1}$ beide die Länge null haben.

Wie zu erwarten war, ist $u < \bar{u}$, wegen

$$\frac{4}{\pi} < \frac{\pi}{2} \,.\, \left(\frac{4}{\pi} = 1 \cdot 27 \ldots, \; \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 57 \ldots\right)$$

Digitized by Google

Litterarischer Bericht
XXXIII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre. Von Dr. Bruno Borchardt. Berlin 1889. Julius Springer. 86 S.

Die neue Bearbeitung der Wahrscheinlichkeitslehre wird gegenüber der grundlegenden von Laplace und der vorzüglichsten von Hagen dadurch gerechtfertigt, dass sie eine Einleitung in die Theorie geben soll, welche die Principien ihrer Bedeutung gemäss erörtert, indem dabei Punkte zu besprechen sind, auf welche jene Werke nicht eingehen, während die Anwendung der Theorie auf die Ausgleichungsrechnung, weil sie bereits als besonderer Gegenstand genügend behandelt worden ist, nicht aufgenommen zu werden brauchte. Eine andere Beschränkung ist nicht genannt: es handelt sich nur um auszählbare Fälle; die allgemeine Theorie aber umfasst auch die Probleme über stetige Ausdehnung von Zeit und Raum. Die Bedingung der Auszählbarkeit hätte ausgesprochen werden müssen, da manche aufgestellte Sätze ohne sie unrichtig sind, und weil das Vorwort in der Erklärung der Principien Vollständigkeit erwarten lässt. Wenn nun der Verfasser das Hauptgewicht auf die Begriffserklärung legt, so sind es die Begriffe von Zufall, Wahrscheinlichkeit, Hoffnung (Besorgniss) und Ursache, um die es sich hier handelt. Die darin enthaltenen psychischen Elemente werden in der Theorie durch motivirte, wiewol nie ausreichend begründete Substitution definirter Quantitäten in messbare Elemente umgesetzt. In der Erklärung des Zufalls finden sich zwei irrige Annahmen, von denen sie ausgeht, indem behauptet wird, streng genommen existirte kein Zufall. Zufällig

heisst im gewöhnlichen wie im streng logischen Sprachgebrauch nicht, was in keiner, sondern, was in einer gedachten Abhängigkeit nicht steht. Hieran schliesst sich auch der mathematische Begriff. Unterscheidet man statt dessen, wie es hier geschieht, zwischen Bekannter und unbekannter Ursache, so ist dies theoretisch gleichbedeutend; von dem unbekannten Zusammenhange wird abgesehen, was man auch tun kann, wenn man ihn kennt. Zweitens zeigt sich in der Besprechung des Zufalls die irrige Voraussetzung, dass der physikalische Causalnexus (das Naturgesetz) die Ereignisse vollständig bestimmte. Es ist bekannt und aus jeder dynamischen Rechnung zu ersehen, dass er nur in einer Richtung, in der Succession der Ereignisse, eine Verbindung herstellt, in transversaler Richtung hingegen die gleichzeitigen Elemente jedes momentanen Zustands ganz unverbunden lässt. Relativ zur physikalischen Causalität ist also das Reich des Zufalls ein exact bestehendes, nicht auf unzureichender Erkenntniss beruhendes. Beschränkt wird es in äusserst geringem Umfange erst durch die menschliche Combination der Causalfäden, teils im Dienste des Zweckes (z. B. bei Experiment und Artefact) teils nach Willkür (z. B. bei der Spielregel). Undeutlich formulirt ist die Erklärung der Wahrscheinlichkeit als Mass der Zufälligkeit. Letztere kennen wir nur als absolutes Attribut; auch bei Zuziehung der Wahrscheinlichkeit wird ein Ereigniss nicht mehr oder weniger zufällig. Das Verhältniss beider Begriffe ist ein anderes: innerhalb der zufälligen Ereignisse gibt es solche, die mehr und weniger wahrscheinlich sind. Zu diesem gradationsfähigen Begriffe gelangt man aber weit leichter, wenn man von der Hoffnung (Besorgniss, Gefahr) ausgeht, die bei gleichem Gegenstande heute grösser oder kleiner sein kann als gestern, und sie dann in zwei Factoren zerlegt, den bekannten Wert des Gegenstands und die Wahrscheinlichkeit. Was die Wahrscheinlichkeit für die Erkenntniss der Wirklichkeit bedeutet, lässt sich nur aus der Abhängigkeit einer Wahrscheinlichkeit von der andern verstehen. In letzter Instanz muss eine hypothetisch angenommen werden, auch wenn wir uns auf statistische Beobachtungen stützen. Der Begriff der Ursache endlich ist hier der umfassendste, der sich denken lässt, wird daher nicht erst erläutert; Ursache heisst meistens eins unter vielen, von denen ein Ereigniss abhängig ist. Obgleich nun die Begriffserklärungen das Unterscheidende der Bearbeitung bilden, so machen sie doch nur den geringsten Teil des Buches aus; dasselbe soll auch in die Rechnung selbst einführen und entwickelt daher eine grössere Anzahl von Sätzen, welche der Verfasser für geeignet erachtet hat, in vielseitigster Hinsicht mit der Theorie vertraut zu machen. Die Teile des Buches handeln der Reihe nach: von der Wahrscheinlichkeit, von der Hoffnung, von den Ursachen und von der Lebensversicherung. Hoppe.

Digitized by Google

Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. Par B. J. Clasen, Chanoine de la cathédrale de Luxembourg. Paris 1889. Gauthier-Villars et fils. (Extrait des Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles. XII. 251.) 40 S.

Die hier entwickelte Methode der Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen zwischen n Gesuchten ist folgende. Gegeben sind n Gleichungen:

$$X_h \equiv \sum_{k=0}^{k=n} a_{hk} x_k = 0 \quad (h = 1,\, 2 \ldots n)(x_n = 1)$$

Man eliminire einzeln x_0 und x_1 zwischen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$; dann findet man

$$m x_0 = \sum_{k=2}^{k=n} b_k x_k; \qquad m x_1 = \sum_{k=2}^{k=n} c_k x$$

und nach Einsetzung dieser Werte in $X_3 = 0$:

$$m_1 x_2 = \sum_{k=3}^{k=n} b_{2k} x_k$$

was wieder in x_0 und x_1 eingesetzt

$$m_1 x_0 = \sum_{k=3}^{k=n} b_{0k} x_k; \qquad m_1 x_1 = \sum_{k=3}^{k=n} b_{1k} x_k$$

gibt. Setzt man dann alle 3 Ausdrücke von x_0, x_1, x_2 in $X_4 = 0$ und den daraus gezogenen Wert von x_3 in die Ausdrücke von x_0, x_1, x_2 ein, so findet man ebenso x_0, x_1, x_2, x_3 linear dargestellt in $x_4, x_5, \ldots x_n$. Fährt man so fort, so erhält man schliesslich alle Gesuchten ausgedrückt in x_n, somit die vollständige Auflösung des Systems. Hierzu ist keine Elimination ausser der anfänglichen zwischen 2 Gleichungen verwandt worden. Es wird bewiesen, dass, wenn keine Division stattfindet, nach jeder Reduction alle in denselben x dargestellten x den gemeinsamen Coefficienten m haben.

Dieser Methode können wir, wenn es sich nur um numerische Auflösung numerisch gegebener Gleichungssysteme handelt, grosse Vorzüge zuerkennen. Ein anderes Ziel kennt der Verfasser nicht. Er sagt einleitend: die Determinantenmethode habe zwar gewisse Mängel nicht, sei aber unpraktisch. Hierauf ist zu erwidern: die Clasen'sche Methode ist völlig unfähig die Determinantenmethode zu ersetzen, schon darum weil, wenn vor Ende der Rechnung einmal ein m null wird, ein Fall, der für das System nichts charakteristisches anzeigt, das Verfahren modificirt werden muss, während der

Digitized by Google

einzige Fall der Ungültigkeit eines Determinantenausdrucks auch schon das entscheidende Urteil über das Gleichungssystem abgibt. Wollte man also von ersterm algebraische Anwendungen machen, so würde man in endlose Discussionen verwickelt werden.

Das Folgende zieht die Discussionen, dann die allgemeinen Resultate, dann die sogen. gewöhnlichen Methoden, dann die Determinanten in Betracht, jedoch stets nur im Sinne numerischer Rechnung; alle Schlüsse aus der algebraischen Form, mithin die Theorie der Determinanten, werden gänzlich ignorirt. Sehen wir von überflüssigen Betrachtungen ab, so bietet die Arbeit in dem mitgeteilten neuen Algorithmus an sich eine vortreffliche Leistung dar.

Hoppe.

Ueber die associirten Formen und deren Anwendung in der Theorie der Gleichungen. Von Dr. B. Igel, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien. Wien 1889. Carl Gerold's Sohn. 4⁰. 33 S.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Theorie der associirten Formen dahin auszubilden, dass mit ihrer Hülfe die Lücke ausgefüllt werden könne, welche in Cayley's invariantentheoretischen Lösungen der Gleichungen gegenüber den Leistungen der Substitutionstheorie von Netto noch bleibe, indem auf letzterem Wege an den Tag trete, dass die Behandlungsweise auf höhere Gleichungen als 4. Grades nicht anwendbar sei, auf ersterm Wege noch nicht. Eine dem Verständniss dienende Einleitung der Schrift ist aus einer frühern Arbeit in den Denkschr. der k. Ak. d. W. XLVI. unverändert aufgenommen. Dann werden die associirten Formen definirt und zu ihrer Berechnung eine Recursionsformel, dann auch eine independente Darstellung derselben hergeleitet. Dann wird die Theorie der kubischen Gleichungen behandelt; es wird daselbst gezeigt, wie die bekannte Relation zwischen den In- und Covarianten der kubischen Form a priori einzusehen ist, und wie man mit Hülfe derselben die bekannte Zerlegung der Form bewerkstelligt. Dann werden die associirten Formen der Form 4. Ordnung berechnet, und wird aus den gefundenen Formeln die bekannte Relation zwischen den In- und Covarianten a priori erschlossen. Dann wird die Covariante T in 3 quadratische Formen zerlegt, endlich der Zusammenhang zwischen den 3 Eigenschaften der Covariante T ans Licht gestellt, welche dieselbe zu einer speciellen Form stempeln. H.

Curso de analyse infinitesimal. Por F. Gomes Teixeira. Director da Academia Polytechnica do Porto, Professor na mesma

Digitized by Google

Academia, antigo Professor na Universidade de Coimbra, socio correspondente das Academias Reaes das Sciencias de Lisboa, Madrid, etc. Calculo integral (primeira parte). Porto 1889. Typographia occidental. 312 S.

Der erste Teil dieses Cursus der infinitesimalen Analysis enthaltend die Differentialrechnung ist im 23. litterarischen Bericht, S. 27 besprochen. Der jetzt erschienene zweite Teil enthaltend die Integralrechnung schliesst sich wie der erste in der Behandlungsweise, welche sehr kurz gefasst ist, namhaften deutschen und französischen Autoren an. Es ist daher nur der neue Inhalt hinzuzufügen. Nachdem die Methoden der Integration algebraischer Functionen dargelegt sind, werden über die Reductionen der elliptischen und hyperelliptischen Integrale Sätze hergeleitet; dann folgt die Integration transcendenter Functionen. In Betreff der bestimmten Integrale werden nur allgemeine Sätze behandelt, die Euler'schen Integrale z. B. gar nicht, die Fourier'schen Theorien nur unter Anwendungen kurz berührt. Es folgen zunächst geometrische und analytische Anwendungen, dann die Integration von Differentialgleichungen und geometrische Anwendungen. H.

Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung (Differential- und Integral-Rechnung) zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Von H. B. Lübsen. Mit 54 Figuren im Text. Siebente Auflage. Leipzig 1889. Friedrich Brandstetter. 381 S.

Das Buch gehört zu denjenigen, welche sich durch Täuschung von Unkundigen populär machen. Dass Lagrange's Versuch die Principien der Differentialrechnung mit Umgehung der unendlichen Grössen auf die Reihenentwickelung zu gründen verfehlt ist, war längst vor Erscheinen der 1. Auflage dieses Buchs 1855 bekannt. Dass Cauchy der Infinitesimalrechnung eine genügendere Grundlage gab, und dass man nach ihm nur auf dieser neuen Basis die Methode weiter zu cultiviren gesucht hat, bezeugt es, dass der begangene Fehler schon damals offenbar vor aller Welt war. Wenn nun trotzdem der Hamburger Urheber des Buchs, sowie die Bearbeiter der neuern Auflagen die verurteilte Methode den Schülern wieder darbieten, ohne von ihrem Mangel ein Wort zu sagen, so lässt sich dies wol kaum anders als aus Speculation auf die Unwissenheit erklären. Gehen wir näher auf die Motivirung ein. Das Vorwort sagt, Cauchy's Methode eigne sich nicht für Anfänger, weil sie zuviel voraussetze. Was aber setzt Lübsen voraus? Die Theorie der unendlichen Reihen müsste er voraussetzen oder eine allgemeine Bestim-

Digitized by Google

mung des zweiten Reihenglieds unabhängig von der Reihe ausfindig machen, d. h. der Differentialquotient müsste letztern Falls schon anderweit bekannt sein um ihn definiren zu können. Lübsen selbst nun sagt, er setze die Theorie der Reihen voraus — ob es unendliche sind, steht nicht dabei — fügt indes hinzu, die Convergenz sei gleichgültig, weil es sich nur um das zweite Glied handle. Dann fehlt natürlich jede Beziehung der Reihe zur Function; soll die Beziehung eine formelle sein, so fehlt die allgemeine Entwickelungsmethode; lässt man, wie Lübsen es tut, jede specielle Entwickelungsmethode zu, so fehlt jeder bewusste Grund der Uebereinstimmung. Gesetzt aber auch, es wäre dem Verfasser trotz aller Hindernisse, die sich von dieser Seite einer exacten Behandlung entgegenstellen, gelungen einen zutreffenden Begriff des Differentialquotienten zu geben, so ist dieser, wie es nicht anders sein kann, auf so complicirte, künstliche Art gewonnen, dass kein Schüler im Stande ist die darauf gebauten Schlüsse zu durchschauen. Hier beruft sich der Verfasser auf die Erfahrung, dass nach der in Rede stehenden Methode die Infinitesimalrechnung leicht verstanden werde. Er sagt aber nicht, durch welche Proben ein wirkliches Verständniss dargetan worden sei. Dass die Schüler gegen die Lehren keinen Einwand vorbringen können, ist natürlich, da sie nicht soweit orientirt sind. Wir können auch der angeblichen Erfahrung eine andre entgegensetzen. Es kommt vor, dass die in so nachlässiger Weise in die höhere Analysis eingeführten Schüler sich später auf allgemeine Anerkennung der Berechtigung von Schlüssen berufen, die sie selbst weder zu vertreten noch, wenn sie falsch sind, als solche zu verurteilen wissen und damit verraten, dass sie stets an die Bündigkeit der Schlüsse nur geglaubt haben. An Aeusserungen, welche zu einer solchen Einbildung des Wissecs verführen, fehlt es im vorliegenden Buche nicht: die Phrase „verschwindend kleine Grösse“ mit eingeklammerter Beifügung (= 0), das Reden von Grenzwerten und Stetigkeit ohne alles Eingehen auf deren Bedingungen, u. a., überhaupt das schnelle Hinwegschlüpfen über alles, was dem Schüler neu ist, während die leicht verständlichen algebraischen Entwickelungen recht ausführlich sind, alles dieses kann nur jene verderbliche Wirkung haben. Von unendlichen Grössen ist im Buche nirgends die Rede, aber auch von variabeln Grössen nicht. Hiernach scheinen dem Verfasser diese Begriffe nicht zum „Notwendigsten und Wichtigsten“ zu gehören, trotzdem er doch vorgibt „in die Infinitesimalrechnung einführen“ zu wollen! Ihre Kenntniss wird den Schülern vorenthalten und, damit sie den Mangel nicht merken, gänzliches Schweigen darüber beobachtet. Wenn dieses Verfahren dazu dienen soll die Ueberwindung einer Schwierigkeit, von der die Einleitung spricht, zu erleichtern, so ist es gewiss das verkehrteste Mittel, zu dem der Ver-

Digitized by Google

fasser greifen konnte. Eine gewisse Schwierigkeit bietet in der Tat stets, wie er richtig bemerkt, der Uebergang zu einer höhern Stufe der Doctrin. Die Versation mit dem Lehrstoff auf der niedern Stufe ist mit der Gewöhnung an eine Auffassungsweise verknüpft. Von dieser Gewohnheit muss sich der Schüler dann lossagen. Er kennt in der Algebra die Grösse nur als eine für sich bestehende und als solche bestimmte und soll sie nun als Function einer andern auffassen. Dass dies geschieht, ist unerlässlich; jede wesentlich neue Erkenntniss fordert das Aufgeben einer Gewohnheit. Wer aber auf die Schwierigkeit Rücksicht nehmen will, hat vor allem die neue Forderung kurz und unumwunden auszusprechen, dann zur Einübung der neuen Auffassung und zur Beachtung ihrer Erfolge Gelegenheit zu geben, also gerade das Gegenteil von dem zu tun, was Lübsen tut, indem er die neue Auffassung geflissentlich meidet und versteckt, ein pädagogischer Misgriff in den auch Cauchy verfallen ist, da er das Unendliche nur in sparsamster Weise und verhüllt in Form der Grenzwerte zur Verwendung bringt. Gegenwärtig ist das Unendliche kein schwieriger Punkt mehr, sondern ein für Anfänger leichtfasslicher Lehrgegenstand, der ihnen überdies sofort Gelegenheit bietet den grössten Erfolg zu sehen, nämlich in dem Schlusse von der Ungleichheit des Einen auf die Gleichheit des Andern, durch welchen die Exactheit der Infinitesimalrechnung in elementarster Weise und doch vollkommen streng bewiesen wird. Dieser leicht zu erringende Erfolg entgeht denen, welche die Infinitesimalrechnung aus Lüben's Buche lernen wollen. Dasselbe ist nur da, damit man sie nicht lernt.

Hoppe.

Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von N. H. Abel und E. Galois. Herausgegeben von H. Maser. Berlin 1889. Julius Springer. 155 S.

Von den 5 herausgegebenen Abhandlungen von Abel haben die 2 ersten von 1824 und 1826 den Beweis der Unmöglichkeit der allgemeinen algebraischen Lösung der Gleichungen höherer Grade zum Ziele. Die dritte von 1829 betrifft die auflösbaren Gleichungen, deren Wurzeln rational durch eine unter ihnen ausgedrückt werden. Die vierte von 1828 nebst der fünften untersucht die Formen algebraischer Ausdrücke, weche höhern Gleichungen genügen können. Von Galois sind 6 Schriften nebst 2 Bemerkungen von Liouville herausgegeben aus den Jahren 1828 bis 1831, eine über Kettenbrüche, eine über die Theorie der Zahlen, die übrigen über die Auflösung der Gleichungen. Der Anhang gibt Notizen aus Briefen von Abel und Bemerkungen von Galois zu einer hinterlassenen Abhandlung von Abel.

H.

Digitized by Google

Anwendung der Determinanten und Elemente der neuern Algebra auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Zum Gebrauche beim Unterricht an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht herausgegeben von Prof. Dr. Jos. Dieckmann, Rektor des Realprogymnasiums zu Viersen. Leipzig 1889. B. G. Teubner. 110 S.

Um die Gesichtspunkte der Abfassung des Buchs deutlich zu machen, ist es nötig zuerst auf die im Vorwort angeregten Fragen näher einzugehen. Zu den Wünschen und Vorschlägen mehrerer Mathematiker, welche die Aufnahme der Determinantenlehre in den Cursus der höhern Lehranstalten befürworteten, hat, wie das Vorwort sagt, die Directorenconferenz zu Hannover 1878 sich gänzlich ablehnend verhalten, die westfälische 1884 hingegen den Gebrauch der Determinanten mit gewissen Einschränkungen für wünschenswert erachtet. In den Verhandlungen treten jedoch manche Einwürfe auf: für eine gründliche und wissenschaftliche Behandlung der Lehre habe die Schule keine Zeit, und wenn sie auch gelänge, so entspreche der praktische Wert nicht dem Aufwand an Mühe. Hier ist manches zu unbestimmt ausgesprochen. Zunächst ist zu bemerken, dass die Determinantenlehre sowol an die Lehre von den Gleichungen (in Secunda) als auch an die Combinationslehre (in Prima) angeschlossen werden kann. Diekmann hat nur das erstere im Sinne; der Conferenzbeschluss aber lässt die Gestaltung der Doctrin als offene Frage bestehen; ob also sein Zugeständniss zu Gunsten des Diekmann'schen Planes gedeutet werden kann, lässt sich aus dem Angeführten noch nicht entnehmen. Die Einwürfe sprechen offenbar ganz zu dessen Ungunsten; doch müssen wir auch diese, namentlich den zweiten, bestimmter bezeichnen. Der praktische Wert lässt sich an dieser Stelle nicht nach dem Gewinne messen, den irgend ein Rechner aus dem Gebrauche der Determinanten zu ziehen vermag, sondern nur nach dem, welcher bei Uebung algebraischen Rechnens in der Schule der ganzen Classe zugute kommt Dass Diekmann den Schulzweck zu sehr ausser Acht lässt, wird sich zeigen, wenn wir seine Bearbeitung der Lehre näher ansehen. In seiner Antwort räumt der Verfasser zunächst ein, dass die Schule sich an die Bedeutung der Determinanten als Abkürzung zu beschränken habe. Ihren Hauptwert legt er in ihren Gebrauch bei der Elimination; Zweck der gegenwärtigen Bearbeitung sei es, die Mannichfaltigkeit der Anwendung auf fast allen Gebieten der niedern Mathematik und die Bedeutung der dabei gewonnenen Resultate für unsere Disciplin in etwas darzulegen. Was nun die Ausführung betrifft, geht die Begriffsentwickelung von den Determinanten 2. Ordnung aus und setzt die Determinanten 3. und 4. Ordnung aus den Unterdeterminanten zusammen. Dabei ist indes die Erklärung der Determinante $n$ter Ordnung für unentbehrlich gehalten

worden. Die Regel der Vorzeichen der Unterdeterminanten wird allgemein ausgesprochen, jedoch in der Anwendung nie erwähnt. Die Vorzeichen werden weiterhin geradezu dictirt, obgleich sie für den Schüler, wenn er wirklich mitrechnen wollte, seine beständige Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen würde. Alles dies zeigt, dass die Mühe, welche Diekmann dem Schüler aufbürdet, wenn dieser das Dargebotene sich zu eigen machen soll, keine so geringe ist, als er es gelten lassen will, dass also der erste Einwurf, es koste zu viel Zeit um die Lehre gründlich zu betreiben, gegen seine Ausführung erst recht zu erheben ist. Vermisst man doch gar manche Erläuterung; die nur fehlt, weil sie zu viel Raum im Buche erfordert hätte. Fragt man nun zweitens nach dem Lohne für jene Mühe, so bietet sich folgendes dar. Der Schüler lernt die Coefficienten von Resultaten, und unter andern die Proportionen, auf neue Art bezeichnen, woraus dann über die eingeführten Symbole gewisse Sätze hervorgehen. Der Kreis der lösbaren Aufgaben wird nicht vermehrt; neue Fähigkeiten werden nicht entwickelt, mithin die Pflicht der Schule in diesem Punkte nicht sichtlich erfüllt; die Sätze sind kein Zuwachs an Erkenntnissen, denn sie betreffen nur selbstgemachte Objecte. Dagegen ist als Verlust zu verzeichnen die verminderte Wertschätzung und die Ablenkung der Aufmerksamkeit durch Vermehrung der Formen der Ausdrücke. Charakteristisch für das Ganze ist, dass der Mittelpunkt des Interesses an der darin verfolgten Speculation, wie der Verfasser auch nicht umhin kann öfters zu verraten, ausserhalb des für Schüler der Algebra bestimmten Gebietes liegt. Auch kann ihm diese Tendenz kaum fremd sein, da er der im Vorwort angeführten Absicht Hesse's „auch für unsere Schulen den Anschluss an den heutigen wissenschaftlichen Standpunkt der Algebra möglich und erreichbar zu machen“ — beistimmt und sie auf seine Bearbeitung bezieht. Den Anschluss an den höhern Standpunkt erreichen wir, wenn wir die niedere Doctrin gleich exact und ohne Lücken betreiben. Es würde eine sehr schlechte Vorbereitung sein, wenn man die Schüler durch beständigen Hinweis auf ein Unbekanntes, dessen Bedeutung sie erst später begreifen lernen sollen, von dem abziehen wollte, was sie heute verstehen und heute in Ausführung bringen können. Von diesem Fehler wird sich schwerlich ein Versuch die Determinantenlehre auf dem von Diekmann gewählten Wege in die Schule einzuführen frei erhalten können. Es gibt aber einen zweiten Weg, der, wenn ohnedas die Combinatorik in Prima gelehrt wird, sich vollkommen eignet im Anschluss an dieselbe die Schüler nicht etwa mit einem Abriss der Lehre bekannt zu machen, sondern sie in der Kürze und ohne Schwierigkeit in die wissenschaftlichen Principien der Determinantentheorie selbst einzuführen, einen Weg auf dem die schwerfällige Zerfällung in Unterdetermi-

Digitized by Google

nanten gar nicht in Anwendung kommt, und durch die der Theorie eigenen weitgreifenden und doch sofort einleuchtenden Schlüsse alle zu den Principien gehörigen Sätze in leichtfasslicher Art bewiesen werden. Dass der Verfasser diesen Weg verschmäht hat, wird ohne Zweifel auf einem Vorurteil beruhen. Hoppe.

Vermischte Schriften.

Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 57—59me année, 3me série, t. XIV—XVII. 1887—1889. Bruxelles 1889. F. Hayez.

Die genannten Bände enthalten folgende mathematische Arbeiten.

XIV. J. Deruyts: Entwickelungen über die binomischen Formen.

F. Deruyts: Ueber die Darstellung der unicursalen Involutionen. — Ueber die Theorie der Involutionen.

C. Le Paige: Ueber die neutralen Elemente der Involutionen.

E. Ronkar: Note über die Oscillationen eines Pendes bewirkt durch die Verrückung der Suspensionsaxe.

P. De Heen: Bestimmung des theoretischen Gesetzes der Compression der Gase.

XV. C. Le Paige und F. Deruyts: Fundamentaltheoreme der projectivischen Geometrie.

J. Deruyts: Ueber die Theorie der algebraischen Formen für eine beliebige Anzahl Variabeln.

XVI. J. Deruyts: Ueber die gegenseitige Differentiation der invarianten Functionen. — Ueber einige Eigenschaften der linearen Transformationen.

E. Goedseels: Von der Länge der Linien.

E. Catalan: Ueber einen besondern Fall der binomischen Formel.

XVII. F. Deruyts: Ueber die Darstellung der Homographie 2. Gattung auf den kubischen Regelflächen. — Ueber eine gemeinsame Eigenschaft der normalen Curven der linearen Räume.

C. Servais: Ueber die Nabelpunkte auf den Flächen 2. Grades.

E. Catalan: Neue Noten zur Algebra und Analysis. H.

Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1888. 1889. 54me, 55me année. Bruxelles 1889. F. Hayez.

Digitized by Google

Das Annuaire enthält den bürgerlichen Kalender, die Einrichtungen und Gesetze der Akademie, die Preiserteilungen, das Verzeichniss der Mitglieder und biographische Notizen über folgende Mitglieder nebst Portrait: Gachard, Duprez, Franck, Geefs, Nypels, Vandenpeeerebom (im Jahrg. 54), Pinchart, Tielemans, De Keyser, Marchal, Nolet de Brauwere van Steeland, Cornet (im Jahrg. 55) dann das Verzeichniss der Gesellschaften, Institute und Zeitschriften, mit welchen die Akademie in Beziehung steht. H.

Rendiconto dell' Academia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale die Napoli). Serie 2ª. Vol. II. (Anno XXVII.) Napoli 1888.

Der 2. Jahrgang enthält folgende mathematische Arbeiten.

A. Del Re: Ueber gewisse Systeme von Flächen 4. und 6. Grades, welche bei linearer Transformation einer gewissen Regelfläche 4. Grades auftreten. — Die polaren Flächen verbunden bezüglich auf einen Connex von Ebenen und Geraden und auf eine fundamentale algebraische Fläche. — Ueber die reellen polaren Systeme, welche gegebene reelle polare Systeme doppelt berühren.

A. Capelli: Untersuchung der invariantiven Operationen zwischen mehrere Reihen vertauschbarer Variabeln mit einer andern invariantiven Operation zwischen denselben Reihen. — Ein Reciprocitätsgesetz für die invariantiven Operationen zwischen 2 Reihen von Variabeln.

E. Pascal: Ueber eine Anwendung der Methode eine invariantiven Form einer kubischen Binären mittelst des vollständigen Systems auszudrücken. — Ueber einige invariantive Formen des Systems zweier biquadratischen Binären.

U. Masoni: Ueber eine neue Formel aufgestellt für die Berechnung der Schussweite.

R. Marcolongo: Ueber die conforme Abbildung der Pseudosphäre und ihre Anwendungen. — Ueber das Gleichgewicht eines biegsamen und nicht dehnbaren Fadens. — Ueber das Theorem von Poisson. — Ueber die Variation eines bestimmten Integrals und über die Theorie der Differentialgleichungen 1. Ordnung.

E. Nannei: Die hypercyklischen Flächen.

D. Montesano: Ueber die Raumcurve 5. Ordnung vom Geschlecht 1. H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyennes, publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Ac. roy.

Digitized by Google

de Belg. etc. et J. Neuberg, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de la Soc. roy. des sc. de Liége. Ut pictura mathesis. Tome neuvième. Gand 1889. Ad Hoste. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Der 9. Jahrgang enthält folgende Arbeiten.

J. Casey: Neuere elementare Geometrie.

Ph. Breton: Ueber einen Gesamtabriss der descriptiven Geometrie.

J. C. Malet: Einige Eigenschaften der dreiknotigen Curve 4. Grades.

E. Gelin: Problem der unzugänglichen Geraden. — Sätze über Minima.

G. Russo: Ueber ein classisches Problem.

Cl. Servais: Ueber einen gewissen dem Krümmungskreis analogen Kreis — Umkehrbarkeit der linearen Transformation.

E. Vigarié: Ueber die Aehnlichkeitscentra zweier Kreise.

E. Lucas: Ueber die tripolaren Coordinaten.

G. de Longchamps: Ueber den Joachimsthal'schen Kreis.

H. Brocard und P. Mansion: Die geradlinige Trigonometrie zurückgeführt auf eine einzige Formel (nach Ozanam).

P. Mansion: Ueber die Ozanam'sche Formel. — Der kürzeste Weg auf der Kugel.

G. Peano: Eine neue Form der Taylor'schen Formel.

A. Thiré: Entwickelung des ebenen Schnitts des Kegels.

E. Wasteels: Fundamentale Eigenschaft der parallelen Curven.

E. Cesáro: Innere Untersuchung einiger ebenen Linien.

W. Mantel: Ueber eine imaginäre Projection.

Fauquembergue: Ueber eine unbestimmte Gleichung.

E. Lebon: Ueber die Beweise einiger metrischen Eigenschaften des Dreiecks.

E. Catalan: Ueber eine arithmetische Aufgabe.

Brandza: Ueber die gemeinsamen Tangenten an 2 Kreise.

Cl. Thiry, Aubel, E. Jamet, Demoulin und Gob, Mansion und Neuberg: Noten. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XVI. Amsterdam 1889. Sikken en Co.

Der 16. Teil enthält folgende Arbeiten.

F. J. van den Berg: Ueber geradzahlige magische Quadrate. — Nachschrift über Systeme zweier Kreise oder Kegelschnitte, in und um welche sich dasselbe Vieleck beschreiben lässt. — Ueber

die Bestimmung eines Dreiecks, dessen Winkelhalbirende gegeben sind.

H. Ekama: Die sphärischen cykloidalen Linien. — Die durch Punkte von Kegelschnitten, die ohne zu gleiten auf andern Curven rollen, beschriebenen Linien. — Nachschrift.

D. Coelingh: Zwei cyklische Transformationen.

W. Mantel: Ueber die Anzahl gemeinschaftlicher Lösungen algebraischer Gleichungen.

J. J. van Laar: Ueber die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer beliebigen Zahl. Bestimmung der untern Grenze.

M. C. Paraira: Ueber Reserveberechnung für Lebensversicherungscontracte. H.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. 5. Hft. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1883. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 39. Jahrg. 2. u. 3. Abth., enth. Physik d. Aethers u. d. Erde. Red. v. E. Rosochatius u. B. Schwalbe. Berlin, G. Reimer. 38 Mk.

Gerland, E., Beiträge zur Geschichte der Physik. Fortsetzung d. Verzeichnisses der bis auf unsere Zeit erhaltenen Orig.-Apparate. Leipzig, W. Engelmann. 50 Pf.

Graf, J. H., Geschichte der Mathematik u. der Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. 3. Hft. [1. Abth.]: Die 1. Hälfte d. XVIII. Jahrh. Bern, Wyss. 1 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 19. Bd. Jahrg. 1887. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Lasswitz, K., Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. 1. Bd. Die Erneuerung der Korpuskulartheorie. Hamburg, Voss. 20 Mk.

Methode und Principien.

Brockmann, F. J., Versuch e. Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Isenkrahe, C., üb. die Fernkraft u. das durch Paul Du Bois-Reymond aufgestellte dritte Ignorabimus. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 7. u. 8. Leipzig, W. Engelmann. Geb. 4 Mk. 20 Pf.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht
XXXIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. Von Kurt Lasswitz. Erster Band. Die Erneuerung der Korpuskulartheorie. Hamburg und Leipzig. Leopold Voss. 518 S.

Es lässt sich wol nicht verkennen, dass eine Geschichte der Atomistik sich nicht in gleichem Falle befindet mit der Geschichte einer Wissenschaft. Eine Doctrin kann erst dann eine Geschichte erlangen, nachdem sie auf feste Principien gegründet ist; der Autor muss über die anfänglichen Hauptfragen selbst im klaren sein, um über Leistungen der Vorzeit berichten zu können; andernfalls wird er bei unwesentlichen Dingen sich ins breite verlieren und die fruchtbaren Gedanken, welche oft die Zeitgenossen nicht verstanden haben, unbeachtet lassen. Die Atomistik aber ist bis heute ein disponibles Feld für Hypothesen, die sich jeder Erfinder einer Theorie frei wählen darf, und über die so wenig Kritik geübt zu werden pflegt, dass man ihre vollständige Ausführung, den Nachweis ihrer Vereinbarkeit und logischen Berechtigung meistens der Zukunft überlässt. Hier entbehrt das Studium der Geschichte gänzlich der Leitung durch eine fortschreitende Entwickelung nach einem Ziele. Man würde von ihr nur die Zusammenstellung einer Reihe von Meinungen zu erwarten haben, höchstens beeinflusst durch Tendenzen der Zeit. Da ist es denn bei gegenwärtiger Bearbeitung erfreulich, dass die Charakterisirung wenigstens nicht an solchen Momenten achtlos vorbeigeht, die heutzutage bedeutungslos scheinen, obwol ihnen ein dauernder Inhalt nicht abgesprochen werden kann. In der Tat ist in den Berichten über die Ansichten des Mittelalters ein Fortschritt

Digitized by Google

der Auffassung nicht zu erkennen; aber die Angriffe und Verteidigungen der Lehren sind in sofern von historischem Interesse, als sie zeigen, wo und wann die Gedanken zuerst auftreten. Der Verfasser sagt im Vorwort, der vorliegende Versuch, eine Geschichte der Atomistik herzustellen, sei aus seinen Bemühungen hervorgegangen, die Corpusculartheorie des 17. Jahrhunderts in ihrem Zusammenhange mit der Entstehung der modernen Naturwissenschaft und Philosophie zu studiren. Er beschränke sich deshalb auf die Zeit von dem beginnendem Kampfe gegen die scholastische Physik bis zur Einführung des Begriffs der fernwirkenden Kräfte durch Newton; die antike Atomistik trete somit nur unter dem Gesichtspunkte ihrer Gegner und Erneuerer auf. Im ersten Buche, welches vornehmlich einleitenden Charakter trage, habe er nicht vermeiden können, über Teile der griechischen und orientalischen Philosophie zu berichten, in denen er die gebotenen Quellen einer selbständigen philologischen Kritik zu unterziehen nicht in der Lage gewesen sei. Wenn seine mathematisch-naturwissenschaftliche Vorbildung sich hier als ein Hemmniss erwiesen habe, so sei dieselbe hoffentlich der sachlichen Durchdringung des Hauptproblems zu gute gekommen, welches der Geschichte der Physik angehöre und von der philologisch-historischen Seite allein nicht zugänglich gewesen wäre. Eine Reihe von Specialfragen habe müssen berührt werden, über welche Vorarbeiten kaum oder doch sehr lückenhaft vorhanden seien; in dieser Hinsicht könne das Buch vielleicht dazu dienen, für gewisse Capitel der allgemeinen Physik (z. B. Aggregatzustände, Bewegungslehre, Elasticität, Gravitation, Cohäsion, Vacuum u. a.) die Grundzüge zu einer Geschichte darzubieten. Die historischen Untersuchungen seien ihm indes nur das Mittel gewesen, um in der Entwickelung der Frage nach dem Wesen des Körpers eine abgeschlossene empirische Tatsache zu gewinnen, an welcher ein erkenntnisskritisches Problem sich studiren lasse, nämlich die Theorie der Materie zur Enthüllung der Bedingungen der Naturerkenntniss überhaupt. Aus diesem Grunde bilden der systematische und der historische Teil für ihn eine in der Darstellung nicht zu trennende Einheit. Die vorstehenden Aeusserungen sind in einigen Punkten etwas unbestimmt. Das Ende der umfassten Periode ist entschieden kenntlich: nach Hinzutreten des Experiments durch Baco und der Dynamik durch Newton musste die Frage nach den Atomen eine ganz andre Gestalt gewinnen; nur ward sie infolge davon nicht enger begrenzt, sondern bedeutend erweitert. Jedenfalls war der Abschluss an dieser Stelle deutlich motivirt. Der gewählte Anfang hingegen ist in keiner charakteristischen Weise bezeichnet. Das Buch, welches mit der Abneigung der Kirchenväter gegen die Physik beginnt, enthält auch von da an weiter nichts über einen Kampf gegen die scholastische Physik, den der

Digitized by Google

Verfasser gemeint haben könnte, überdies in einer Zeit, welche dem Bekanntwerden des Aristoteles vorausgieng. Sollte der Kampf epochemachend sein, so hätte wenigstens der damalige Zustand der Doctrin, gegen den er sich richtete, näher angegeben werden müssen. Ferner ist nicht wol ersichtlich, welcher Art Zusammenhang der Verfasser zwischen der Corpusculartheorie des 17. Jahrhunderts und der Entstehung der modernen Naturwissenschaft und Philosophie gesucht hat. Da die spätere Zeit nicht auf die frühere wirken kann, so müsste der Verfasser letztere als von ersterer abhängig, d. h. die Wissenschaft als auf Meinungen einzelner Personen gebaut betrachtet haben. Von der deutschen Philosophie auf ihrem 200jährigem Irrgange möchte eine solche Ansicht schon Platz haben: mit ihr steht aber die Naturwissenschaft nicht auf gleicher Stufe. Weiterhin folgt eine rätselhafte Stelle. Von welcher Art muss eine mathematisch-naturwissenschaftliche Vorbildung sein, dass sie als Hemmniss bei Abfassung eines historischen Werkes erscheint? Soll vielleicht der Leser ergänzend hinzudenken: „ohne philologische Vorbildung"? Dass er dazu kein Recht hat, ist selbstverständlich; der Sinn bleibt also dunkel. Dem positiven Teile des Satzes über den Nutzen jener Vorbildung kann man nur in vollem Masse beistimmen. Sehr dunkel ist ferner die Stelle, in welcher der Verfasser erklärt, dass seine historischen Untersuchungen nur dem Zwecke sachlicher Erkenntniss dienen sollen. Von welcher abgeschlossenen Tatsache, von welchem Probleme die Rede ist, sucht man vergeblich zu erraten. Die Frage nach dem Wesen des Körpers ist ein Titel für eine Welt von Fragen. Die Geschichte kann uns das Gebiet derselben einigermassen entfalten und vergegenwärtigen, die vorgefundenen Mängel können zur idealen Vervollständigung antreiben; immer aber finden wir uns auf den umgekehrten Weg hingewiesen, durch eigenes sachliches Studium erst die historischen Tatsachen zu beseelen und zu beleuchten. Dass beides untrennbar zusammengehört, wird auch am Schlusse ausgesprochen; nur hätte nicht der Schein erweckt werden sollen, als ob die Geschichte zur Lösung der Fragen führte. In der Einleitung sucht der Verfasser nach einem Einteilungsprincip. Die doctrinäre Einteilung nach den Annahmen von Atomen und vom Continuum verwirft er und entscheidet sich für eine solche nach dem Interesse der Erkenntniss vom Wesen der Materie. Es sei zu unterscheiden das erkenntnisskritische, das metaphysische und physikalische Interesse. Was hat nun diese Einteilung mit der Abfassung des Buches zu tun, welche sich durchweg biographisch an die Lehren der Schriftsteller anschliesst? Von wessen Interesse ist die Rede? Ist es das Interesse eben dieser Gelehrten oder das der Neuzeit? Wo findet der Verfasser in der Atomistik bis Newton physikalisches Interesse hervortretend? Wozu soll überhaupt die ganze Ausführung

Digitized by Google

an dieser Stelle dienen, da doch nichts vorkommt, worauf sie Bezug hat? Soll sie vielleicht einen Ersatz bieten für den mangelnden Zusammenhang der einzelnen Lehren? Wenn wir nun gleich, nicht nur in einleitenden Worten, sondern auch in vorkommenden Urteilen, vielfach logische Präcision vermissen, so bleibt doch das Werk, namentlich in Anbetracht dass es das erste seiner Art ist, als vielseitig eingehende Charakteristik der Beschäftigung einer langen, an Wissenschaft wenig ergibigen Zeit mit Fragen, die sich dem denkenden Laien wie dem Theologen und dem Kosmophantasten von Alters her bis jetzt als nicht zu umgehende entgegenstellen, ein sehr verdienstliches und dankenswertes Unternehmen. Ueber die Richtigkeit mögen diejenigen entscheiden, welche die Quellen genauer kennen. Hoppe.

Kommentar zu dem Tractatus de numeris datis des Jordanus Nemorarius Buch I. und II. Von Prof. Maximilian Curtze. Sonderabdruck aus dem Oster-Programm 1890 des Königl. Gymnasiums zu Thorn. Thorn 1890. Ernst Lambeck. 4°. 19 S.

Das gegenwärtige Programm enthält nur das 1. Buch des Tractatus, das zweite ist für nächstes Programm angesagt. In Betreff der vorhandenen und der herausgegebenen Schriften von Jord. Nem. ist zu verweisen auf die Einleitung zur Aufgabe der 4 Bücher seiner Geometrie, welche vor 3 Jahren erschienen und im 31. litt. Bericht S. 29 unter Mitteilung der darauf bezüglichen Angaben besprochen worden ist. Hiernach ist der in Rede stehende Tract. de num. datis bereits von Treutlein herausgegeben. Da jedoch mannichfache Fehler in der Ausgabe zu berichtigen waren, so war hinreichender Anlass den Text hier zu erneuern. Neben jedem der 29 Sätze, welche der Text über algebraische Transformationen gibt, steht in zweiter Spalte in deutscher Sprache und modernem Ausdruck der Inhalt. Ohne diesen Commentar würde man schwerlich den Sinn aus den Worten entnehmen können, wenn man sich nicht mit dem eingeführten Gebrauche vertraut gemacht hat. Datus heisst ein numerus, der gegeben oder nach den vorausgehenden Sätzen aus gegebenen zu finden ist. Der Lehrgang lässt das methodische Princip erkennen, die Lösung einer Aufgabe zur Lösung anderer zu verwenden. So werden in einem Satze zwei Unbekannte aus Product und Differenz gefunden, in einem spätern ergibt sich daraus die Lösung der quadratischen Gleichung. H.

Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Erster

Digitized by Google

Teil: Geschichte der Gesellschaft von 1690 bis 1890, zugleich Anfang von Band II der „Mitteilungen". Leipzig 1890. B. G. Teubner. 103 S.

Die zu ihrem diesjährigen Jubelfeste herausgegebene Schrift macht sehr reichhaltige historische Angaben, von denen wir hier nur einige hervorheben wollen. Der Name der Gesellschaft hat zweimal gewechselt: bei ihrer Stiftung durch Heinrich Meissner und Valentin Heins hiess sie „Kunstrechnungsübende Societät", 100 Jahre später „Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Kenntnisse", erst von 1860 an „Mathematische Gesellschaft". Ihre Statuten und die Gestaltung ihres Vereinslebens haben nur allmählich teilweise Aenderungen erfahren. Von Anfang bis jetzt bestand sie aus einer geringern Anzahl einheimischer Mitglieder, einer weit grössern auswärtiger und aus gewählten Ehrenmitgliedern. Der Verkehr mit den auswärtigen Mitgliedern ward bis zur Ausgabe der „Mitteilungen" durch Jahrbriefe von Seiten des Jahrverwalters unterhalten. Die Zusammenkünfte der einheimischen Mitglieder waren der zwanglosen Unterhaltung bei Thee und Tabak gewidmet, erst in der neuesten Zeit giengen Vorträge voraus. Antrieb zur Vereinigung war anfänglich und langezeit das Bedürfniss mancher Rechenlehrer arithmetische und algebraische Fragen und Speculationen über die Forderungen der Schule und kaufmännischen Praxis hinaus zu verfolgen; dies änderte sich erst im zweiten Jahrhundert. Die Festschrift teilt die Geschichte der Gesellschaft in 4 Perioden: die Gründungs-, Kunstrechnungs-, technische und wissenschaftliche Periode. Die erste (30 Jahre) charakterisirt sich durch den Einfluss der hervorragenden Mitglieder, Meissner, Heins, Zimmermann und Halcke, über deren Wirken ausführlicher berichtet wird, die zweite (70 Jahre) durch den exclusiven Beschäftigungszweig, die dritte (70 Jahre) durch die überwiegende Beteiligung der Ingenieure und die Richtung auf praktische Aufgaben, insbesondere der Nautik, des Wasserbaues und der Astronomie. Die vierte (30 Jahre) hebt endlich alle Beschränkungen der Beschäftigung, welche sie noch von der allgemeinen, ideellen Wissenschaft trennten, auf. Hier wächst die Beteiligung sofort und schnell in einem alles frühere weit übertreffendem Masse. Nachdem besonders viele auswärtige Mitglieder, infolge häufiger Uebersiedelung, ihren Wohnsitz in Holland hatten, hat sich von der Hamburger Gesellschaft die Amsterdamer Wiskundig Genootschap abgezweigt, mit ihr indes stets eine gegenseitig fördernde Verbindung unterhalten. Als Beigabe folgt eine Schrift von Bierens de Haan enthaltend Materialien für die Geschichte der Mathematischen Gesellschafts-Mitglieder in den Niederlanden.

H.

Digitized by Google

C. W. Borchardt et son oeuvre. Par M. M. d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées. Extrait de la Revue des questions scientifiques, janvier 1890. Bruxelles 1890. Polleunis, Centerick et de Smet. 11 S.

Der Verfasser lenkt von Aufang an die Aufmerksamkeit auf das internationale Verhalten der Männer der Wissenschaft in Zeiten, wo die Nationen politisch verfeindet sind. Es ist wol nicht daran zu zweifeln, dass ihn bei Herausgabe gegenwärtiger, zunächst für französische Leser bestimmter Schrift das Bestreben leitete, auf eine Annäherung der französischen und deutschen Mathematiker zu gegenseitiger Ergänzung hinzuwirken. Er erkennt nun auf jeder von beiden Seiten einem Manne die auszeichnende Begabung für diesen Zweck und den vorzüglichen Einfluss in dieser Richtung zu. In Frankreich sei es der berühmte und verehrte Gelehrte, den alle reinen Analytiker auf dieser Seite der Landesgrenze ihren Lehrmeister nennen. Der Name wird nicht ausgesprochen, vielleicht aus politischen Rücksichten. In Deutschland aber sei es vor Allen Borchardt. Hierfür wird angeführt, dass Borchardt während des Krieges Gelegenheit fand seine Sympathien für die französischen Mathematiker zu offenbaren, und dass ihm die Pariser Akademie noch in der Zeit der am höchsten erregten Leidenschaften durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten ihren von dieser Sympathie erhaltenen Eindruck bezeugte. Fügt man den glänzenden Empfang hinzu, welcher Borchardt bei seiner Anwesenheit auf der Pariser Ausstellung zuteil ward, so ist das Urteil des Verfassers, welcher ihn als die geeignete Persönlichkeit rühmt das gute Einvernehmen zwischen den französischen und deutschen Gelehrten aufrecht zu erhalten, gewiss vollkommen gerechtfertigt. Das Erscheinen des ersten Bandes der von G. Hettner auf Veranlassung der Berliner Akademie herausgegebenen gesammelten Werke Borchardt's bietet dem Verfasser Anlass zunächst zu obiger Charakterisirung, dann zur Mitteilung des Inhalts nebst biographischen Notizen aus deutscher Quelle. H.

Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle. Par M. Émile Vigarié à Toulouse. Association Française pour l'avancement des sciences, fusionnée avec l'Association Scientifique de France. Congrès de Paris 1889.

Was zunächst den Gegenstand der Schrift betrifft, so wird die Doctrin, von deren Geschichte sie eine Skizze geben will, genannt Geometrie des Dreiecks, mit keinem Worte bestimmt; wir können Begriffe und Grenzen nur aus dem Inhalte zu entnehmen suchen. Das Dreieck, von dem die Rede, ist stets ein Fundamentaldreieck zur

Bestimmug ebener Gebilde, doch mit dem wesentlichen Unterschied gegen die Theorie der trimetrischen Coordinaten, die nirgends erwähnt wird, dass in letzterer mit dem Dreieck nicht die Gebilde, sondern deren Beziehungen zum Dreieck, hier hingegen bei unveränderten Beziehungen die Gebilde variiren. Die Gebilde sind Punkte, Kreise, Kegelschnitte u. s. w. ohne Einschränkung. Von dieser Geometrie des Dreiecks sagt nun der Verfasser, sie existirte erst seit 1873. Die Epoche, mit der sie beginnt, nachdem lange vorher Toricelli, Viviani, Crelle, C. F. A. Jacobi, Grebe und viele Andre über merkwürdige Punkte des Dreiecks Arbeiten geliefert haben, die jedoch als einzeln stehend keinen Wissenschaftszweig bilden, macht Lemoine auf dem ersten Congress der Association française durch eine grössere Anzahl von Entdeckungen, sofern andre Mathematiker, namentlich Brocard, von andern Gesichtspunkten ausgehend auf gleiche Resultate geführt werden. Das schliessliche chronologische Litteraturverzeichniss gibt die Titel von 240 Schriften über den genannten Gegenstand ohne Anspruch auf Vollständigkeit von 1750 bis 1889. Viele derselben sind nach ihren Leistungen vorher kurz charakterisirt. H.

Geometrie.

Elemente der projectivischen Geometrie. Auf Grund neuer vom Professor Carl Küpper herrührender Definitionen und Beweise leichtfasslich zusammengestellt von Wilhelm Rulf, Professor an der k. k. deutschen Staatsgewerbeschule in Pilsen. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1889. Louis Nebert. 96 S.

Die Lehrmethode hat der Verfasser den Vorträgen von Küpper entnommen und zur Einführung in die Elemente der projectivischen Geometrie verwandt. Das Buch setzt keine geniale Geistesrichtung voraus, sondern gibt denjenigen, welche vorher mathematisches Denken auf euklidischer Grundlage erlernt haben, concinne, exacte Auskunft über die erforderlichen Begriffe, ist daher nicht bloss für die Schule, sondern auch für freie Kenntnissnahme geeignet. Es umfasst die Collineation nebst deren Eigenschaften, besonders ausführlich und vielseitig in Anwendung auf Kegelschnitte. H.

Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht.

Digitized by Google

Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearbeitet von Dr. Karl Bobek. Leipzig 1889. B. G. Teubner. 210 S.

Das vorliegende Buch ist eine Bearbeitung der Vorträge, welche C. Küpper seit 1867 an der Prager technischen Hochschule über Geometrie der Lage gehalten hat. Der Verfasser war bestrebt, die Strenge und Klarheit der Vorträge, unbeschadet ihrer Kürze, wiederzugeben. An dem Umfange des Lehrstoffs ist, wie sich annehmen lässt, nichts gekürzt worden; Einiges wird bezeichnet, was ohne Nachteil für das Folgende weggelassen werden kann, und der letzte Abschnitt über Curven dritter Ordnung hat nur die Bestimmung zum Studium derselben anzuregen. Immer aber ist, wol infolge davon, dass auf eine sehr knapp bemessene Unterrichtszeit Rücksicht genommen werden musste, der Lehrgang ziemlich zusammen gedrängt - obwol in allen Stücken präcise und zum Verständniss ausreichende Auskunft erteilt wird, so möchte doch wegen der allzuhohen Ansprüche an die Vorstellungsgabe der Hörer das Dargebotene kaum zu bewältigen sein. H.

Einleitung in die analytische Geometrie. Von Dr. J. Frischauf, Professor an der Universität Graz. Dritte, sehr vermehrte Auflage. Graz 1889. Leuschner u. Lubensky. 76 S.

Der Titel ist entschieden unrichtig. Das Buch enthält nichts weiter als die Coordinatenlehre mit Anwendung auf die Kegelschnitte und Flächen 2. Grades nebst einigen Hindeutungen auf allgemeinere Begriffe, in durchaus synthetischem Lehrgang, sowie einige Aufgaben zur Uebung. H.

Mink's Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Zweite Auflage, vollständig umgearbeitet und erweitert von Dr. Ernst W. Fiedler, Professor an der Kantonschule, Privatdocent am eidg. Polytechnikum in Zürich. Mit 40 Holzschnitten im Text Berlin 1889. Nicolai. 96 S.

Der Titel ist entschieden unrichtig. Es lässt sich nur annehmen, dass bei Usurpation desselben der Bearbeiter (ebenso wie der Autor) von der Existenz einer analytischen Geometrie nichts gewusst, mithin auch wol mit höherer Analysis überhaupt keine Bekanntschaft gemacht hat. Das Buch entwickelt die Lehre von den Coordinaten und zwar gegenüber der 1. Auflage (in verbesserter Auffassung der Bedeutung des schiefwinkligen Systems) mit Anwendung auf Gerade, Kreis, Kegelschnitte, Ebene, Kugel und Umdrehungskegel, vorzugs-

Digitized by Google

weise gerichtet auf Elemente der synthetischen Geometrie. Beim Kegel findet sich auch die Steiner'sche Herleitung der Focaleigenschaften des ebenen Schnittes. H.

Ein mit der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem. Von Dr. Bützberger. Bern 1889. Jent u. Reinert. 31 S.

Das in Rede stehende Problem ist, das Dreieck, dessen Seiten x, y, z, aus seinen winkelhalbirenden Transversalen α, β, γ zu bestimmen. Es führt auf die 3 analogen Gleichungen:

$$yz(x+y+z)(-x+y+z) = \alpha^2(y+z)^2; \quad \text{etc.}$$

Hiernach sind die gesuchten Seiten die Coordinaten des Schnitts dreier Flächen 4. Grades. Diese werden discutirt und viele Sätze über Flächen, die damit in Zusammenhang stehen, hergeleitet.

H.

Leitfaden der darstellenden Geometrie. Von Christoph Dietsch, Realschulrektor. Mit 93 in den Text eingedruckten Figuren und vielen Aufgaben. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Erlangen und Leipzig 1889. Andr. Deichert. 136 S.

Der vorliegende Leitfaden schliesst sich dem Bedürfnisse der Realschulen an. Er unterscheidet sich von andern Lehrbüchern vor allem durch die Fixirung der Gebilde der einzelnen Aufgaben mittelst Coordinaten. Sämtliche Aufgaben sind so gewählt, dass sich übersichtliche Constructionen ergeben, und dass die zur Lösung nötige Zeichnung auf ein Quartblatt geht. Jede Aufgabe ist mit einer Reihe so gewählter Zahlenfälle versehen, dass die Schüler ununterbrochen zu selbständiger geistiger Arbeit angeregt werden. Nach erläuternder Einleitung behandelt das Buch die Bestimmung der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen, dann die Bestimmung von Entfernungen und Winkeln, dann das Dreikant, dann die Bestimmung ebenflächiger Körper; im Anhang folgen vermischte Aufgaben. H.

Constructive Geometrie der Kegelschnitte auf Grund der Focaleigenschaften. Einheitlich entwickelt von Adalbert Breuer, k. k. Reallehrer in Trautenau, Böhmen. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten und für den Selbstunterricht. Mit 80 in den Text gedruckten Original-Figuren. Eisenach 1888. J. Bacmeister. 110 S.

Digitized by Google

Indem die Entwickelung der Eigenschaften der Kegelschnitte stets vom Allgemeinen ausgeht, die Specialfälle aber sogleich anschliesst, wird der Kegelschnitt als Ort eines Punktes erklärt, dessen Entfernungen von einem festen Punkte und von einer festen Geraden proportional sind. Die Fälle imaginärer und unendlich ferner Punkte und Geraden konnten natürlich ohne Lücken der Betrachtung nicht ausgeschlossen werden. H.

Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung. Ein Beitrag zur analytischen Geometrie. (Mit 8 Textfiguren.) Von Adalbert Breuer, k. k. Reallehrer in Trautenau, Böhmen. Eisenach 1888. J. Bacmeister. 39 S.

Der Verfasser benutzt die in seiner (im Vorigen besprochenen) „Constr. Geom. d. Kegelschn." gegebenen Darstellung des Kegelschnitts als Ort unmittelbar zu dessen Ausdruck in Coordinaten, indem er letztere für allgemeine Axenlage einführt. Die so erhaltene quadratische Gleichung, welche er die Normalform nennt, zeigt dann eine Axe, einen Brennpunkt und die Directrix sofort an. Alle Bestimmungsstücke werden dann hergeleitet, dann die Aufgabe gelöst, die allgemeine quadratische Gleichung in jene Normalform überzuführen, dann die Gleichung discutirt. H.

Vermischte Schriften.

Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Zweiter Teil: Wissenschaftliche Abhandlungen, zugleich Band II der „Mitteilungen". Leipzig 1890. B G. Teubner. 189 S.

Die im 2. Bande enthaltenen Abhandlungen sind folgende.

H. Bruns: Note zur Störungstheorie.

M. Cantor: Ueber einige Constructionen von Lionardo da Vinci.

S. Günther: Die Knotenlinien der Atmo- und Hydrosphäre.

A. Hurwitz: Ueber die Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen.

K. Kronecker: Ueber die Dirichlet'sche Methode der Wertbestimmung der Gauss'schen Reihen.

E. Netto: Ueber den grössten gemeinsamen Teiler zweier ganzen Functionen.

Digitized by Google

Th. Reye: Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der kubischen Raumcurven, übersichtlich dargestellt.

R. Sturm: Ueber die sogenannten Strahlencongruenzen ohne Brennflächen.

H. Ahlborn: Zum Pentagramma mirificum.

W. Bock: Combinatorische Ableitung einiger Eigenschaften der Θ Functionen.

E. Busche: Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der aus den 4. Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen.

Eichler: Die Darstellung der cyklischen Curven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie.

E. Hoppe: Methode zur Prüfung der homogenen Magnetisirung eines Magnetstabes.

P. Järisch: Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen.

H. Keferstein: Ueber den Begriff der Zahl.

J. Kiessling: Zur Erklärung des Sehens mit bewaffnetem Auge.

A. Köpcke: Analytische Darstellung einer differentiirbaren Function mit Oscillationen in jedem Intervalle.

H. Krüss: Spectralapparat mit automatischer Einstellung von Prismen.

W. Lazarus: Die sociale Gesetzgebung und die Mathematik.

J. Schröder: Ueber den Zusammenhang der hyperelliptischen σ und ϑ Functionen.

H. Schubert: Kegelschnitt-Anzahlen als Functionen der Raum-Dimension n.

H.

Bulletin de la Société Mathématique de France; publié par les Sécrétaires. Tome XVII. Paris 1889.

Der 17. Band enthält folgende Abhandlungen.

F. Lucas: Statik der Polynome.

R. Perrin: Versuch einer vollständigen Theorie des Systems zweier quadratischen ternären Formen.

E. Carvallo: Formeln der Quaternionen für die Reduction der vielfachen Integrale auf einander.

Ch. Bioche: Ueber die Linienelemente auf Regelflächen. — Bemerkungen über die Krümmungslinien, welche durch einen Nabelpunkt gehen. — Ueber die Bertrand'schen Curven.

M. Frolov: Gleichheit von Gruppen auf 2 Grade.

Issaly: Geometrische Studie über die Krümmung der Pseudo-Flächen.

Digitized by Google

Berdellé: Elementarer Beweis eines von E. Catalan aufgestellten Satzes.

E. Goursat: Ueber eine Eigenschaft der kleinsten Flächen.

C. A. Laisant: Ueber eine merkwürdige Determinante. — Note über die Variationen des Verhältnisses von 4 Punkten, deren 3 fest sind.

M. d'Ocagne: Ueber die Bernoulli'schen Zahlen. — Ueber die isometrischen Curven einer Geraden in Bezug auf ein System zusammenlaufender Geraden.

X. Antomari: Ueber eine charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien eines Kegels.

Gomes Teixeira: Note über die Integration der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung.

E. Picard: Ueber gewisse vierfach periodische Ausdrücke.

A. Jonquière: Note über die Reihe $\Sigma n^{-s} x^n$.

G Koenigs: Ueber die Gesetze einer Centralkraft, welche Function der Entfernung, und für welche alle Trajectorien algebraisch sind.

J. Perrott: Ueber einen im „Bulletin" ausgesprochenen empirischen Satz (s. XVI. 129. Catalan).

A. E. Pellet: Ueber die nach einem Prim-Modul reducirten Functionen.

Laquière: Ueber ein kinematisch geometrisches Problem.

H. Jeffery: Ueber die Identität der Knoten einer Curve 4. Ordnung und der Knoten ihrer Contravarianten 4. und 6. Grades.

Papelier: Anwendung der Quaternionenrechnung auf die Untersuchung der Flächen 2. Grades. H.

Atti della Reale Academia dei Lincei. Anno CCLXXXVI. 1889. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei Segretari. Volume V. Roma 1889.

Der 5. Band enthält folgende mathematische Abhandlungen.

Pincherle: Die recurrenten Systeme 1. Ordn. 2. Gr. — Neue Beobachtungen. — Einige Sätze über die Kettenbrüche.

Guccia: Ueber die Classe und die Anzahl der Wendepunkte einer algebraischen Curve mit beliebig vielen Singularitäten. — Ueber eine Eigenschaft der algebraischen Flächen mit beliebig vielen Singularitäten. — Ueber den Schnitt dreier algebraischen Flächen in einem singulären Punkte und über eine Frage betreffend die rationalen Transformationen im Raume.

Govi: Gebrauch der centralen und centrischen Ebenen, der polaren und polischen Punkte und der entsprechenden Ebenen zur

Digitized by Google

Bestimmung der conjugirten Brennpunkte, des Ortes, der Lage und Grösse der Bilder in optischen Systemen. — Von den entsprechenden Punkten derselben auf sphärischen Flächen.

Ricci: Ueber gewisse Systeme von Functionen. — Ueber einen Punkt der Theorie der ternären quadratischen Differentialformen.

Pizzetti: Ueber eine Verallgemeinerung des Princips des arithmetischen Mittels. — Ueber eine gewisse Formel für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler. — Ueber die Berechnung des mittleren Fehlers eines Systems von Beobachtungen.

Volterra: Von den complexen Variabeln in höhern Mannichfaltigkeiten. — Ueber die conjugirten Functionen. — Ueber ihre Functionen und Differentialparameter.

Padova: Ueber die infinitesimalen Deformationen.

Tonelli: Ueber eine Classe partieller Differentialgleichungen m ter Ordn. — Einige sie betreffende Formeln.

Cesàro: Ueber die Formeln von Maxwell. — Fundamentale Formeln für die innere Analysis der Curven.

Crescini: Ueber die Bewegung einer auf fester Ebene rollenden Kugel.

Bianchi: Ueber die Systeme linearer Gleichungen mit vollständigen Differentialen. — Ueber die quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Unbestimmten. — Ueber die linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordn.

Arzela: Functionen von Linien.

Reina: Ueber die „*oricicli*" der pseudosphärischen Flächen. — Von einigen Eigenschaften der chrakteristischen Linien.

Beltrami: Ein italienischer Vorläufer von Legendre und Lobatschewsky. — Ausdehnung des Alembert'schen Princips auf Elektrodynamik.

Montesano: Ueber die involutorische Transformation des Raumes, welche ein Tetraedercomplex bestimmt.

Pucci: Vom charakteristischen Winkel und Linien der Flächen.

Wolynski: Galileo Galilei in Rom 1624.

Morero: Ueber die helikoidale Bewegung der Flüssigkeiten.

Siacci: Ueber die Kräfte, welche gleiche Verrückungen hervorbringen.

Bigiavi: Ueber die linearen Differentialgleichungen.

Castelnuovo: Anzahl der Räume, welche mehrere Gerade in einem Raume von n Dimensionen schneiden.

Cerruti: Ueber die Deformation einer isotropen Hohlkugel für gegebene Verrückungen der Punkte ihrer 2 Grenzflächen.

Bortolotti: Ueber einen Satz der Theorie des Zusammenhangs.

Marcolongo: Ueber die Deformation einer isotropen homogenen Kugel für specielle Grenzbedingungen. H.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift f. Geschichte der Mathematik. Hrsg. v. G. Eneström Jhrg. 1890. (4 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mayer & M. Jährlich 4 Mk.

Festschrift, hrsg. v. der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. 3. Tl. Hamburg, Verlagsanstalt u. Druckerei. Geb. 4 Mk.

Lasswitz, K., Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. 2. Bd. Höhenpunkt u. Verfall der Korpuskulartheorie d. 17. Jahrh. Hamburg, Voss. 20 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 10. 1 Mk. 50 Pf.; Nr. 11. 3 Mk.; Nr. 12. 1 Mk. 50 Pf. Leipzig, Engelmann.

Prometheus. Illustrirte Wochenschrift üb. die Fortschritte der angewandten Naturwissenschaften, hrsg. v. O. N. Witt. 1. Jahrg. 1889/90. Nr. 27. Berlin, Mückenberger. Vierteljährlich 3 Mk.

Rosenberger, F., die Geschichte der Physik in Grundzügen m. synchronist. Tabellen der Mathematik, der Physik u. beschreib. Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte. 3. Thl. Geschichte der Physik in den letzten 100 Jahren. 2. Abth. (Schluss d. Werkes.) Braunschweig, Vieweg & S. 10 Mk. 40 Pf.

Methode und Principien.

Pochmann, E., „Wärme ist nicht Kälte u. Kälte ist nicht Wärme“ od. e. daraus abgeleitete neue mechan. Wärme-Theorie f. die gesammte organ. u. unorgan. Welt. Linz, Fink. 2 Mk.

Reinhard, Ph., Methode f. den Rechenunterricht. Text u. Auflösgn. m. Probe. 2. Afl. Bern, Schmid, Francke & Co. 50 Pf.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht
XXXV.

Methode und Principien.

Elemente der Psychophysik. Von Gustav Theodor Fechner. Zweite, unveränderte Auflage mit Hinweisen auf des Verfassers spätere Arbeiten und einem chronologisch geordneten Verzeichniss seiner sämmtlichen Schriften. Erster, zweiter Theil. Leipzig 1889. Breitkopf u. Härtel. 346 + 571 S.

Die 2. Auflage ist von W. Wundt besorgt: vollzogen ist die Berichtigung von Druckfehlern, in Noten beigefügt die von Fechner später gegebene Berichtigung von Textfehlern, die ohne Einfluss auf das Uebrige sind, auf spätere Berichtigung verwiesen, wo ein Ganzes später abgeändert worden ist. Die Idee des Werkes wird vom Verfasser selbst durchaus zutreffend im Vorwort charakterisirt. Die gesamte Untersuchung basirt auf keiner Ansicht über das Wesen der Seele, beschränkt sich vielmehr ganz auf Fragen, die davon unabhängig sind. Es wird also nicht vorausgesetzt, dass die Seele ein physikalisches Object sei, d. h. ein solches, dessen Vorgänge und Tätigkeiten aus Ursachen eindeutig hervorgehen. Die Willensfreiheit, somit die gleichzeitige Möglichkeit verschiedener Vorgänge im psychischen Gebiete wird nicht in Frage gestellt. Dass eine solche Verzweigung mit durchgehender Gesetzmässigkeit verträglich ist, zeigt die mathematische Analysis. Die Verzweigung erschwert die Untersuchung, aber macht sie nicht illusorisch. Unter den unendlich vielen constanten Beziehungen, welche ungeachtet aller Verzweigung denkbar bleiben und gesucht werden können, hat die vorliegende Schrift sich nur einer zugewandt, der quantitativen Abhängigkeit der Sinnesempfindungen von deren Reizen. Dass eine solche für alle

Digitized by Google

Seelen, für alle Zeiten, für alle bekannten, mutmasslichen und unbekannten Umstände gültig besteht, ist offenbar apriori durch nichts gewährleistet. Eine Function von, man weiss nicht wie vielen Argumenten ist zu bestimmen durch beliebig viele Werte, welche bekannten Werten einiger dieser Argumente entsprechen. Der Verfasser kennt die Schwierigkeit, lässt sich aber dadurch nicht abschrecken. Dasselbe Experiment z. B. öfters wiederholt gibt nicht das gleiche Resultat, denn jede Wiederholung ändert den Zustand der Nerven. Er betrachtet die Veränderlichkeit nur als hinzukommende Forderung auch diesen Einfluss zu erforschen und zu berücksichtigen. In der Entdeckung der ersten constanten Relation ist ihm E. H. Weber vorausgegangen. Sie betrifft nicht den Lauf der gesuchten Function, sondern nur gewisse Grenzen. Auf diese beziehen sich auch Fechner's Untersuchungen. Die behandelten Themata sind: das Princip der lebendigen Kraft für Seelentätigkeit; das Weber'sche Gesetz; die Schwelle des Bewusstseins der Empfindung; Schwellenwerte in den verschiedenen Sinnesgebieten; Parallelgesetz zum Weber'schen Gesetze bezüglich auf veränderte Empfindungsfähigkeit; Gesetze der Mischungsphänomene; Formeln und Folgerungen des psychischen Masses; specielle Untersuchungen über einige Empfindungsgebiete; innere Psychophysik; Historisches.

Hoppe.

Richtigstellung der in bisheriger Fassung unrichtigen mechanischen Wärmetheorie und Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Aetherbewegungen. Von Albert R. v. Miller-Hauenfels, Professor a. D. in Graz. Wien 1889. Manz. 256 S.

Als unrichtig bezeichnet der Verfasser die Annahme der Wärmetheorie, dass die innere Wärme, d. h. diejenige, welche nach Abzug des Wärmeäquivalents der äussern Arbeit von der Gesamtwärme noch im Reste bleibt, bloss von dem Anfangs- und Endzustande eines Körpers abhange, und behauptet, dass vielmehr die Gesamtwärme bloss vom Anfangs- und Endzustande abhängig sein müsse. Aus der Gleichung

$$\partial Q = \partial U + Ap\,\partial v$$

leitet er für Gase ab:

$$R = \frac{c - c_1}{A} = p\,\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{pv - p_0 v_0}{t - t_0}$$

was nur für constanten Druck zutrifft. Nach seiner Berichtigung ist dagegen

$$\partial U = c_1 \partial t + Av\,\partial p; \quad \partial Q = c_1 \partial t + Av\,\partial p + Ap\,\partial v$$

was allein den letztern Wert für *R* liefert. Als einen weitern Fehler bezeichnet er es, die Temperatur aus der Hauptformel auszuscheiden und abgesondert in eine Beziehung zur Gesamtwärme zu setzen, welcher eine ansehnliche Zahl von Tatsachen widerspreche. Der Versuch einer allgemeinen Theorie der Aetherbewegungen, welcher den 2. Teil der Schrift ausmacht und die Theorie der Wärme, des Lichtes und der Elektricität umfasst, legt die Annahme zweier Aether, eines raumerfüllenden und eines aus Molecülen bestehenden, zugrunde. Einzige Kraft, genannt Centralkraft, ist die Anziehung der Molecüle nach Newton'schem Gesetze. Als Endergebniss wird ausgesprochen, dass dieser Aether in seinem Doppelsein der Träger aller Erscheinungen ist, und dass diese durch seine Bewegungen hervorgebracht werden. H.

Optische Häresien, erste Folge und das Gesetz der Polarität. Von Robert Schellwien. Halle a. S. 1888. C. E. M. Pfeffer. 108 S.

Unter dem Titel „Optische Häresien" erschien 2 Jahre früher eine Schrift von R. Schellwien, ganz oder zum Teil über dieselben Gegenstände, welche im 15. litt. Bericht S. 35. besprochen ist. Die gegenwärtige nimmt darauf weder Bezug, noch erwähnt sie dieselbe; daher kann sie nicht wol ihre Fortsetzung sein sollen. Doch auch als Verbesserung kann man sie wenigstens nicht gelten lassen; denn während sich in der vorigen Arbeit noch manche Gedanken erkennen liessen, findet man jetzt nur Phantasien ohne deutlich begrenzte Begriffe. Es genüge zur Charakterisirung, 2 unter 6 „Sätzen" anzuführen, die sich ihm aus seiner Einleitung ergeben haben: „3. das Sein der einzelnen Naturwesen fliesst ganz aus dem all-einigen Leben, ihr Wirken auf einander, der Naturprocess, allein aus ihnen selbst; 4. das all-einige Leben, sowol das göttliche urschöpferische, als das menschliche nachschöpferische, ist Geist; das natürliche Leben der Einzelwesen ist Unbewusstsein." Wie wenig der Verfasser sich Rechenschaft über seine Begriffe gibt, zeigt der erste Satz der Einleitung, welcher augenscheinlich sein Auftreten überhaupt motiviren soll. Er behauptet, die Praxis der Naturwissenschaft und ihre zur Zeit herrschende Theorie, die atomistisch-mechanische, stünden nicht in Einklang mit einander — und zwar sofern erstere sich auf Erfahrung gründete; letztere ein Sein construirte, das in der Erfahrung nicht gegeben wäre und ihr sogar widerspräche. Hätte der Verfasser hier nur zu Rate gezogen, was er später, obwol einzeln, selbst sagt, so würde die ganze Behauptung in nichts zerronnen sein. Dass von jeder Erfahrung dasselbe gilt, was er der Theorie zuschreibt, ist

Digitized by Google

leicht genug zu bemerken: selbst die einfachste Erfahrung, die Gesichtswahrnehmung eines Körpers, ist mehr als das Gegebene in ihr, die Gesichtsempfindung; sie construirt ein Sein ausser dem Gegebenen, den Körper ausser dem gesehenen Teile der Oberfläche, ein Sein das sich gleich bleibt, wenn die Empfindung sich verändert. Ebensowenig kann eine Erfahrungswissenschaft ohne Theorie existiren, mithin ist es unsinnig von einer Discrepanz beider zu reden, als wenn sie zwei unabhängige Wege der Erkenntniss wären oder sich tatsächlich je für solche ausgegeben hätten. Wol zu bemerken, nicht von einzelnen Punkten der Theorie, die mit den Beobachtungen unvereinbar wären, ist hier die Rede, denn solche sind nirgends aufgewiesen, sondern, wie es in der unmittelbar folgenden Erläuterung ausdrücklich ausgesprochen ist, die Theorie, meint der Verfasser, befindet sich darum nicht im Einklang mit der Erfahrung, weil die Atome andere Dinger sind als die Objecte directer Beobachtung. Das Inhaltsverzeichniss lässt in einer Reihe allgemeiner Fragen neue Erklärungsversuche erwarten. Allein die Ausführung, deren Einheitlichkeit nur darin besteht, dass überall dieselben Wörter von philosophischem Klange auftreten, geht nicht einmal soweit auf die Fragen ein, dass es zu ersehen wäre, was sich der Verfasser dabei gedacht hat. Hoppe.

Zwei Materien mit drei Fundamental-Gesetzen nebst einer Theorie der Atome. Erklärungen der verschiedenen Zustände der Materien, nämlich der Atome, Aggregatformen und chemischen Verbindungen, sowie der Wärme, Elektricität und des Magnetismus nebst einigen Anwendungen der Atomtheorie auf die Himmelskörper. Wissenschaftlich behandelt von Wilhelm Bühler, Ingenieur. Stuttgart 1890. W. Kohlhammer. 62 S.

Der Verfasser nimmt ponderable Materie und einen Aether an, der aus starren kugelförmigen Atomen besteht. Erstere zieht sich und den Aether an, sich in (—2)ter, den Aether in (—4)ter Potenz des Abstands; der Aether stösst sich in (—4)ter Potenz der Entfernung ab. Den Atomen wird Rotation zugeschrieben. Es werden teils Rechnungen, teils Betrachtungen angestellt und aus beiden einige summarische Schlüsse in Betreff des Chemismus, der Elektricität u. s. w. gezogen, deren Resultate mit empirischen Tatsachen vereinbar sind. Hoppe.

Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. Zusammengestellt von F. J. Brockmann, vorm. Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu

Digitized by Google

Cleve. Mit fünf Holzschnitten. Leipzig 1889. B. G. Teubner. 111 S.

Das Vorliegende hat nichts zu tun mit dem Bestreben mancher Didaktiker, eine gemeinsame Methode für Lösung eines weitest möglichen Bezirks von Aufgaben aufzustellen, somit dem Schüler das nicht immer erfolgreiche Suchen nach Lösungen zu ersparen. Ein solches Ziel möchte die Bezeichnung als „Versuch“ vermuten lassen. Vielmehr handelt es sich hier, ohne Erfindung neuer Mittel und Wege, allein um leichtfassliche, geordnete Darlegung der allgemeinen Principien und Elemente, mit denen der Schüler bei Behandlung aller Aufgaben bekannt und vertraut sein oder werden muss. Es wird das Wesen der Analysis nebst der Anwendung der Oerter und der Reduction erst im allgemeinen auseinandergesetzt, dann an 125 Beispielen gezeigt, dann an mehrern derselben die daraus folgende Construction und der Beweis ausgeführt, endlich das Verfahren bei der Determination gelehrt. Zu freier Uebung sind noch 179 neue Aufgaben, manche mit Ratschlägen, hinzugefügt. H.

Sammlungen.

J. Lieblein's Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis zum Selbstunterricht. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage herausgegeben von Dr. W. Láska. Prag 1889. G. Neugebauer. 180 S.

Eine reiche Auswahl interessanter Aufgaben über die Arten der Functionen, über cyklometrische Functionen, Grenzwerte, Stetigkeit und Unstetigkeit, Gleichungen, unendliche Reihen, Doppelreihen, Reihenentwickelungen, unendliche Producte, Functionen Complexer und Kettenbrüche, entnommen aus einer grössern Anzahl von Werken und Abhandlungen, welche bei allen einzelnen Aufgaben angeführt sind, und geordnet nach den Doctrinen, denen sie zugehören, findet sich hier vom Verfasser zusammengestellt, vom Herausgeber der 2. Auflage vermehrt. H.

Uebungsbuch der Algebra. Von Adolf Sickenberger, Professor am k. Luitpoldgymnasium in München. Erste Abteilung: Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten einschliesslich der linearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Zweite Abtei-

Digitized by Google

lung: Dritte Stufe der Rechnungsarten, quadratische Gleichungen, Reihen, Kombinatorik. München 1890. Theodor Ackermann. 102 + 136 S.

Das Uebungsbuch ist bestimmt, dem „Leitfaden der elementaren Mathematik“ von A. Sickenberger zur Ergänzung zu dienen. Die Reihenfolge der Aufgaben folgt gruppenweise den Paragraphen des Lehrbuchs. Die Data sind teils in Buchstaben, teils in Zahlen aufgestellt. Der Umfang ist auf dem Titel genannt. H.

Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grosse Anzahl von Fragen und Aufgaben. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und andern höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Erster Teil. Die 7 arithmetischen Operationen. Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Zweiter Teil. Pensum der Obersekunda und Prima des Gymnasiums. Rostock 1890. Wilh. Werther. 291 + 189 S.

Resultate zu dem Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Erster, zweiter Teil. Herausgegeben von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1889. 1890. Wilh. Werther. 82 + 97 S.

Das Buch ist keine blosse Sammlung von Beispielen zur Uebung, sondern entwickelt vorgängig den ganzen Lehrinhalt, für jeden Abschnitt, durch Fragen, welche auf die Begriffsbestimmungen und auf die Lehrsätze hinführen, stellt dann die Sätze und Regeln auf und lässt dann Beispiele zur Ausrechnung folgen; es ist demgemäss zur sorgfältigsten Repetition des Unterrichts wie zur Einübung eingerichtet. Die Gegenstände des 2. Teils sind die quadratischen, Exponential- und logarithmischen Gleichungen, arithmetische Reihen höherer Ordnung, geometrische Reihen, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, Combinatorik, Wahrscheinlichkeit, binomischer und polynomischer Lehrsatz Die Rechenaufgaben beginnen meist mit solchen, die nur das Verständniss prüfen und sofort zu beantworten sind. Die „Resultate“ übergehen diese und geben nur, was dem Lehrer zustatten kommt. H.

Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Verfasst von Dr. Arwed Fuhrmann, ordentl. Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Dresden. Mit 28 Holzschnitten. Berlin 1888. Ernst u. Korn. 148 S.

Digitized by Google

Das Vorliegende ist der erste von 6 Teilen des gleichzeitig angekündigten Gesamtwerks: „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik.“ Dass dem Techniker die Kenntniss der Differential- und Integralrechnung vielfach zustatten kommt, ist wol kein Zweifel. Wenn er gleichwol beim Studium derselben den Eindruck erhält, dass die höhere Analysis sich nur in äusserst geringem Masse mit denjenigen mathematischen Fragen beschäftigt, die ihm sein Fach bietet, so ist die Erklärung sehr leicht. Die Mathematik muss, auch wo sie die Ziele der Praxis verfolgt, um ihres Fortschritts willen andere Wege gehen als die Technik; sie muss idealisiren und zerlegen, was in der Natur vereinigt ist; unmittelbare Berührungspunkte bieten sich daher nur wenige; diese sind vereinzelt und werden oft nicht als solche erkannt. Um so verdienstlicher ist das gegenwärtige Unternehmen, Beispiele derart in hinreichender Anzahl zu sammeln, dass dadurch der Zusammenhang der Doctrin mit der Praxis beständig im Bewusstsein erhalten bleibt. Die Einteilung schliesst sich an die Doctrin an, deren Erläuterung auch jedem Abschnitte vorausgeschickt wird, während die Anwendungen zu verschiedenen Zweigen der Technik gehören. Den Anfang bildet die Theorie der Wirkungen von Messungs- und Beobachtungsfehlern; darauf folgt Einiges über Bewegung und Anziehung. Den ferneren Inhalt machen die Linien und Flächen, vieldeutige Symbole, Maxima und Minima und Reihen aus.

H.

Erd- und Himmelskunde.

Die einfache Erdzeit mit Stundenzonen und festem Weltmeridian als Zifferblatt ohne Störung der Tageszeiten für alle Länder und Völker der Erde. Dargestellt von Friedrich Buchholtz, Prediger em. Berlin 1890. C. F. Conrad. 31 S.

Der Redeform der Schrift zufolge, welche bei Auseinandersetzung der bekanntesten Dinge unmässig lange verweilt, ist dieselbe für Leser bestimmt, die in der mathematischen Geographie unbewandert, in den heimischen Vorstellungen noch zu sehr befangen sind. Diese Unkundigen sucht der Verfasser zu belehren und für ein eigenes Project einzunehmen in einer Frage, an der sie nur in sofern beteiligt sein können, als sie von unvernünftigen Anordnungen zu leiden haben, ohne doch je dazu berufen zu sein, für Hebung der Uebelstände etwas zu tun. Zeigt es nun schon Mangel an Ueber-

Digitized by Google

legung, dass er seinen Vorschlag betreffend eine gemeinsame Zeitrechnung an die unrichtige Adresse bringt, so ist dieser Mangel noch auffälliger dadurch, dass er mit keinem Worte sagt, für welchen Geschäftsbezirk seine Zeitrechnung gelten soll. Auf dem Titel und an einer Stelle der Schrift ist angedeutet, dass der Verfasser die Zeitrechnung nach dem Mittag jedes Ortes nicht aufzugeben denkt. Auch stellt sich die Notwendigkeit sie beizubehalten durch die Erwägung heraus, dass im durchschnittlichen Leben eines Menschen die Frage nach der Ortszeit die Frage nach der Erdzeit viel tausendmal überwiegt. Soll aber, wie der Titel es verspricht, die Ortszeit nicht gestört sein, so ist es ferner unerlässlich, dass alle für das bürgerliche Leben geltenden Bekanntmachungen, in Kalender, Cursbuch u. s. w., so weit sie sich auf einen Ort beziehen, in Ortszeit berechnet sind. Die Mühe einer einmaligen Umrechnung ist verschwindend gering gegen die, welche alle Bürger bei jedesmaliger Umrechnung haben würden. Da in vielen Ländern hiernach nicht verfahren wird, so hätte der Verfasser doch darüber Klarheit geben müssen, welches Verfahren er bei seinem Vorschlag im Sinne hat, d. h. welche Grenzen er der Anwendung der verschiedenen Zeitrechnungen geben will. Statt dessen ist fast in der ganzen Schrift nur von einer Zeit, der Erdzeit, die Rede, in einer Weise, als ob alle Uhren nach derselben zu stellen seien, im Widerspruch mit zwei einzelnen Aeusserungen. Nach natürlicher Betrachtung ergibt sich, dass mindestens zweierlei Zeitrechnung unentbehrlich ist, die Ortszeit für das bürgerliche Leben einschliesslich der Reisen und der Correspondenzen, und die von der Längendifferenz unabhängige Erdzeit für die Verwaltungen der Institute der Astronomie, Telegraphie, Eisenbahnen und Post. Dass statt der letztern eine grosse Anzahl verschiedener Zeitrechnungen mit unregelmässiger Abgrenzung existiren, ist der Uebelstand, gegen den mit Recht der Verfasser seinen Vorschlag richtet. Dieser unterscheidet sich, wenn wir ihn ausdrücklich auf letztere Bestimmung beschränken, sehr löblich von dem Projecte, für welches neuerdings häufig in den Zeitungen agitirt wird, welches statt das Uebel zu vermindern es vermehren und Deutschland in die Misere der Nachbarstaaten durch Nachahmung mit hineinziehen will. Der Vorschlag des Verfassers geht dahin, den Meridian des Uebergangs der Tageszählung, den der Behringstrasse, auch zum Ausgangspunkt der Stundenzählung zu wählen, die Teile der Stunde aber von 15 zu 15 Grad Länge (er nennt die Streifen zwischen den Meridianen sehr uneigentlich Zonen) neu zu zählen. Die Vorteile einer solchen Anordnung im Vergleich mit der bisherigen liegen zutage; ebenso deutlich ist es aber auch, dass der Vorteil noch grösser wird, und allerlei Unzuträglichkeiten, veranlasst durch die Durchschneidung der Länder von Grenzmeridianen weg-

Digitized by Google

fallen, wenn wir die Stundengrenzen ganz streichen und gemeinsame Tageszeiten über die ganze Erde einführen. Der gewöhnliche Fehler in der Besprechung des Projectes besteht in der Vermischung der zwei Zeitrechnungen, die nun einmal bestehen müssen, die daher aus einander zu halten sind, und von denen nie die eine ignorirt werden sollte. Derselbe Fehler erklärt in der vorliegenden Schrift zunächst die überflüssige Anordnung der sogen. Stundenzonen, die doch wol nur aus dem Gedanken entsprungen ist, die Erdzeit müsse zugleich die Ortszeit vertreten und derselben stets nahe bleiben; ferner die eigentümliche Meinung des Verfassers, in Deutschland seien die Eisenbahnen gezwungen nach Osten schneller zu fahren als nach Westen, damit die Hin- und Rückreise nach Ortszeit gleiche Dauer hat — wer stellt denn eine solche Forderung? — ferner eine Aeusserung über die zu grosse Mühe der Umrechnung bei Herstellung der Fahrpläne, welche aber die Schuld statt der Vielheit der Zeitrechnungen vielmehr der regelmässigen Zeitübertragung beizumessen scheint; im ganzen liegt auch wol derselbe Fehler dem Schweigen über das Verhältniss der beiden Zeitrechnungen zugrunde.

Hoppe.

Die Konstanten der physischen Libration des Mondes abgeleitet aus Schlüters Königsberger Heliometer-Beobachtungen von Dr. Julius Franz, Observator und Privatdocent. Sonderabdruck aus Band 38 der Astronomischen Beobachtungen auf der Königl. Universitäts-Sternwarte zu Königsberg. Königsberg i. Pr. 1889. R. Leupold. Fol. 47 S.

Die ersten noch ziemlich unsichern Bestimmuagen der Constanten der physischen Libration des Mondes sind von Nicollet, Kreil und Stambucchi durch Messung der Differenzen in Rectascension und Declination zwischen einem Mondkrater und dem Mondrande gemacht worden. Dann hat Wichmann dieselben auf Grund von Heliometerbeobachtungen nach der von Bessel angegebenen Methode bestimmt, nach ihm auch Hartwig. Nach eigner Berechnung auf Grund der besten und andauerndsten Heliometerbeobachtungen von Schlüter fand der Verfasser erhebliche Abweichungen, die auch einigen weiter gehenden Berücksichtigungen zuzuschreiben sind. In der vorliegenden Schrift wird zuerst die Theorie der physischen Libration dargelegt; dann folgt die Vergleichung mit der Theorie von Wichmann, dann nähere Angaben über Schlüter's Beobachtungen, Wichmann's vorbereitende Rechnungen, die Constanten des Heliometers, der Wärmefactor, der Schraubenwert, periodische Schraubenfehler, die Reduction der Beobachtungen, die Refraction, die Lage des Kraters

gegen die Mitte der Mondscheibe, der Einfluss der Mondphase, der selenographische Ort des Kraters, die Bedingungsgleichungen, Normalgleichungen und Auflösungen, Schlussfolgerungen, Anwendungen auf Beobachtungen des Mondortes, dann 10 Tabellen. H.

Lehrbuch der Meteorologie für Studierende und zum Gebrauche in der Praxis. Von Dr. W. J. van Bebber, Abteilungsvorstand der deutschen Seewarte. Mit 120 Holzschnitten und 5 Tafeln. Stuttgart 1890. Ferdinand Enke. 391 S.

Das Vorliegende ist eine erschöpfende Zusammenstellung der bis jetzt erreichten Kenntnisse der atmosphärischen Erscheinungen, soweit sie sich auf beobachtete Tatsachen und daraus gefolgerte Gesetze beziehen. Physikalische Erklärung der Vorgänge, für welche dieselbe nicht ausreichend gegeben werden kann, wird nicht versucht. Der Verfasser bezeichnet seine Behandlungsweise als einen Mittelweg zwischen den Lehrbüchern von Sprung und von Mohn. Die der Reihe nach behandelten Themata sind folgende: Erdatmosphäre, Temperatur, Luftdruck, Wasserdampf, Bewegung der Luft, Niederschläge, elektrische, optische Erscheinungen, Wechselwirkung der meteorologischen Elemente, Stürme, praktische Meteorologie (Wettertelegraphie). Als Beilagen sind gegeben: Isothermen für Januar und Juli, Meerestemperaturen für Februar und August, Isobaren für Januar und Juli, Wolkentafel. H.

A. F. Möbius. Die Hauptsätze der Astronomie. 7. Auflage. Für Schulen und zur Selbstbelehrung umgearbeitet und erweitert von Professor H. Cranz. Mit 29 Figuren und einer Tabelle. Stuttgart 1890. G. J. Göschen. 16°. 111 S.

Das Vorliegende ist eine Auswahl astronomischer Lehren, die sich für den Schulunterricht eignen. Ausgehend von den dem Wissbegierigen nächst liegenden Fragen über die Weltkörper behandelt es die Geschichte der Erforschung, die successiven Fortschritte in der genaueren Bestimmung und somit die empirische Begründung der Lehren. Die Gegenstände sind der Reihe nach: Erde, Sonne, Mond, Planeten, Kometen und Meteore, Fixsterne. H.

Ueber das Geoid. Mit einer Figurentafel. Inaugural-Dissertation von Ignaz Bischoff, Privatdocent an der techn. Hochschule München. München 1889. F. Straub. 32 S.

Digitized by Google

Im ersten der 2 Teile der Schrift werden die Relationen aufgestellt, welche für jede Gestalt der Erdoberfläche genau gelten, diese dann für das Rotationsellipsoid entwickelt und die Formeln für kleine Entfernungen reducirt. Im 2. Teile werden die Abweichungen des Geoids vom Rotationsellipsoid, ausgedrückt durch die Winkel zwischen der Verticale eines Orts und der Azimutebene eines andern, aus Mondbeobachtungen berechnet. Als Unterscheidendes seiner Methode gegenüber der von Helmert gibt der Verfasser an, dass sie frei von der Theorie des Mondes ist, ohne ihr indes einen Vorzug zuzuschreiben. H.

Janus, ein Datumweiser für alle Jahrhunderte. Von Dr. phil. J. L Doliarins. Leipzig (1890). Dyk.

Der Datumweiser besteht aus einer Tafel 23 ctm breit, 18 ctm hoch, mit einem Schieber, der für jedes Jahr einzustellen ist, und dann für jeden Monatstag den Wochentag angibt. Auf der Kehrseite stehen viele Notizen. Bewegliche Feste sind nicht berücksichtigt, dagegen der Unterschied des julianischen und gregorianischen Kalenders. H.

Himmel und Erde. Populäre illustrirte Monatsschrift. Herausgegeben von der Gesellschaft Urania. Redacteur Dr. Wilh. Meyer. I. Jahrgang. Berlin 1889. Hermann Paetel.

Die neue Zeitschrift verfolgt den ausgesprochenen Zweck: „die Popularisirung der Naturwissenschaften und die Freude an der Naturerkenntniss zu fördern.“ Diese Angabe ist ohne Zweifel zu weit gefasst. Die tatsächliche Wirksamkeit concentrirt sich auf ein viel engeres Feld. Zweige der Naturwissenschaft wie Zoologie und Botanik sind zunächst ganz ausgeschlossen. Die Erde hat überhaupt unter den Weltkörpern nur den Vorzug, dass unsere Kenntniss von ihr weiter reicht; dagegen handelt es sich um tellurische Vorgänge nur soweit analoge auch auf andern Weltkörpern erforscht werden können, wozu auch atmosphärische Erscheinungen, Vulcanausbrüche und im Interesse kosmogonischer Fragen manches Geognostisches gehört. Daher ist das Ziel noch immer vollständig umfassend ausgedrückt, wenn, wir sagen, dass die Freude an der Kenntniss und Beobachtung der Himmelserscheinungen gefördert werden soll. Der erste Jahrgang enthält folgende Abhandlungen.

J. V. Schiaparelli: Ueber die beobachteten Erscheinungen auf der Oberfläche des Planeten Mars.

Digitized by Google

W. Foerster: Ueber die Ziele der Popularisirung der Naturwissenschaften im Hinblick auf diese Zeitschrift. — Das Wissen über das Tierkreislicht.

D. Brauns: Der Strand von Pozzuoli und der Serapis-Tempel im neuen Lichte dargestellt.

F. K. Ginzel: Ueber historische Sonnenfinsternisse.

J. Scheiner: Die spectrographische Bestimmung der Bewegung der Himmelskörper in der Gesichtslinie. — Ueber die Bedeutung der photographischen Methoden in der Astronomie.

O. Jesse: Die leuchtenden Nachtwolken.

H. Seeliger: Ueber einige Aufgaben der Photometrie des Himmels.

H. Mohn: Die norwegische Nordmeerexpedition.

E. Wagner: Die ungewöhnlichen atmosphärischen Erscheinungen nach dem Ausbruche des Krakatau.

E. S. Holden: Die Lick-Sternwarte.

L. Sohncke: Neuere Theorie der Luft- und Gewitter-Elektricität.

L. Weineck: Der Fortschritt der Selenographie.

O. T. Shermann: Unser Wissen über das Zodiakallicht.

Auf die Abhandlungen folgt in jedem Hefte: Feuilleton, Mitteilungen, Bibliographisches. H.

Atronomischer Kalender für 1890. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Neunter Jahrgang. Wien, Carl Gerold's Sohn. 131 S.

Die Beilagen enthalten Folgendes. Neue Planeten und Kometen. Uebersicht des Planetensystems, und zwar Bahnelemente der grossen Planeten, der Satelliten, der Astroiden, deren Verzeichniss alphabetisch und nach der Zeit ihrer Entdeckung. H.

Vermischte Schriften.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté. Sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse,

Digitized by Google

avec le concours du conseil général de la Haute-Garonne. Tome III. Année 1889. Paris 1889. Gauthier-Villars et fils.

Der 3. Band enthält folgende Abhandlungen.

A. Legoux: Anziehung eines homogenen oder aus homogenen Schichten bestehenden Ellipsoids auf einen äussern Punkt. — Ueber die Integration der Gleichung $\partial s^2 = E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2$.

X. Stouff: Ueber gewisse Fuchs'sche Gruppen und eine Erweiterung der Theorie der quadratischen Formen.

Lerch: Ueber gewisse Entwickelungen in trigonometrische Reihen.

Andoyer: Ueber ein geometrisches Problem.

E. Cosserat: Ueber den Kreis als erzeugendes Element des Raumes. — Ueber die bilinearen Formen.

G. Berson: Ueber den Einfluss des Stosses auf die zurückbleibende Magnetisirung eines Nickelstabes.

Stieltjes: Ueber die Reduction einer nach absteigenden Potenzen einer Variabeln fortschreitenden Reihe auf einen Kettenbruch.

V. Rouquet: Untersuchung eines Complexes 6. Ordnung.

Chauvin: Untersuchungen über die rotatorisch magnetische Polarisation im Islandspath.

P. Appell: Ueber die homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit constanten Coefficienten.

G. Berson u. A. Destrem: Untersuchung über die Elektrolyse.

C. Bioche: Ueber die Systeme von Curven, welche die Erzeugenden einer Regelfläche homographisch teilen.

Carvallo: Praktische Methode der vollständigen numerischen Auflösung algebraischer oder transcendenter Gleichungen. H.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fink, K., kurzer Abriss u. Geschichte der Elementar-Mathematik m. Hinweisen auf die sich anschliessenden höheren Gebiete. Tübingen, Laupp. 4 Mk.

Fortschritte d. Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 3. Jahrg. Das Jahr 1889. 1. Hft. Berlin, Springer. 5 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1884. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 10. Jahrg. 1. Abth., enth. Physik der Materie. Red. v. E. Budde. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Gühne, B., Abriss der Geschichte der Elektrizität. Dresden, v. Zahn & J. 1 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 19. Bd. Jahrg. 1887. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Zum 50-jährigen Bestehen der Nicolai-Hauptsternwarte. Beschreibung d. 30-zölligen Refractors u. d. astrophysikalischen Observatoriums. Leipzig, Voss' Sort. Kart. 20 Mk.

Methode und Principien.

Bernhard, W., üb. das Naturgesetz v. der Erhaltung der Kraft. Ein populärer Vortrag. Schwäb.-Hall, Staib. 50 Pf.

Ehrhardt, F., Mechanismus u. Teleologie. Eine Abhandlg. üb. die Principien der Naturforschung. Leipzig, Reisland. 3 Mk. 60 Pf.

Kerz, F., weitere Ausbildung der Laplace'schen Nebularhypothese. 2. Nachtrag. Leipzig, Spamer. 1 Mk. 60 Pf.

Knabe, K. F. A., üb. den direkten Beweis. Cassel, Klaunig. 80 Pf.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht

XXXVI.

Geometrie.

Ueber Curven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift von Dr. Hermann Brunn. Mit 6 Tafeln. München 1889. Theodor Ackermann. 74 S.

Es werden die Eigenschaften derjenigen ebenen Curven untersucht, die sich überall nach derselben Seite hinkrümmen und ganz im Endlichen liegen. Der analytische Ausdruck stellt sie dar als Enveloppen einer Tangente, die, wenn die Curve geschlossen ist, mit einer periodischen Function ihres Richtungswinkels variirt. Das Gegenwärtige ist die Fortsetzung der Inauguraldissertation des Verfassers „Ueber Ovale und Eiflächen". Die Ovalen entsprechen dem besondern Falle, wo die Periode jener Function, die sonst Vielfaches von 2π, $= 2\pi$ ist. Die Eiflächen sind das Analoge im Raume. Auch die gegenwärtige Arbeit geht am Schlusse etwas auf die analogen Flächen und darüber hinaus auf die analogen Gebilde von mehr Dimensionen ein. Die untersuchten Themata nach der allgemeinen Theorie sind wie folgt bezeichnet: Buschenveloppen, Ovalen, eine Erzeugungsweise von Ovalen, Sätze über Ovale und Eiflächen, Ellipsen, Verallgemeinerung des Hölder'schen Mittelwertsatzes.

H.

Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schar algebraischer Raumcurven vierten Grades enthält. Von Dr. Wilhelm Thienemann, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Essen. Leipzig 1890. Gustav Fock. 22 S.

Digitized by Google

Die untersuchte Fläche hat die Gleichungen:

$$x = \frac{1}{4}(r^2 - r^{-2})\cos 2\varphi - 2\log r$$
$$y = \frac{1}{2}(r^2 - r^{-2})\sin 2\varphi; \quad z = 2(r + r^{-1})\cos\varphi$$

Anlass sie zu untersuchen bot ihre Erwähnung von H. A. Schwarz in Cr. Journ. LXXXVII. 146. Die algebraischen Parameterlinien $r =$ const sind der Schnitt zweier Cylinder, deren Axen parallel der z und y Axe, und liegen auf einem Rotationskegel um die z Axe. Die Discussion schliesst sich einem Satze von Schwarz über die Kegel, welche eine Minimalfläche umhüllen, und der Behandlungsweise der Minimalflächen von Weierstrass an und führt das daselbst allgemein Gegebene an den genannten besonderen Gebilden durch.

H.

Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. Von W. Fuhrmann, Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreussen. Mit 14 lithographischen Tafeln. Berlin 1890. Leonhard Simion. 190 S.

Das Vorliegende ist eine Schule des Beweisens planimetrischer Sätze, welche den Schulunterricht dahin zu ergänzen bestimmt ist, dass der Schüler sich die Fähigkeit aneigne, Beweise für gegebene, nicht im Schulcursus enthaltene Sätze aufzufinden. Der Gebrauch des Buches ist nicht sofort zweifellos ersichtlich. Es besteht aus Anweisung und aus einer grossen Anzahl durchgeführter Beweise für beispielsweise aufgestellte Sätze. Dass der Schüler, bevor er an Lösung von Uebungsaufgaben geht, sich mit den hier erteilten sehr umfangreichen Lehren bekannt machen solle, kann wol nicht die Meinung des Verfassers sein. Damit würde durch Einschiebung einer zu langen receptiven Arbeit der Zweck der Uebungsaufgaben, das Bewusstsein selbständig productiver Tätigkeit zu wecken, vereitelt werden. Bei Beschränkung auf ein geringes Mass an solchen Lehren lässt sich eher ein Nutzen davon erhoffen, und so finden wir in manchen neuern Uebnngsbüchern als Beihülfe für die weniger begabten Schüler in der Kürze zusammengestellt, was dieselben wissen müssen, um mit Erfolg nach Lösungen zu suchen. Es scheint nun dem Verfasser zunächst darum zu tun gewesen zu sein, den ganzen hierher gehörigen Lehrstoff im weitesten Umfange systematisch zu verarbeiten. Daraus ist eine viel verzweigte Theorie hervorgegangen, die sogar im gegenwärtigen einfachsten Falle, wo alle Resultate gegeben und nur die Beweise zu suchen sind, einen bedeutenden Inhalt umfasst. Der Gebrauch dieses Werkes lässt sich auf mannichfaltige Weise denken: dem Lehrer bietet es eine grosse

Digitized by Google

Auswahl dessen, was sich zur Anwendung eignet; der Schüler, welcher nach erhaltener Vorbildung sich gern weiter mit Geometrie beschäftigt, kann darin manche Anregung empfangen. Die Hauptabschnitte sind: Angabe allgemeiner Ziele und Regeln; die verschiedenen Methoden und Hülfsmittel bei den Beweisen; Erläuterung der Beweismethoden durch Beispiele; 1. Stufe: Grundsätze, Fundamentalsätze über die Parallelen, das gleichschenklige Dreieck, Congruenz der Dreiecke, Peripheriewinkel; 2. Stufe: Untersuchung über zusammenhangende Eigenschaften der Dreiecke in Bezug auf deren Berührungskreise, Anwendungen von Proportionen, Sätze über Flächen; 3. Stufe: Benutzung aller möglichen Hülfsmittel, der trigonometrischen Functionen, der harmonischen und projectiven Gebilde, Darstellung von zusammenhangenden Eigenschaften von Figuren; Anhang: die grundlegenden und elementaren Eigenschaften der Brocard'schen Geometrie, Sätze derselben vorzugsweise bezüglich auf bestimmte Kegelschnitte. H.

Grundlagen einer Isogonalcentrik. Von J. Schick. Tübingen 1889. Franz Fues. 91 S.

Die Schrift ist aus dem Correspondenzblatt für die Gel. u. Realschulen Würt. besonders herausgegeben. Zur Erklärung des Gegenstandes geht Folgendes voraus. Fällt man von einem beliebigen Punkte Senkrechte auf die Seiten eines beliebigen Vielecks und verbindet die Fusspunkte der Reihe nach. so heisst das so gebildete Vieleck das Fusspunktsvieleck jenes Punktes, man nennt es orthogonischcentrisch zum ersten, den Punkt das Orthogonalcentrum, die Senkrechten Orthogonalvectoren, die Radien der Ecken von jenem Centrum aus Eckenvectoren. Hier wird nur auf Dreiecke Anwendung gemacht. Vom Fusspunktdreieck hat Steiner folgendes bewiesen. Die 3 Lote von den Ecken des Urdreiecks auf seine Seiten gefällt schneiden sich in einem Punkte P_1; die Eckenvectoren von dem Centren P und P_1 bilden mit den Seiten des Urdreiecks gleiche Winkel; die 6 Fusspunkte für P und P_1 liegen auf einem Kreise um die Mitte von PP_1; P_1 ist der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks, dessen Ecken die Gegenpunkte von P in Bezug auf die Seiten sind; P und P_1 sind die Brennpunkte einer Ellipse, welche die Dreiecksseiten berührt. Diese Eigenschaften erweisen sich äusserst ergibig für Dreieckssätze, deren Theorie die Isogonalcentrik genannt wird. H.

Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig auf einander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen. Von Karl Doehlemann. München 1889. Theodor Ackermann. 40 S.

Digitized by Google

Die Beziehung der Strahlenbündel ist die, dass die entsprechenden Strahlen zweier Bündel sich schneiden; die von ihnen erzeugten Flächen sind es, die untersucht werden. Die Untersuchung schliesst sich an die Arbeiten von Jonquières (Nouv. Ann. 2. sér. III. 1864) und Dewulf (Bull. des sc. Math. et Astr. 1873) an. H.

Elemente der darstellenden Geometrie zum Schulgebrauche zusammengestellt von Wenzeslaus Pözl, Professor für Mathematik und darstellende Geometrie an der k. Industrieschule zu München. München 1890. Theodor Ackermann. 107 S.

Obwol die verschiedenen zu Gebote stehenden Darstellungsweisen im Anfang erklärt werden, handelt das Buch allein von der Darstellung durch Orthogonalprojection und zwar fast ausschliesslich auf 2 zu einander senkrechten Ebenen. Es soll, wie der Verfasser sagt, ein Leitfaden für den Schulgebrauch sein und den Lehrer nicht ersetzen; nur den grundlegenden und den schwierigern Aufgaben habe er die nötige Ausführlichkeit gewidmet. Die der Reihe nach behandelten Gegenstände sind: die Darstellung des Punktes, der Geraden, der Ebene, die gelehnte Gerade, die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen, deren Umformung und Neigung, Polygone, Dreikant, Polyeder, deren Schnitte mit Ebenen und unter sich. Die Figuren stehen im Texte. H.

Ausgewählte Abschnitte aus einer synthetischen Geometrie der Kegelschnitte. Von F. H. G. Fischer. Abhandlung zu dem Jahresbericht der städtischen Realschule zu Leipzig für das Schuljahr Ostern 1889—1890. 4°. 35 S.

Die ausgewählten Themata sind: Kegelschnitt und Gerade; Pol und Polare, Durchmesser und Mittelpunkt; zugeordnete Punkte und Gerade; Durchmesser und Axen; Brennpunkte und Leitlinien, zu einander senkrechte Tangenten; Kegelschnitt und Kreis. Die Figuren sind auf Tafeln. Der erste Satz (Carnot'scher S.) ist kein Muster exacten Ausdrucks. H.

T e c h n i k.

Dr. J. Frick's physikalische Technik, speciell Anleitung zur Ausführung physikalischer Demonstrationen und zur Herstellung von physikalischen Demonstrations-Apparaten mit möglichst einfachen

Digitized by Google

Mitteln. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Von Dr. Otto Lehmann, Professor der Physik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe. In zwei Bänden. Erster Band. Mit 708 in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1890. Friedrich Vieweg und Sohn. 725 S.

Die Anleitung geht vielfach auf solche Experimente ein, deren Demonstrationsmittel vom Lehrer (oder auch von den Schülern) selbst angefertigt werden können; doch ist sie auch beim Gebrauche fertiger Apparate nicht überflüssig, da zur Behandlung, zu kleinen Veränderungen und Reparaturen der Apparate dem Lehrer stets die zugehörigen technischen Kenntnisse und technisches Urteil unentbehrlich sind. Sie schliesst sich an den Gang des physikalischen Unterrichts an, wodurch von selbst der Zweck wissenschaftlicher Forschung bei den Experimenten unberührt bleibt. Davon unabhängig ist nur der 1. Teil, welcher handelt: von der Einrichtung des Locals, der Behandlung, dem Reinigen, Repariren und Aufstellen der Apparate. Der 2. Teil betrifft nun einzeln die Versuche über das Gleichgewicht der Krafte, dann über die Wärme, und zwar erst über die Zustandsänderungen der Körper durch Wärme, dann über Thermodynamik, zuletzt über Wärmeleitung. Hiermit schliesst der 1. Band.

H.

Der Betrieb und die Schaltungen der elektrischen Telegraphen. Unter Mitwirkung von mehreren Fachmännern bearbeitet von Prof. Dr. Karl Eduard Zetzsche, Kaiserl. Telegraphen-Ingenieur a. D. Zugleich als 2. Hälfte des dritten Bandes des Handbuchs der elektrischen Telegraphie. Heft 1. Mit 117 in den Text gedruckten Abbildungen. Halle a. S. 1890. Wilhelm Knapp.

Obgleich das Buch getrennt vom Gesamtwerke herausgegeben wird, ist es doch wesentlich ein dazu gehöriger Teil, es setzt die (mutmasslich) darin erteilten allgemeinen Kenntnisse voraus und handelt nur von den Verschiedenheiten der Erfordernisse, Einrichtungen und Betriebsweisen im weitesten Umfange der heutigen Verkehrs-Telegraphie.

H.

Vademecum für Elektrotechniker. Praktisches Hülfs- und Notizbuch für Ingenieure, Elektrotechniker, Werkmeister, Mechaniker u. s. w. Begründet von E. Rohrbeck, herausgegeben von Dr. W. A. Nippoldt, Physiker und Elektrotechniker in Frankfurt a. M. Siebenter Jahrgang des Kalenders für Elektrotechniker. 1890. Mit vielen Holzschnitten. Halle a. S. Wilhelm Knapp. 470 S.

Digitized by Google

Dieser Jahrgang ist der erste, welcher vom neuen Herausgeber besorgt ist. Veränderungen und Vermehrungen sind im ganzen, obwol nicht einzeln namhaft, angezeigt. Wenig über die Hälfte des Buchs betrifft die Elektrotechnik selbst, auch die Mathematik, Mechanik und Physik ist berücksichtigt. Auch beschränkt es sich nicht auf die, eigentlich allein von einem Vademecum zu erwartenden, Angaben, sondern gibt auch manche Lehren, die in der Schule erledigt sein könnten. Es scheint, dass viele Einsendungen erfolgt sind, welche gerade in Bezug auf die vorbereitenden Teile Wünsche geäussert haben; denn laut des Vorworts sind eben diese im neuen Jahrgang ausführlicher behandelt worden. Die Gegenstände der Elektrotechnik sind: elektrische Kraftmaschinen, elektrische Beleuchtung, elektrische Kraftübertragung, Telegraphie, Telephonie, Eisenbahntelegraphie, Elektrolyse und Galvanoplastik, Eisenbahnwesen, elektrische Eisenbahnen, Blitzableiter. H.

Jahrbuch für Elektrotechnik 1888—89. Unter der Mitwirkung der Herren: Dr. A. Krebs in Berlin; Dr. Edm. Hoppe in Hamburg; Dr. G. Erlwein in Berlin; Dr. O. May in Frankfurt a. M.; Ingenieur Friedrich Drexler in Wien; Telegr.-Ingenieur E. Müller; Telegr.-Inspector Löbbecke in Frankfurt a. M.; Dr. V. Wietlisbach in Bern; Dr. J. G. Wallentin in Troppau herausgegeben von Professor Dr. G. Krebs in Frankfurt a. M. und C. Grawinkel, Ober-Telegr.-Ingenieur in Berlin. Zweiter Jahrgang. Mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen. Halle a. S. 1890. Wilhelm Knapp. 226 S.

Der 2. Jahrgang enthält 12 belehrende Abhandlungen über folgende Gegenttände. A. Krebs: Die elektrischen Maschinen. — E. Hoppe: Die Accumulatoren. — G. Erlwein: Galvanische Elemente. — A. Krebs: Die elektrischen Messinstrumente. — O. May: Die Entwickelung des elektrischen Lichtes. — F. Drexler: Die elektrische Kraftübertragung. — Elektrische Bogenlampen, Glühlampen und Installationsteile. — E. Müller: Telegraphie. — Löbbecke: Eisenbahn-Telegraphen- und Signalwesen. — V. Wietlisbach: Fernsprechwesen. — G. Wallentin: Fortschritte der Galvanostegie, Galvanoplastik, Elektrometallurgie, der elektrischen Bearbeitung der Metalle in letzter Zeit und einige neue Anwendungen der elektrolytischen Vorgänge. — A. Krebs: Atmosphärische Elektricität, Blitzgefahr und Blitzschutzvorrichtungen. H.

Digitized by Google

Erd- und Himmelskunde.

Annales de l'Observatoire astronomique magnétique et météorologique de Toulouse. Tome I. renfermant les travaux exécutés de 1873 à la fin de 1878 sous la direction de M. F. Tisserand, ancien Directeur de l'Observatoire de Toulouse, Membre de l'Institut du Bureau des Longitudes etc., publié par M. B. Baillaud, Directeur de l'Observatoire, Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1880. Tome II. renfermant une partie des travaux exécutés de 1879 à 1884 sous la direction de M. B. Baillaud. 1886. Paris. Gauthier-Villars.

Der 1. Band beginnt mit historischen Angaben über das Observatorium und dem Verzeichniss der 1873 vorhandenen Instrumente. Dann folgen 4 Abhandlungen.

F. Tisserand: Ueber die säculären Verrückungen der Bahnebene des 8. Satelliten (Japhet) vom Saturn. — Ueber die Bewegung der Apsiden des Saturn und die Bestimmung der Masse des Ringes. — Ueber den Ring des Saturn.

J. Perrottin: Theorie der Vesta.

Dann folgen tabellarische Beobachtungsresultate, nämlich Durchgang des Mercur über die Sonne d. 6. Mai 1878, Eklipsen des Mondes, Satelliten des Jupiter, des Saturn, grosser Nebel im Orion, Sternschnuppen, Zodiakallicht, Sonnenflecke.

Der 2. Band enthält folgende Abhandlungen.

G. Bigourdan: Geschichte der Astronomie zu Toulouse vom Anfang bis zur Gründung des Observatoriums. — Vergleichung verschiedener Beobachtungen von Sonne, Mercur, Venus und Jupiter gemacht von Vidal zu Mirepoix mit den Tafeln von Le Verrier.

B. Baillaud: Ueber die numerische Berechnung der bestimmten Integrale. — Ueber die Entwickelung der Störungsfunction. — Bestimmung der Bahnen der 5 innern Satelliten des Saturn.

Brillouin: Elektrisches Schlagwerk einer astronomischen Uhr.

Dann folgen tabellarische Beobachtungsresultate. H.

Digitized by Google

Physik.

The mathematical theory of electricity and magnetism. By H. W. Watson, D. Sc. F. R. S. and S. H. Burbury, M. A. Vol. II. Magnetism and electrodynamics. Oxford 1889. Clarendon Press. 256 S.

Der 1. Band ist im 17. litt. Berichte S. 7 besprochen. Die Gegenstände des 2. Bands sind folgende. Magnetische Erscheinungen; magnetische Induction und inducirter Magnetismus; gegenseitige Beziehungen zwischen Magneten und geschlossenen elektrischen Strömen; inductive Wirkung von Strömen und Magneten, Faraday's Inductionsgesetze; Messungssysteme; allgemeine Gleichungen des elektromagnetischen Feldes; Theorie der inducirten Ströme auf leitenden Flächen; besondere Fälle der Inductionen; Theorien von Ampère und Andern; elektrische Theorie des Lichts. H.

Berechnung elektrischer Messungen an zahlreichen Beispielen dargestellt von W. R. P. Hobbs, Oberlehrer an der Marine-Torpedo-Schule zu Portsmouth. Aus dem Englischen übersetzt von O. Kietzer. Halle a. S. 1890. Wilhelm Knapp. 97 S.

Das Buch lehrt berechnen: den Gesamtwiderstand von Drahtverzweigungen, die Teilung des Stromes in Zweigströme; Stromstärke bei Hintereinanderschaltung und Nebeneinanderschaltung, einzeln und verbunden, und bei Gegeneinanderschaltung von Elementen, elektromotorische Kraft, Widerstand, Stärke der Batterien, vorteilhafteste Anordnung von Elementen, Widerstand von Leitern, elektrische Beleuchtung und Verschiedenes. Die Uebersetzung ist so wortgetreu als möglich. Die Masse sind in Meter und Gramm umgerechnet.

H.

Elektrodynamik mit Berücksichtigung der Thermoelektricität, Elektrolyse und der Thermochemie. Von Dr. Heinrich Weber, Professor an der Herzoglich Technischen Hochschule zu Braunschweig. Mit eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1889. Friedrich Vieweg und Sohn. 177 S.

Die Gegenstände des Buches sind der Beihe nach: der galvanische Strom; das Gesetz von der Erhaltung der Energie; die Energiegleichung für den galvanischen Strom; Thermoelektricität; Elektrolyse; Thermochemie; Stromkreis mit Elektrolyt; Wechselwirkung linearer galvanischer Ströme. Es legt die Anschauung W. Weber's zugrunde und leitet daraus die wichtigsten Gesetze aus den ver-

Digitized by Google

schiedenen Gebieten der Elektrodynamik ab. Fremden Bearbeitungen schliesst es sich allein in der Thermoelektricität an, wo es der Darstellung von Mascart und Jubert gefolgt ist. In Betreff der Litteratur wird auf das Werk von Wiedemann „Die Lehre von der Elektricität" verwiesen. H.

Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle. Von W. Voigt. Aus dem 36. Bande der Abhandl. der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Göttingen 1890. Dieterich. 4°. 47 S.

Die innere Reibung, von der die Rede ist, soll eine Kraft sein, die infolge von Geschwindigkeitsdifferenzen innerhalb eines bewegten Körpers auftritt, auch wenn dieser sich vollständig elastisch verhält, wie in der Tat hier vorausgesetzt wird. Aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen eines nicht starren Körpers werden erst die Reibungscomponenten entwickelt und auf Gruppen von Krystallen angewandt; als Coefficienten der Ausdrücke ergeben sich 3 Arten von Constanten, Elasticitätsmoduln, Hauptreibungsmoduln und abgeleitete Reibungsmoduln. Dann wird die Dämpfung gleichförmiger langsamer Schwingungen cylindrischer Stäbe, dann die Dämpfung unendlich kleiner Schwingungen unendlich dünner cylindrischer Stäbe, dann die Functionen der Reibungsconstanten, auf welche die Beobachtung gedämpfter Schwingungen von Stäben führt, untersucht.

H.

Compendium der Experimental-Physik. Von Dr. G. Recknagel, Professor am K. Gymnasium zu Passau. Zweite Auflage. Mit 616 Abbildungen in Holzschnitt. Kaiserslautern 1888. J. J. Tascher. 1008 S.

Die 1. Auflage ist im 222. 225. und 236. litt. Bericht, S. 13. 8. 45 besprochen. Die zweite hat, den Fortschritten der Wissenschaft und der Technik folgend, manche Vermehrungen erhalten. Dem elektrischen Potential ward ein besonderes Capitel gewidmet; die internationalen absoluten Masse wurden eingehend behandelt und und überall durchgeführt; die einstromige Dynamo-Maschine, die elektrische Kraftübertragung, die elektrische Beleuchtung und das Telephon wurden beschrieben und erörtert; bei der Lehre vom Licht ward die Verwendung der Hauptebenen zur Construction der Bilder einer Linse hinzugefügt. H.

Digitized by Google

Vermischte Schriften.

The Journal of the College of Science, Imperial University, Japan. Vol. II. part IV. V. Vol. III. Part I. II. III. Tokyo 1888. 1889. Published by the university.

Zu den im 26. litt. Ber. S. 22. aufgeführten Arbeiten kommen in den 2 letzten Heften des 2. Bandes noch folgende hinzu:

K. Yamagawa: Bestimmung der Wärmeleitung des Marmors.

H. Nagaoka: Combinirte Einwirkung von Torsions- und Longitudinalspannungen auf die Magnetisirung von Nickel. — Ueber die Magnetisirung und die Coercitivkraft von Nickeldraht unter combinirter Torsions- und Longitudinalspannung.

D. Kitao: Beiträge zur Theorie der Bewegung der Erdatmosphäre und der Wirbelstürme.

Der 3. Band enthält die Arbeiten:

G. Knott: Ueber die Einwirkung der Torsion („*Jagging and priming*“) auf den Magnetismus von Eisen- und Nickeldrähten, längs denen elektrische Ströme gehen.

H. Nagaoka: Einwirkung der Torsion auf die Magnetisirung von Nickel und Eisen. H.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb Editor. Thomas Craig Associate Editor. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. *Πραγμάτων ἔλεγχος οὐ βλεπομένων.* Volume XII. Baltimore 1890. Publication Agency of the Johns Hopkins University.

Der 12. Band enthält folgende Abhandlungen.

A. R. Forsyth: Systeme algebraisch vollständiger Ternarianten.

Mac Mahon: Zweite Abhandlung über eine neue Theorie der symmetrischen Functionen.

P. Appell: Von der Homographie in der Mechanik.

F. Franklin: Ueber einige Anwendungen circularer Coordinaten. — Ueber confocale bicirculare Linien 4. Grades.

F. N. Cole: Ueber Rotationen in der Vierdimensionengeometrie.

H. Poincaré: Ueber die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

H. Fine: Singulare Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

H. Taber: Ueber die Theorie der Matricen. H.

Digitized by Google

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. III. (Anno XXVIII.) Napoli 1889.

Der 8. Band enthält folgende mathematische Arbeiten.

P. del Pezzo: Gleichung einer ebenen Curve 5. Ordn. mit 6 Spitzen.

A. Capelli: Ueber gewisse Entwickelungen von Determinanten. — Ueber die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Functionen.

G. Pirondini: Ueber die Construction der Linien des Raumes.

R. Marcolongo: Einige Sätze über die cylindrischen Functionen 1. Gattung. — Ueber einige Systeme partieller Differentialgleichungen. — Gleichgewicht der Elasticität eines nur von einer unbegrenzten Ebene begrenzten Körpers.

A. del Re: Ueber die birationalen Nullreciprocitäten der Ebene.

D. Padelletti: Ueber die graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

G. Cicconardi und G. Tria: Ueber eine graphische Varietät des Stosses.

Ferner Nekrologe von Joseph Meneghini, Joseph Seguenza, Angelo Genocchi, Eugen Chevreul und Gilbert Govi. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Derde reeks. Zesde, zevende deel. Amsterdam 1889, 1890. Johannes Müller.

Der 6. Band enthält folgende mathematische Arbeiten.

Jan de Vries: Ueber ebene polyedrale Configurationen. — Ueber eine Gruppe regelmässiger ebener Configurationen. — Eine Rangordnung über ein Punktefeld in involutorischer Gruppe. — Ueber die desmische Configuration 9_n. — Ueber ebene Configurationen, welche aus den Osculationsgruppen der kubischen Curve gebildet werden können. — Ueber ebene Configurationen, worin jeder Punkt mit 2 Linien incident ist.

D. Bierens de Haan: Baustoffe zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in den Niederlanden.

J. Cardinaal: Das Construiren gebogener Oberflächen mittelst Flächenschnitte.

F. J. van der Berg: Nochmals über die Bernoullischen Coefficienten.

P. H. Schoute: Aequianharmonie in Harmonie bei Polsyste-

Digitized by Google

men binärer Formen. — Ueber Teteaeder begrenzt von ähnlichen Dreiecken.

Der 7. Band enthält folgende.

C. Grinwis: Ueber 2 Formen von Energie bei rollender Bewegung.

Jan de Vries: Ueber eine Gruppe regelmässiger ebener Configurationen und einige damit zusammenhangende Configurationen von Punkten und Curven. — Neue Eigenschaften der harmonischen Configuration (24_3, 18_4). — Cyklische Vielecke auf ebenen kubischen Curven.

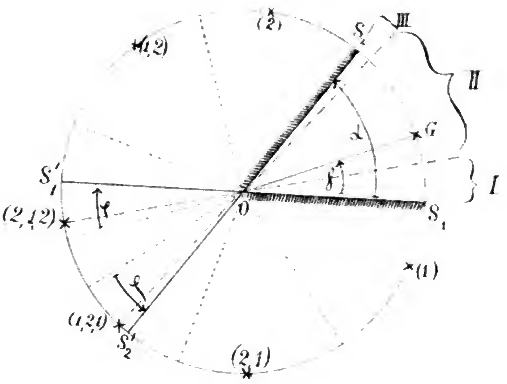
J. C. Kluyver: Charakteristische Zahlen der algebraischen Raumcurve.

G. F. W. Baehr: Ueber die Inflexionspunkte von Poinsot's Herpothodie. H.

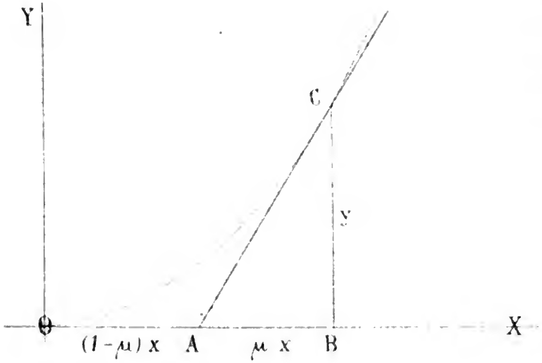
Das enthüllte Geheimniss der Pythia oder die Kunst, ohne Kenntniss der lateinischen Sprache auf mathematischem Wege lateinische Hexameter zu machen, die zugleich weissagend auf eine vorgelegte Frage die Antwort erteilen. Von F. Mohr, Vermessungsrevisor a. D. Mit einem Vorwort von Dr. A. Amthor. Hannover 1890. Schmorl u. von Seefeld Nachf. 15 S.

Der Verfasser zählt die Buchstaben jedes Wortes der Frage, bildet durch Combination aus diesen Zahlen mit Anwendung dreier Tabellen eine Tafel von ein-, zwei-, dreiziffrigen Zahlen, welche dann gemäss einer vierten Tabelle in Buchstaben umgesetzt wird. Diese geben dann einen lateinischen Hexameter. Die Anzahl der möglichen Antworten ist nach Berechnung von Amthor 531441. Eine vollständige Erklärung des Zusamenhangs hat er nicht aufzufinden vermocht. Soviel ist jedoch ersichtlich, dass die Antworten nicht einzeln den Fragen entsprechen können, weil man jede Frage in Worte kleiden kann, deren jedes eine gegebene Anzahl Buchstaben hat. Jede Antwort muss, um in jedem Falle auf die gestellte Frage zu passen, auf jede Frage passen. Die Aufgabe des Erfinders bestand also in 2 Arbeiten: erst 531441 nichts verratende Hexameter zu machen, dann die Combinationen gegebener Zahlen (es sind 6 unter 9) nach Regeln auf je einen, gleichgültig welchen Hexameter hinzuführen. Beide Arbeiten lassen den Fleiss des Erfinders bewundern. Hoppe.

Digitized by Google



I Maurer: Theorie des Winkelspiegels



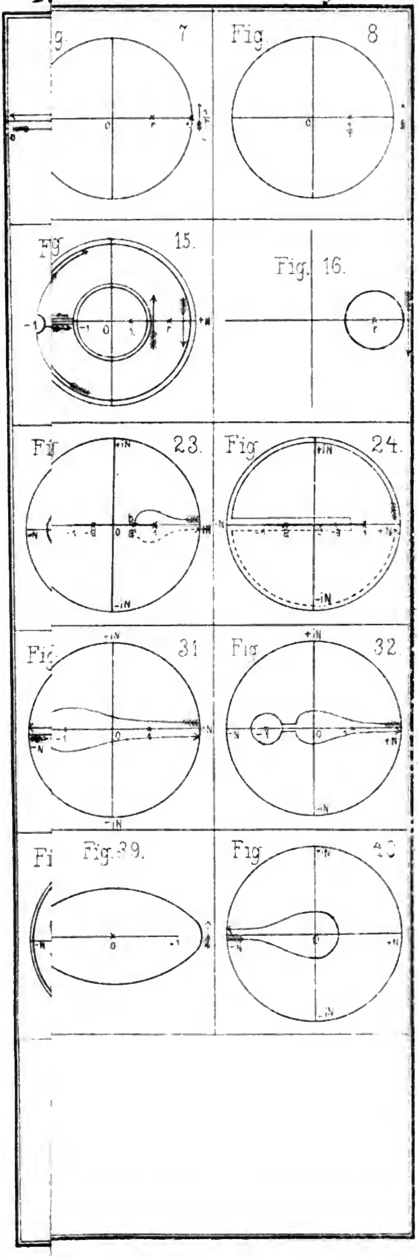
VII. Ligowski:

Zur Inhaltsberechnung der Flächen und Körper.

Digitized by Google

Digitized by Google

Tafel II.



Digitized by Google

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

MAR 13 1976

Digitized by Google

[redacted]
510.5
A673
v.9

STORAGE AREA

Google

Digitized by Google